

Gruber | Neumann

Erfolg im Mathe-Abi 2018

Band 2: Prüfungsaufgaben
Berufliche Gymnasien
Baden-Württemberg

Übungsbuch mit Tipps und Lösungen

Freiburger
Verlag

Inhaltsverzeichnis

Erfolg im Mathe-Abi	7
1. Musteraufgabensatz	9
Teil 1 ohne Hilfsmittel	9
Teil 2 Analysis	12
Teil 3 Stochastik	16
Teil 4 Lineare Algebra	20
2. Musteraufgabensatz	23
Teil 1 ohne Hilfsmittel	23
Teil 2 Analysis	26
Teil 3 Stochastik	30
Teil 4 Lineare Algebra	33
3. Musteraufgabensatz	35
Teil 1 ohne Hilfsmittel	35
Teil 2 Analysis	39
Teil 3 Stochastik	43
Teil 4 Lineare Algebra	45
4. Musteraufgabensatz	47
Teil 1 ohne Hilfsmittel	47
Teil 2 Analysis	50
Teil 3 Stochastik	56
Teil 4 Lineare Algebra	59
5. Abitur 2017	61
Teil 1 ohne Hilfsmittel	61
Teil 2 Analysis	64
Teil 3 Stochastik	68
Teil 4 Lineare Algebra	70
Tipps	73
Lösungen	113
Stichwortverzeichnis	253

Erfolg von Anfang an

... ist das Geheimnis eines guten Abiturs.

Das vorliegende Übungsbuch ist speziell auf die Anforderungen des Mathematik-Abiturs an Beruflichen Gymnasien in Baden-Württemberg abgestimmt, welches sich seit 2017 grundlegend geändert hat: Neben einem hilfsmittelfreien Teil, in dem kleinere Aufgaben ohne viel Rechenaufwand zu lösen sind, gibt es einen Teil mit Hilfsmitteln, in dem eine spezielle Merkhilfe und ein wissenschaftlicher Taschenrechner verwendet werden dürfen. Dieses Übungsbuch umfasst die drei großen Themenbereiche Analysis, Stochastik und Lineare Algebra (Vektorgeometrie und Matrizen) und ist für alle beruflichen Gymnasien geeignet. Daneben gibt es vom Freiburger Verlag noch ein Übungsbuch für das grundlegende Wissen für den hilfsmittelfreien Teil sowie Lernkarten, um die wesentlichen Begriffe und Rechenverfahren auf sinnvolle und effektive Art und Weise zu lernen. Die Übungsbücher fördern das Grundwissen und die Grundkompetenzen in Mathematik, vom einfachen Rechnen bis hin zum Verstehen von gedanklichen Zusammenhängen. Die Übungsbücher sind eine Hilfe zum Selbstlernen (learning by doing) und bieten die Möglichkeit, sich intensiv auf die Prüfungen vorzubereiten und gezielt Themen zu vertiefen. Hat man Erfolg bei den grundlegenden Aufgaben, machen Mathematik und das Lernen mehr Spaß.

Bei einigen Aufgaben ist es nötig, den Taschenrechner zu benutzen. Nicht bei allen Rechnerfunktionen ist gleich klar, wie sie aufgerufen werden.

Daher befinden sich im Buch QR-Codes für die entsprechenden Videos, in denen die Funktionen des Taschenrechners kurz erklärt werden. Der QR-Code kann mit einer entsprechenden App gescannt werden. Alternativ lässt sich auch der Link unter dem Code benutzen.

Der Code neben diesem Text verweist beispielsweise auf ein Video zum Bestimmen der kumulierten Binomialverteilung.



frv.tv/df

Der blaue Tippteil

Hat man keine Idee, wie man eine Aufgabe angehen soll, hilft der blaue Tippteil zwischen Aufgaben und Lösungen weiter: Zu jeder Aufgabe gibt es Tipps, die helfen, einen Ansatz zu finden, ohne die Lösung vorwegzunehmen.

Der Ablauf der Abiturprüfung

Die Prüfung dauert 270 Minuten, also 4,5 Stunden.

Zu Beginn der Prüfung erhalten die Schülerinnen und Schüler alle Aufgaben.

