Gruber I Neumann

Erfolg im Mathe-Abi

Baden-Württemberg
Berufliche Gymnasien

Übungsbuch für das
Basiswissen in Analysis,
Geometrie und Stochastik
mit Tipps und Lösungen

Freiburger Verlag

Vorwort

Erfolg von Anfang an

Das vorliegende Übungsbuch ist speziell auf den Lehrplan aller beruflichen Gymnasien in Baden-Württenberg abgestimmt. Es enthält viele Aufgaben, die die Grundkompetenzen in Mathematik – vom einfachen Rechnen und Formelanwenden bis zum Verstehen von gedanklichen Zusammenhängen – fördern. Das Übungsbuch ist eine Hilfe zum Selbstlernen (learning by doing) und bietet die Möglichkeit, sich intensiv auf die Prüfung vorzubereiten und gezielt Themen zu vertiefen. Hat man Erfolg bei den grundlegenden Aufgaben, machen Mathematik und das Lernen wieder mehr Spaß.

Der blaue Tippteil

Manchmal hat man keine Idee, wie man eine Aufgabe angehen soll bzw. es fehlt der Lösungsansatz. Hier hilft der blaue Tippteil in der Mitte des Buches weiter: Zu jeder Aufgabe gibt es dort Tipps, die helfen, einen Ansatz zu finden, ohne die Lösung vorwegzunehmen.

Wie arbeitet man mit diesem Buch

Am Anfang jedes Kapitels finden Sie eine kurze Übersicht über die jeweiligen Themen. Die einzelnen Kapitel bauen zwar aufeinander auf, doch ist es nicht zwingend notwendig, das Buch der Reihe nach durchzuarbeiten. Die Aufgaben sind in der Regel in ihrer Schwierigkeit gestaffelt. Von fast jeder Aufgabe gibt es mehrere Variationen zum Vertiefen.
Die Lösungen für Gleichungssysteme sind in der Regel für das Rechnen «mit der Hand» angegeben, sie können aber selbstverständlich auch mit dem GTR gelöst werden.

Der Lehrplan des Technischen Gymnasiums (TG) unterscheidet sich in der Linearen Algebra von dem der anderen beruflichen Gymnasien. Die entsprechenden Kapitel sind in der Kopfzeile entsprechend gekennzeichnet.

In der Mitte des Buches finden Sie den blauen Tippteil mit Denk- und Lösungshilfen.
Die Lösungen mit ausführlichen verständlichen Lösungswegen bilden den dritten Teil des Übungsbuchs. Hier finden Sie die notwendigen Formeln, Rechenverfahren und Denkschritte sowie alternative Lösungswege.

Lehrplanübersicht über die Jahrgangsstufen 1 und 2

Analysis

- Funktionenklassen:
  Potenzfunktionen, Polynomfunktionen, Exponentialfunktionen, trigonometrische Funktionen, abschnittsweise definierte Funktionen (beim Modellieren realer Vorgänge)
- Ableitungen, Ermittlung von Stammfunktionen, Zusammenhang von f, f' und f'', Kurven und Kurvenscharen, Tangenten und Normalen, Ortskurven, Aufstellen von Funktionen
- Optimierungsprobleme (Extremwertaufgaben)
- Integralrechnung (Flächen- und Volumenberechnung)

Lineare Algebra (AG, BTG, EG, SG, WG)

Agrarwissenschaftliches-, Ernährungswissenschaftliches-, Sozialpädagogisches- und Wirtschaftswissenschaftliches Gymnasium.

- Gleichungssysteme
- Schwerpunktthema, je nach Schulart / Klasse wird ein Thema behandelt:
  - Wirtschaftliche Anwendungen
    Matrizen, Mehrstufige Produktionsprozesse, das Leontief-Modell
  - Vektorielle Geometrie
    Geraden und Ebenen, Lagebeziehungen, Schnitt- und Abstandsberechnungen
  - Lineare Optimierung
    Zielfunktion, Nebenbedingungen, grafische Lösung, der Simplex-Algorithmus.