Nach der Abgabe des hilfsmittelfreien Teils erhalten die Schülerinnen und Schüler die zugelassenen Hilfsmittel, z.B. die Merkhilfe und den Taschenrechner ausgehändigt.

Die Abiturprüfung besteht aus **vier Teilen**:

- Teil 1: Hilfsmittelfreier Teil,
- Teil 2: Analysis,
- Teil 3: Stochastik,
- Teil 4: Lineare Algebra (Vektorgeometrie oder Matrizen).

Der hilfsmittelfreie Teil sowie eine innermathematische Aufgabe aus Teil 2 ist von allen Schülerinnen und Schülern zu bearbeiten, eine anwendungsbezogene Aufgabe aus Teil 2 und eine Stochastik-Aufgabe aus Teil 3 können die Schülerinnen und Schüler selbst wählen. Im Teil 4 wird die Aufgabe durch die Lehrkraft ausgewählt. Insgesamt können 90 Punkte erreicht werden.

	Punkte	Aufgabe	Wahlmöglichkeiten
Teil 1	30	Hilfsmittelfreier Teil Analysis (50%), Stochastik (25%), Vektorgeometrie oder Matrizen (25%)	keine
Teil 2	20 10	Analysis Anwendungsorientierte Analysis	keine SchülerIn wählt eine aus drei vorgelegten Aufgaben aus
Teil 3	15	Stochastik	SchülerIn wählt eine aus zwei vorgelegten Aufgaben aus
Teil 4	15	Lineare Algebra: Vektorgeometrie oder Matrizen	keine

Allen SchülerInnen, die sich auf das Abitur vorbereiten, wünschen wir viel Erfolg.

Helmut Gruber, Robert Neumann

1. Musteraufgabensatz

Tipps ab Seite 74, Lösungen ab Seite 113

Teil 1 ohne Hilfsmittel

1 Analysis

1.1 Eine Funktion f hat folgende Eigenschaften:

- | | |
|-----------------|--|
| (1) $f(2) = 1$ | (3) $f''(4) = 0$ und $f'''(4) \neq 0$ |
| (2) $f'(2) = 0$ | (4) Für $x \rightarrow +\infty$ und $x \rightarrow -\infty$ gilt: $f(x) \rightarrow 5$ |

Beschreiben Sie für jede dieser vier Eigenschaften, welche Bedeutung sie für den Graphen von f hat und skizzieren Sie einen möglichen Verlauf des Graphen.

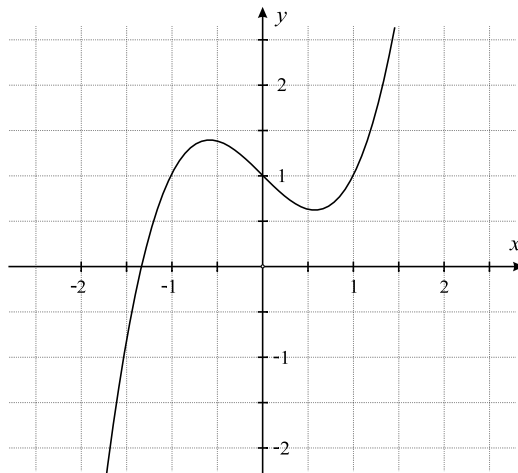
1.2 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$; $x \in \mathbb{R}$.

Geben Sie die Periode von f an und skizzieren Sie das Schaubild von f für $0 \leq x \leq 4$.

Bestimmen Sie eine mögliche Lösung der Gleichung $\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) = -1$.

1.3 Gegeben sind die in \mathbb{R} definierten Funktionen f , g und h mit

$$f(x) = x^2 - x + 1, \quad g(x) = x^3 - x + 1 \quad \text{und} \quad h(x) = x^4 + x^2 + 1.$$



- a) Die Abbildung zeigt den Graphen einer der drei Funktionen. Geben Sie an, um welche Funktion es sich handelt. Begründen Sie, dass der Graph die anderen beiden Funktionen nicht darstellt.
- b) Die erste Ableitung von h ist h' .
Bestimmen Sie den Wert von $\int_0^1 h'(x) dx$.