Lineare Algebra (TG)

Technisches Gymnasium

- Gleichungssysteme
- Geraden und Ebenen, Spurpunkte, Lagebeziehungen, Schnittprobleme
- Skalarprodukt: Länge, Winkel, Orthogonalität

Stochastik

- Zufallsexperimente, Baumdiagramme, Ereignisse, Bedingte Wahrscheinlichkeiten, Unabhängigkeit von Ereignissen
- Zufallsvariablen, Erwartungswert, Standardabweichung.

Der Aufbau des Mathematik-Abiturs für das AG, BTG, EG, SG, WG

In der Prüfung sind **drei** Aufgaben zu bearbeiten, je eine aus jeder der drei Stoffgruppen.

Gruppe	Gebiet	Aufgaben	Auswahl	Punkte	Zeit
I	Analysis	A und B	Lehrer	45	120
II	Lineare Algebra und Stochastik • wirtschaftliche Anwendungen • Vektorielle Geometrie • Lineare Optimierung	A und B	Schüler	30	80
III	Anwendungsorientierte Aufgaben	A, B und C	Schüler	15	40

Der Aufbau des Mathematik-Abiturs für das TG

In der Prüfung sind **drei** Aufgaben zu bearbeiten, je eine aus jeder der drei Stoffgruppen.

Gruppe	Gebiet	Aufgaben	Auswahl	Punkte	Zeit
I	Analysis	A und B	Lehrer	45	120
II	Lineare Algebra und Stochastik	A und B	Schüler	30	80
III	Anwendungsorientierte Aufgaben	A, B und C	Schüler	15	40

Allgemeine Hinweise

Die Aufgaben für das TG unterscheiden sich also nur in der Gruppe II (Lineare Algebra und Stochastik) von den anderen beruflichen Gymnasien.

Die gesamte Prüfungszeit beträgt 270 Minuten, davon sind 30 Minuten Einlesezeit.

Allen Schülern, die sich auf das Abitur vorbereiten, wünschen wir viel Erfolg.

Helmut Gruber, Robert Neumann

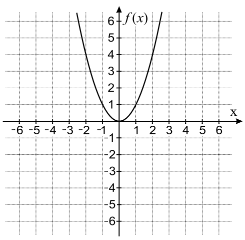
Inhaltsverzeichnis

Analysis

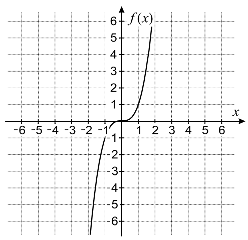
1 Von der Gleichung zur Kurve

Tipps ab Seite 81, Lösungen ab Seite 113

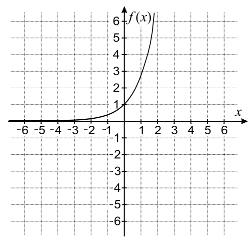
In diesem Kapitel geht es um die Grundfunktionen und ihre Verschiebung, Streckung und Spiegelung. Dazu sollten Sie die Schaubilder der wichtigsten Grundfunktionen kennen. Es handelt sich um:



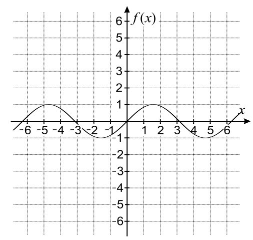
$f(x) = x^2$



$f(x) = x^3$



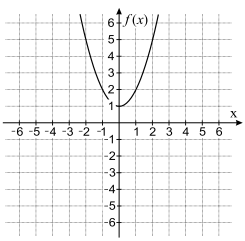
$f(x) = e^x$



$f(x) = \sin x$

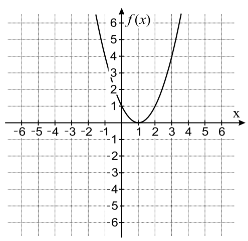
Diese Grundfunktionen lassen sich verschieben und strecken:

Beispiel: Die Parabel $f(x) = x^2$



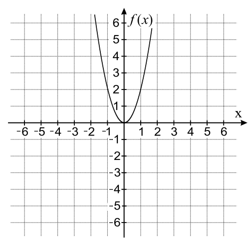
$f(x) = x^2 + 1$

Verschiebung um 1 LE in y-Richtung: das absolute Glied ist 1.



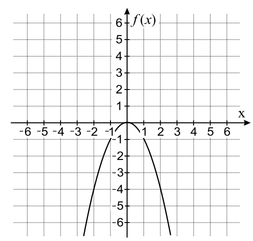
$f(x) = (x-1)^2$

Verschiebung um 1 LE in y-Richtung: x wird ersetzt durch $(x-1)$



$f(x) = 2 \cdot x^2$

Streckung in y-Richtung um den Faktor 2. Die Funktionsgleichung wird mit 2 multipliziert.



$f(x) = -x^2$

Spiegelung an der x-Achse: Die Funktionsgleichung wird mit -1 multipliziert.

Weitere Variationen können sein:

- Spiegelung an der y-Achse: Hierzu wird x ersetzt durch $(-x)$
- Stauchen in x-Richtung: Hierzu wird x ersetzt durch $a \cdot x$. Das Schaubild wird bei einem Faktor, der größer als 1 ist, gestaucht, d.h. in x-Richtung «kürzer» und bei einem Faktor, der kleiner als 1 ist, gestreckt, d.h. in x-Richtung «länger».

Tipp: Skizzieren Sie zuerst das Schaubild der zugehörigen Grundfunktion und anschließend schrittweise eine eventuelle Spiegelung, Streckung/Stauchung sowie die Verschiebungen in x-bzw. y-Richtung.

1.1 Ganzrationale Funktionen

Skizzieren Sie die Schaubilder folgender Funktionen und bestimmen Sie die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.

a) $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ b) $f(x) = -\frac{3}{4}x$ c) $f(x) = -x + 1$

d) $f(x) = (x-1)^2 - 4$ e) $f(x) = -x^2 + 4$ f) $f(x) = -(x+1)^2 + 1$

g) $f(x) = (x-1)^3 + 1$ h) $f(x) = -(x+1)^3$ i) $f(x) = 2x^3 - 2$

1.2 Trigonometrische Funktionen

Skizzieren Sie die Schaubilder folgender Funktionen und geben Sie jeweils die Periode an.

a) $f(x) = 2\sin x$ b) $f(x) = \frac{1}{2}\cos x$ c) $f(x) = \sin(2x)$

d) $f(x) = -\sin(2x) + 1$ e) $f(x) = \sin(x+1)$ f) $f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{3}{2}$

1.3 Exponentialfunktionen

Skizzieren Sie das Schaubild folgender Funktionen und bestimmen Sie jeweils die Asymptote.

a) $f(x) = e^{x-1} + 1$ b) $f(x) = -e^{x-1} + 1$ c) $f(x) = e^{-(x-1)} + 2$

d) $f(x) = -e^{-x+1} + 1$

Tipps – Analysis

1 Von der Gleichung zur Kurve

1.1 Ganzrationale Funktionen

Den Schnittpunkt mit der y-Achse erhalten Sie durch Einsetzen von $x = 0$ in $f(x)$, die Schnittpunkte mit der x-Achse erhalten Sie durch Lösen der Gleichung $f(x) = 0$.
Zuerst wird gespiegelt und gestreckt, anschließend verschoben (Reihenfolge beachten!).

a) - c) Die Schaubilder sind Geraden. Hat eine Gerade die Gleichung $y = mx + b$, so ist b der y-Achsenabschnitt und m die Steigung der Geraden.

d) - i) Die Schaubilder sind Variationen der Schaubilder der beiden Grundfunktionen $f(x) = x^2$ (Parabel) oder $g(x) = x^3$ (kubische Parabel).