Tipps

Das Vektorprodukt

Wenn man einen Vektor \vec{n} sucht, der senkrecht auf zwei gegebenen Vektoren \vec{a} und \vec{b} steht (der Normalenvektor), geschieht dies einfach und schnell mit dem Vektorprodukt:

$$\vec{n} = (\vec{a} \times \vec{b}) = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

Die Merkhilfe dazu:

1. Beide Vektoren werden je zweimal untereinander geschrieben, dann werden die erste und die letzte Zeile gestrichen.
2. Anschließend wird «über Kreuz» multipliziert. Dabei erhalten die abwärts gerichteten Pfeile ein positives und die aufwärts gerichteten Pfeile ein negatives Vorzeichen.
3. Die einzelnen Komponenten werden subtrahiert – fertig!

$$\begin{array}{cc}
 \cancel{a_1} & \cancel{b_1} \\
 a_2 & b_2 \\
 a_3 & b_3 \\
 a_1 & b_1 \\
 a_2 & b_2 \\
 \cancel{a_3} & \cancel{b_3}
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{c}
 a_2 \nearrow b_2 \\
 a_3 \nearrow b_3 \\
 a_1 \searrow b_1 \\
 a_2 \searrow b_2
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

Anmerkung: Der Betrag des senkrecht stehenden Vektors entspricht genau der Flächenmaßzahl des Parallelogramms, das von den beiden Vektoren aufgespannt wird.

Beispiel: Sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, ergibt sich für den gesuchten Vektor:

$$\begin{array}{cc}
 \cancel{1} & \cancel{-1} \\
 3 & 4 \\
 2 & 0 \\
 1 & -1 \\
 3 & 4 \\
 \cancel{2} & \cancel{0}
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{c}
 3 \nearrow 4 \\
 2 \nearrow 0 \\
 1 \searrow -1 \\
 3 \searrow 4
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{pmatrix} 3 \cdot 0 - 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 4 - 3 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

1. Musteraufgabensatz

Teil 1 ohne Hilfsmittel

1 Analysis

1.1 Überlegen Sie, welcher Punkt auf dem Graphen von f liegt, wo der Graph von f eine waagrechte Tangente oder einen Wendepunkt hat und ob es eine waagrechte Asymptote gibt.

Verwenden Sie zum Skizzieren die gegebenen Eigenschaften.

1.2 Die Periode p von f erhalten Sie durch $p = \frac{2\pi}{b}$. Skizzieren Sie damit das Schaubild von f . Zur Lösung der gegebenen Gleichung substituieren Sie $\frac{\pi}{2}x = z$ und lösen die Gleichung $\sin(z) = -1$ nach z auf. Durch Resubstitution erhalten Sie eine Lösung für x .

1.3 a) Beachten Sie die Anzahl der Extrempunkte, die Symmetrie und das Verhalten der Graphen für $x \rightarrow \pm\infty$.

b) Das angegebene Integral erhalten Sie mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung. Verwenden Sie die angegebene Funktion h als Stammfunktion.

1.4 a) Überlegen Sie, wie der Graph von e^{-x} aus dem Graph von e^x hervorgeht und welche Bedeutung das Minuszeichen vor e^{-x} sowie die Zahl (+2) haben.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Kettenregel die 1. Ableitung von $f(x)$ und $g(x)$ und berechnen Sie $f(0)$, $g(0)$, $f'(0)$ und $g'(0)$.

2 Stochastik

2.1 Beachten Sie, dass es sich um ein Bernoulli-Experiment handelt, da es nur zwei verschiedene Ausgänge bei einem Spiel gibt. Geben Sie die Trefferwahrscheinlichkeit p für das Verlieren eines Spiels an und legen Sie X als Zufallsvariable für die Anzahl der verlorenen Spiele fest.

Um ein Ereignis A anzugeben, formen Sie die Wahrscheinlichkeit so um, dass bei jedem Summanden die Bernoulli-Formel $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$ sichtbar wird. Bestimmen Sie anschließend die Anzahl der Spiele n und die Anzahl der verlorenen Spiele k .

2.2 Zeichnen Sie ein Baumdiagramm mit den Ästen Gewinn (g) und Niete (n). Beachten Sie, dass sich beim Ziehen ohne Zurücklegen die Wahrscheinlichkeiten bei jedem Ziehen ändern. Überlegen Sie, welche Ergebnisse zum gesuchten Ereignis gehören und verwenden Sie die Pfadregeln.