1.2 Trigonometrische Funktionen

Die Schaubilder sind Variationen der Grundfunktionen $f(x) = \sin x$ bzw. $g(x) = \cos x$.
Ist $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x - c)) + d$ bzw. $g(x) = a \cdot \cos(b \cdot (x - c)) + d$, so gibt es folgende Verwandlungen:
a: Streckfaktor in y-Richtung; $a < 0$: zusätzlich Spiegelung an der x-Achse.
b: Streckfaktor in x-Richtung.
$c > 0$ bzw. $c < 0$: Verschiebung nach rechts bzw. links.
$d > 0$ bzw. $d < 0$: Verschiebung nach oben bzw. unten.
Periode: $p = \frac{2\pi}{b}$.

1.3 Exponentialfunktionen

Zur Bestimmung der Asymptoten betrachten Sie $f(x)$ für $x \to \pm\infty$.
Die Schaubilder sind Variationen der Grundfunktionen $f(x) = e^x$ bzw. $g(x) = e^{-x}$.
Ist $f(x) = a \cdot e^{x-b} + c$ bzw. $g(x) = a \cdot e^{-(x-b)} + c$, so gibt es folgende Verwandlungen:
a: Streckfaktor in y-Richtung; $a < 0$: zusätzlich Spiegelung an der x-Achse.
$b > 0$ bzw. $b < 0$: Verschiebung nach rechts bzw. links.
$c > 0$ bzw. $c < 0$: Verschiebung nach oben bzw. unten.

2 Aufstellen von Funktionen mit Randbedingungen

2.1 Ganzrationale Funktionen

Für alle ganzrationalen Funktionen gilt:

- Parabel 2. Grades: $f(x) = ax^2 + bx + c$
- Zur y-Achse symmetrische Parabel 2. Grades: $f(x) = ax^2 + b$
- Parabel 3. Grades: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
- Zum Ursprung punktsymmetrische Parabel 3. Grades: $f(x) = ax^3 + bx$

Lösungen

Analysis

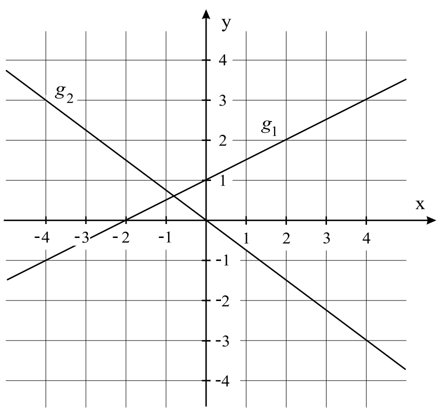
1 Von der Gleichung zur Kurve

1.1 Ganzrationale Funktionen

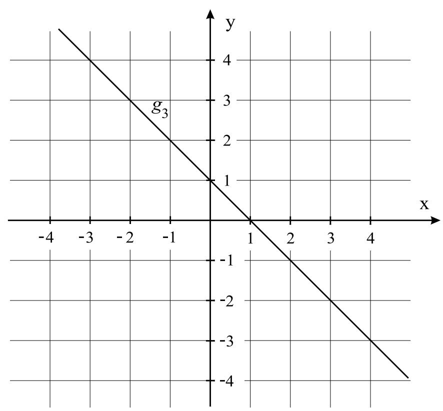
a) $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$
Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = \frac{1}{2} \cdot 0 + 1 = 1 \Rightarrow \mathrm{S}\,(0 \mid 1)$
Schnittpunkt mit der x-Achse: $f(x) = 0$ bzw. $\frac{1}{2}x + 1 = 0$ führt zu $x = -2 \Rightarrow \mathrm{N}\,(-2 \mid 0)$
Es handelt sich um eine Gerade mit y-Achsenabschnitt $b = 1$ und Steigung $m = \frac{1}{2}$.

b) $f(x) = -\frac{3}{4}x$
Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = -\frac{3}{4} \cdot 0 = 0 \Rightarrow \mathrm{S}\,(0 \mid 0)$
Schnittpunkt mit der x-Achse: $f(x) = 0$ bzw. $-\frac{3}{4}x = 0$ führt zu $x = 0 \Rightarrow \mathrm{N}\,(0 \mid 0)$.
Es handelt sich um eine Ursprungsgerade (Gerade durch den Koordinatenursprung) mit y-Achsenabschnitt $b = 0$ und Steigung $m = -\frac{3}{4}$.

c) $f(x) = -x + 1$
Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = -1 \cdot 0 + 1 = 1 \Rightarrow \mathrm{S}\,(0 \mid 1)$
Schnittpunkt mit der x-Achse: $f(x) = 0$ bzw. $-x + 1 = 0$ führt zu $x = 1 \Rightarrow \mathrm{N}\,(1 \mid 0)$
Es handelt sich um eine Gerade mit y-Achsenabschnitt $b = 1$ und Steigung $m = -1$.



a) g_1: $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$, b) g_2: $f(x) = -\frac{3}{4}x$

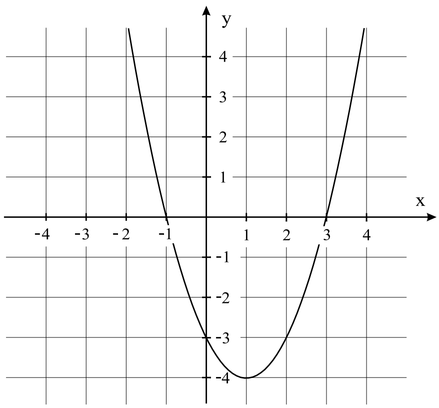


c) g_3: $f(x) = -x + 1$

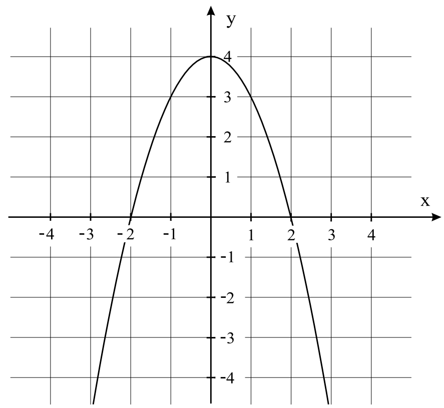
d) $f(x) = (x-1)^2 - 4$
Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = (0-1)^2 - 4 = -3 \Rightarrow \mathrm{S}\,(0 \mid -3)$
Schnittpunkt mit der x-Achse: $f(x) = 0$ bzw. $(x-1)^2 - 4 = 0$ führt zu $x_1 = 3$, $x_2 = -1 \Rightarrow \mathrm{N}_1(3 \mid 0)\,, \mathrm{N}_2(-1 \mid 0)$. Es handelt sich um eine Normalparabel, die um eine

LE nach rechts und 4 LE nach unten verschoben wurde, d.h. eine nach oben geöffnete Normalparabel mit Scheitel bei $(1 \mid -4)$.

e) $f(x) = -x^2 + 4$
Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = -0^2 + 4 = 4 \Rightarrow S(0 \mid 4)$
Schnittpunkt mit der x-Achse: $f(x) = 0$ bzw. $-x^2 + 4 = 0$ führt zu $x_1 = 2$, $x_2 = -2$
$\Rightarrow N_1(2 \mid 0), N_2(-2 \mid 0)$.
Es handelt sich um eine Normalparabel, die an der x-Achse gespiegelt und dann um vier LE nach oben verschoben wurde, d.h. eine nach unten geöffnete Normalparabel mit Scheitel $(0 \mid 4)$.



d) $f(x) = (x-1)^2 - 4$



e) $f(x) = -x^2 + 4$

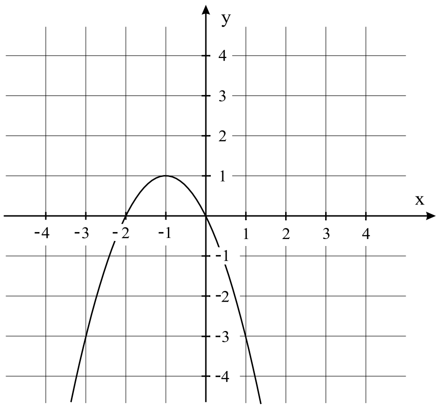
f) $f(x) = -(x+1)^2 + 1$
Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = -(0+1)^2 + 1 = 0 \Rightarrow S(0 \mid 0)$
Schnittpunkt mit der x-Achse: $f(x) = 0$ bzw. $f(x) = -(x+1)^2 + 1 = 0$ führt zu $x_1 = 0$, $x_2 = -2 \Rightarrow N_1(0 \mid 0), N_2(-2 \mid 0)$.
Es handelt sich um eine Normalparabel, die an der x-Achse gespiegelt und anschließend um eine LE nach links und eine LE nach oben verschoben wurde, d.h. eine nach unten geöffnete Normalparabel mit Scheitel $(-1 \mid 1)$.