1. Musteraufgabensatz

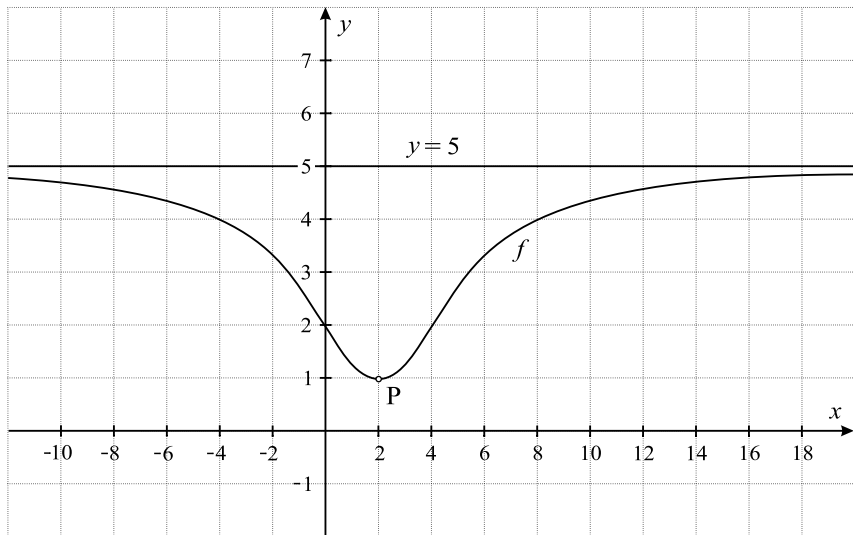
Teil 1 ohne Hilfsmittel

1 Analysis

1.1 Die genannten Eigenschaften haben die folgenden Bedeutungen:

- Die Eigenschaft (1) $f(2) = 1$ bedeutet, dass der Graph von f durch den Punkt $P(2 | 1)$ geht.
- Die Eigenschaft (2) $f'(2) = 0$ bedeutet, dass der Graph von f an der Stelle $x = 2$, d.h. im Punkt $P(2 | 1)$, eine waagrechte Tangente hat.
- Die Eigenschaft (3) $f''(4) = 0$ und $f'''(4) \neq 0$ bedeutet, dass der Graph von f an der Stelle $x = 4$ einen Wendepunkt besitzt.
- Die Eigenschaft (4) für $x \rightarrow +\infty$ und $x \rightarrow -\infty$ gilt $f(x) \rightarrow 5$ bedeutet, dass der Graph von f eine waagrechte Asymptote mit der Gleichung $y = 5$ für $x \rightarrow +\infty$ und $x \rightarrow -\infty$ hat.

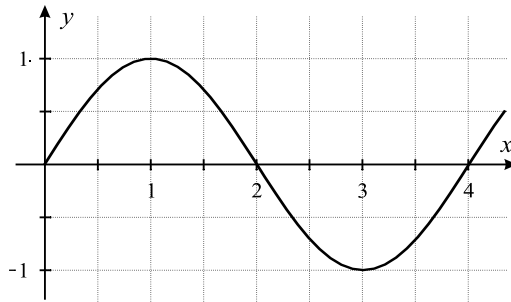
Damit kann man den Graphen von f etwa folgendermaßen skizzieren:



1.2 Es ist $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$; $x \in \mathbb{R}$.

Die Periode p von f erhält man durch $p = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 2\pi \cdot \frac{2}{\pi} = 4$.

Damit erhält man folgendes Schaubild von f :



Eine Lösung der Gleichung $\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) = -1$ erhält man durch Substitution:

Setzt man $\frac{\pi}{2}x = z$, so ergibt sich: $\sin(z) = -1$ mit der möglichen Lösung $z = \frac{3}{2}\pi$.

Durch Resubstitution erhält man: $\frac{\pi}{2}x = \frac{3}{2}\pi \Rightarrow x = 3$.

Eine mögliche Lösung der Gleichung $\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) = -1$ ist somit $x = 3$.

1.3 Gegeben sind $f(x) = x^2 - x + 1$, $g(x) = x^3 - x + 1$ und $h(x) = x^4 + x^2 + 1$.

a) Bei der gegebenen Abbildung handelt es sich um den Graphen der Funktion g .