g) $f(x) = (x-1)^3 + 1$
Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = (0-1)^3 + 1 = 0 \Rightarrow S(0 \mid 0)$
Schnittpunkt mit der x-Achse: $f(x) = 0$ bzw. $f(x) = (x-1)^3 + 1 = 0$ führt zu $x = 0 \Rightarrow N(0 \mid 0)$.
Es handelt sich um eine kubische Parabel, die um eine LE nach rechts und eine LE nach oben verschoben wurde.

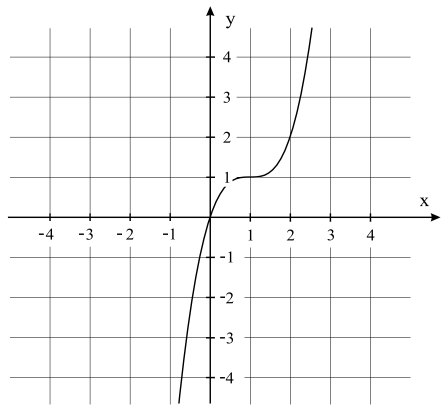
h) $f(x) = -(x+1)^3$
Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = -(0+1)^3 = -1 \Rightarrow S(0 \mid -1)$
Schnittpunkt mit der x-Achse: $f(x) = 0$ bzw. $f(x) = -(x+1)^3 = 0$ führt zu $x = -1$
$\Rightarrow N(-1 \mid 0)$.

Es handelt sich um eine kubische Parabel, die an der x-Achse gespiegelt und anschließend um eine LE nach links verschoben wurde.

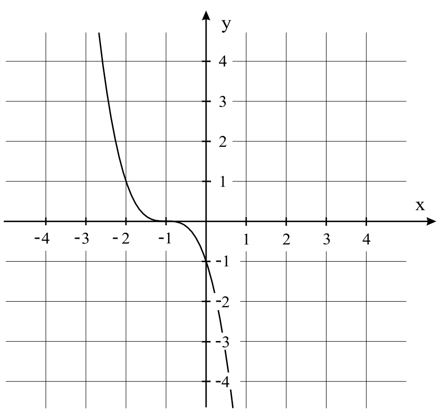
i) $f(x) = 2x^3 - 2$
Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = 2 \cdot 0^3 - 2 = -2 \Rightarrow S(0 \mid -2)$.
Schnittpunkt mit der x-Achse: $f(x) = 0$ bzw. $f(x) = 2x^3 - 2 = 0$ führt zu $x = 1$
$\Rightarrow$ $N(1 \mid 0)$. Es handelt sich um eine kubische Parabel, die mit Faktor 2 in y-Richtung gestreckt und um zwei LE nach unten verschoben wurde.



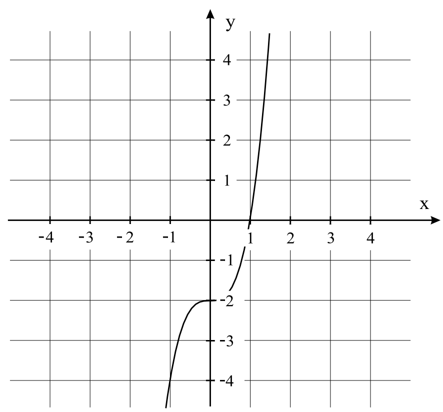
f) $f(x) = -(x+1)^2 + 1$



g) $f(x) = (x-1)^3 + 1$



h) $f(x) = -(x+1)^3$



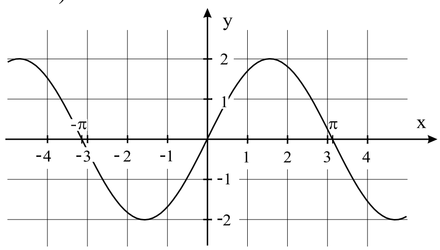
i) $f(x) = 2x^3 - 2$

1.2 Trigonometrische Funktionen

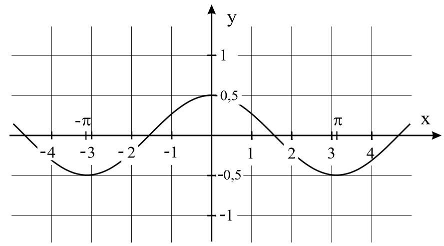
a) $f(x) = 2\sin x$
Periode: $p = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$.
Das Schaubild der Funktion $g(x) = \sin x$ wurde mit Faktor 2 in y-Richtung gestreckt.

b) $f(x) = \frac{1}{2}\cos x$
Periode: $p = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$.

Das Schaubild von $g(x) = \cos x$ wurde mit Faktor $\frac{1}{2}$ in y-Richtung gestaucht (bzw. gestreckt).



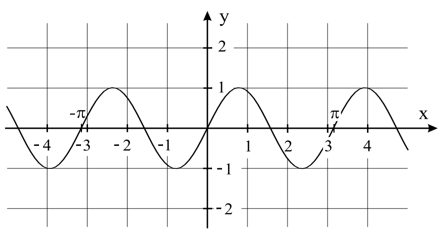
a) $f(x) = 2\sin x$



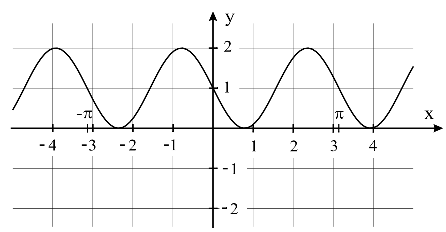
b) $f(x) = \frac{1}{2}\cos x$

c) $f(x) = \sin(2x)$
Periode: $p = \frac{2\pi}{2} = \pi$.
Das Schaubild der Funktion $g(x) = \sin x$ wurde mit Faktor 2 in x-Richtung gestaucht.

d) $f(x) = -\sin(2x) + 1$
Periode: $p = \frac{2\pi}{2} = \pi$.
Das Schaubild der Funktion $g(x) = \sin x$ wurde an der x-Achse gespiegelt, mit Faktor 2 in x-Richtung gestaucht und um eine LE nach oben verschoben.



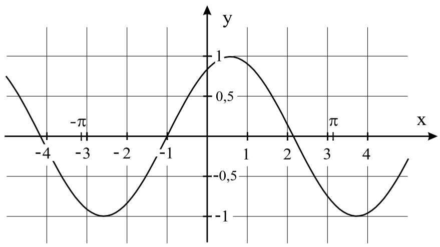
c) $f(x) = \sin(2x)$



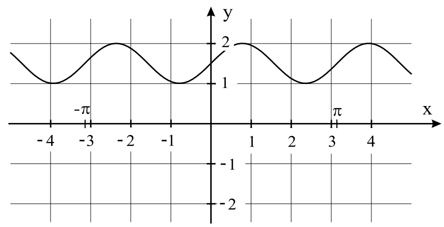
d) $f(x) = -\sin(2x) + 1$

e) $f(x) = \sin(x+1)$
Periode: $p = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$.
Das Schaubild der Funktion $g(x) = \sin x$ wurde um eine LE nach links verschoben.

f) $f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{3}{2}$
Periode: $p = \frac{2\pi}{2} = \pi$.
Das Schaubild der Funktion $g(x) = \sin x$ wurde in x-Richtung mit Faktor 2 und in y-Richtung mit Faktor $\frac{1}{2}$ gestaucht, anschließend wurde es um $\frac{3}{2}$ LE nach oben verschoben.