Es kann nicht der Graph von f sein, da der Graph von f eine Parabel ist, welche nur einen Extrempunkt besitzt.

Es kann nicht der Graph von h sein, da die y -Werte des Graphen von h für $x \rightarrow \pm\infty$ gegen $+\infty$ gehen. Außerdem ist der Graph von h achsensymmetrisch zur y -Achse, da nur gerade Potenzen vorkommen.

b) Das angegebene Integral erhält man mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung. Als Stammfunktion verwendet man die gegebene Funktion h :

$$\begin{aligned} \int_0^1 h'(x) dx &= \left[h(x) \right]_0^1 \\ &= \left[x^4 + x^2 + 1 \right]_0^1 \\ &= (1^4 + 1^2 + 1) - (0^4 - 0^2 + 1) \\ &= 2 \end{aligned}$$

1.4 a) Wegen $g(x) = -f(-x) + 2$ entsteht der Graph von g aus dem Graph von f durch Spiegelung an der x -Achse, durch Spiegelung an der y -Achse und durch Verschiebung um 2 LE in y -Richtung.

b) Um zu zeigen, dass sich die Graphen von f und g in $P(0 | 1)$ berühren, muss man nachweisen, dass $P(0 | 1)$ auf beiden Graphen liegt (für $x = 0$ müssen also beide y -Werte gleich 1 sein) und dass die Steigung der Tangente in P bei beiden Graphen gleich ist.

Hierzu setzt man den Wert $x = 0$ in $f(x) = e^x$ und $g(x) = -e^{-x} + 2$ bzw. $f'(x) = e^x$ und $g'(x) = -e^{-x} \cdot (-1) = e^{-x}$ ein:

$$\begin{aligned} f(0) &= e^0 = 1 & f'(0) &= e^0 = 1 \\ g(0) &= -e^{-0} + 2 = -1 + 2 = 1 & g'(0) &= e^{-0} = 1 \end{aligned}$$

Wegen $f(0) = g(0) = 1$ liegt $P(0 | 1)$ auf beiden Graphen.

Wegen $f'(0) = g'(0) = 1$ sind die Tangentensteigungen in P gleich.

Damit berühren sich die Graphen von f und g in $P(0 | 1)$.

2 Stochastik

2.1 Beim Spiel an einem Spielautomaten gibt es nur die beiden Ausgänge «gewinnen» oder «verlieren», also handelt es sich um ein Bernoulli-Experiment. Da man durchschnittlich zwei Drittel aller Spiele verliert, gilt $p = \frac{2}{3}$ für das Verlieren eines Spiels.

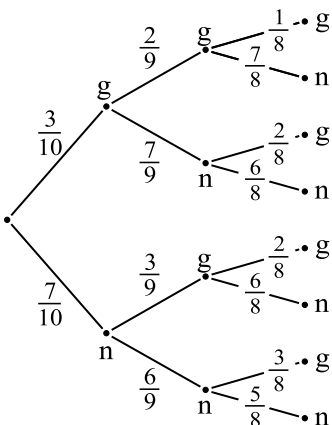
Es sei X die Zufallsvariable für die Anzahl der verlorenen Spiele.

Um ein Ereignis A anzugeben, formt man die gegebene Wahrscheinlichkeit um:

$$\begin{aligned} P(A) &= \binom{10}{8} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^8 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 10 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^9 \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^{10} \\ &= \binom{10}{8} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^8 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \binom{10}{9} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \binom{10}{10} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{10} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \\ &= P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) \\ &= P(X \geq 8) \end{aligned}$$

Damit lautet das Ereignis A : «Von 10 Spielen werden mindestens 8 Spiele verloren».

2.2



Da 3 Gewinne und 7 Nieten, also insgesamt 10 Lose in der Lostrommel sind, betragen die Wahrscheinlichkeiten beim 1. Ziehen für Gewinn (g): $\frac{3}{10}$ und für Niete (n): $\frac{7}{10}$.

Danach sind nur noch 9 Lose in der Trommel und die Wahrscheinlichkeiten bei der 2. und 3. Ziehung hängen jeweils davon ab, was beim 1. bzw. 2. Mal gezogen wurde.

Die Wahrscheinlichkeit, dass genau zwei Gewinne gezogen werden, erhält man mit Hilfe