e) $f(x) = \sin(x+1)$



f) $f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{3}{2}$

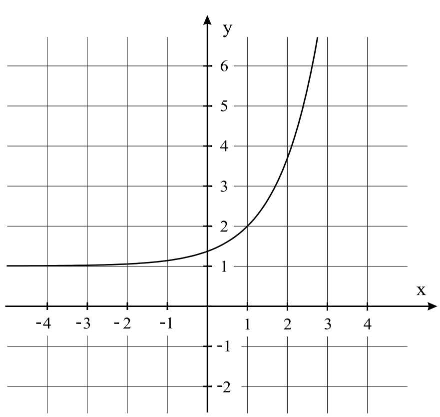
1.3 Exponentialfunktionen

a) $f(x) = e^{x-1} + 1$
Asymptote: $x \to -\infty$ führt zu $y = 1$ (waagerechte Asymptote).
Das Schaubild der Funktion $g(x) = e^x$ wurde um eine LE nach rechts und eine LE nach oben verschoben.

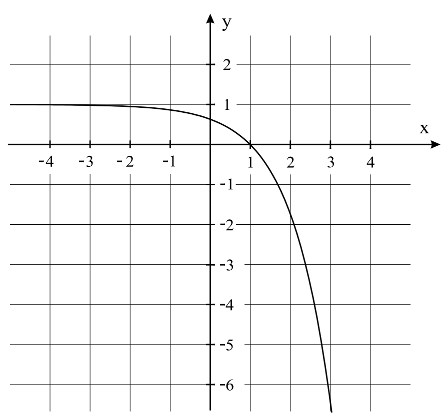
b) $f(x) = -e^{x-1} + 1$
Asymptote: $x \to -\infty$ führt zu $y = 1$ (waagerechte Asymptote).
Das Schaubild der Funktion $g(x) = e^x$ wurde an der x-Achse gespiegelt und anschließend um eine LE nach rechts und eine LE nach oben verschoben.

c) $f(x) = e^{-(x-1)} + 2$
Asymptote: $x \to \infty$ führt zu $y = 2$ (waagerechte Asymptote).
Das Schaubild der Funktion $g(x) = e^{-x}$ wurde um eine LE nach rechts und zwei LE nach oben verschoben.

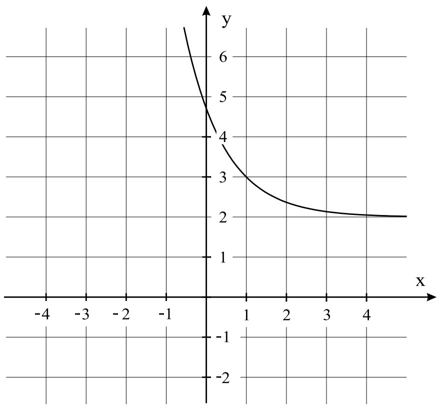
d) $f(x) = -e^{-x+1} + 1 = -e^{-(x-1)} + 1$
Asymptote: $x \to \infty$ führt zu $y = 1$ (waagerechte Asymptote).
Das Schaubild der Funktion $g(x) = e^{-x}$ wurde an der x-Achse gespiegelt und anschließend um eine LE nach rechts und eine LE nach oben verschoben.



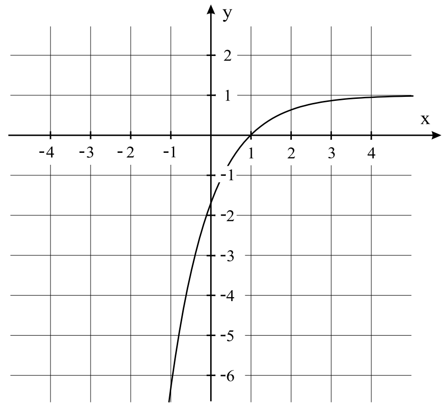
a) $f(x) = e^{x-1} + 1$



b) $f(x) = -e^{x-1} + 1$



c) $f(x) = e^{-(x-1)} + 2$



d) $f(x) = -e^{-x+1} + 1$