Gruber I Neumann

Erfolg im Mathe-Abi 2010

Übungsbuch für den Pflichtteil
Baden-Württemberg
mit Tipps und Lösungen

Freiburger Verlag

Vorwort

Erfolg von Anfang an

Das vorliegende Übungsbuch ist speziell auf die grundlegenden Anforderungen des Pflichtteils des Mathematik-Abiturs in Baden-Württemberg abgestimmt. Es umfasst die zwei großen Themenbereiche Analysis und Geometrie sowie die Original-Abituraufgaben seit 2004 in einem Buch.

Der Pflichtteil besteht aus mehreren kleinen Aufgaben, die ohne Taschenrechner und ohne Formelsammlung gelöst werden müssen. Genau hierfür wurde das vorliegende Buch konzipiert: Es fördert das Grundwissen und die Grundkompetenzen in Mathematik, vom einfachen Rechnen und Formelanwenden bis zum Verstehen von gedanklichen Zusammenhängen. Das Übungsbuch ist eine Hilfe zum Selbstlernen (learning by doing) und bietet die Möglichkeit, sich intensiv auf die Prüfung vorzubereiten und gezielt Themen zu vertiefen. Hat man Erfolg bei den grundlegenden Aufgaben, machen Mathematik und das Lernen wieder mehr Spaß.

Der blaue Tippteil

Manchmal hat man keine Idee, wie man eine Aufgabe angehen soll bzw. es fehlt der Lösungsansatz. Hier hilft der blaue Tippteil in der Mitte des Buches weiter: Zu jeder Aufgabe gibt es dort Tipps, die helfen, einen Ansatz zu finden, ohne die Lösung vorwegzunehmen.

Wie arbeitet man mit diesem Buch

Am Anfang jedes Kapitels finden Sie eine kurze Übersicht über die jeweiligen Themen. Die einzelnen Kapitel bauen zwar aufeinander auf, doch ist es nicht zwingend notwendig, das Buch der Reihe nach durchzuarbeiten. Die Aufgaben sind in der Regel in ihrer Schwierigkeit gestaffelt. Von fast jeder Aufgabe gibt es mehrere Variationen zum Vertiefen.
In der Mitte des Buches finden Sie den blauen Tippteil mit Denk- und Lösungshilfen.
Die Lösungen mit ausführlichen verständlichen Lösungswegen bilden den dritten Teil des Übungsbuchs. Hier finden Sie die notwendigen Formeln, Rechenverfahren und Denkschritte sowie manchmal alternative Lösungswege.
Anspruchsvolle Aufgaben sind mit einem Sternchen * gekennzeichnet.

Im Anhang ab Seite 225 finden sich die Abituraufgaben ab 2004 mit Tipps und ausführlichen Lösungen.

Der Aufbau des Mathematik-Abiturs

- Die gesamte Prüfungszeit beträgt 240 Minuten (4 Zeitstunden).
- Der Lehrer erhält vor der Prüfung den Pflichtteil und für den Wahlteil drei Aufgabenvorschläge aus der Analysis und zwei aus der Geometrie. Er wählt aus den Vorschlägen für den Wahlteil je einen aus.
- Der Schüler erhält am Beginn der Prüfung alle Aufgaben (den Pflichtteil und den vom Lehrer ausgesuchten Wahlteil Analysis und Geometrie). Er erhält zu diesem Zeitpunkt noch keine Hilfsmittel.
- Er bearbeitet zuerst den Pflichtteil (Richtzeit: 80 Min.), dann gibt er den Pflichtteil ab und erhält die Hilfsmittel (Taschenrechner, Formelsammlung) für den Wahlteil.

Insgesamt können maximal 60 Verrechnungspunkte in der Prüfung erzielt werden, davon 26 im Pflichtteil und 34 im Wahlteil. Wer den Pflichtteil vollständig richtig bearbeitet hat und im Wahlteil mindestens einen Verrechnungspunkt erhält, bekommt die Note ausreichend (5 Notenpunkte).

Allen Schülern, die sich auf das Abitur vorbereiten, wünschen wir viel Erfolg.

Helmut Gruber, Robert Neumann

Inhaltsverzeichnis

Geometrie

11 Rechnen mit Vektoren

Tipps ab Seite 103, Lösungen ab Seite 183

In diesem Kapitel geht es darum, die Grundkenntnisse des Rechnens mit Vektoren zu wiederholen. Dazu gehören die Addition und Subtraktion von Vektoren. Neben diesen Rechenoperationen ist es wichtig, das Skalarprodukt zu kennen und zu wissen, dass es genau dann gleich Null ist, wenn zwei Vektoren senkrecht aufeinander stehen.

Da mit den Vektoren geometrische Objekte wie Dreiecke, Parallelogramme und verschiedene Körper beschrieben werden können, sollten Sie die grundlegenden Eigenschaften dieser Objekte kennen, z.B. dass in einem gleichschenklichen Dreieck zwei Seiten die gleiche Länge haben. Rechenregeln für das Rechnen mit Vektoren finden Sie bei den Tipps auf Seite *103*. Wenn nicht anders angegeben gilt für alle Parameter: $r, s, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

11.1 Addition und Subtraktion von Vektoren

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie:

a) $\vec{a}+\vec{b}$ b) $\vec{a}-\vec{b}$ c) $2\cdot\vec{a}$ d) $-\vec{a}$ e) $2\vec{a}+3\vec{b}$

f) $\vec{a}\cdot\vec{b}$ g) $|\vec{a}|$ h) $|\vec{b}|$ i) $|\vec{a}+\vec{b}|$

11.2 Orthogonalität von Vektoren

Prüfen Sie, ob folgende Vektoren senkrecht (orthogonal) aufeinander stehen.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ b) $\vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

c) $\vec{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

11.3 Auffinden von orthogonalen Vektoren

Geben Sie drei verschiedene Vektoren an, die zu $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ orthogonal sind.

11.4 Orts- und Verbindungsvektoren

Gegeben sind die Punkte $A\,(2 \mid 3 \mid 2)$, $B\,(7 \mid 4 \mid 3)$ und $C\,(1 \mid 5 \mid -2)$.

a) Bestimmen Sie die Ortsvektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, und $\vec{c}$.

b) Bestimmen Sie die Verbindungsvektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{BC}$.

c) Ist jeder Verbindungsvektor ein Ortsvektor? Begründen Sie Ihre Antwort.

11.5 Verschiedene Aufgaben

Tipp: Fertigen Sie eine Skizze an und stellen Sie Vektorketten auf.

a) Prüfen Sie, ob das Dreieck ABC gleichschenklig ist:

I) $A\,(3 \mid 7 \mid 2)$, $B\,(-1 \mid 5 \mid 1)$, $C\,(2 \mid 3 \mid 0)$

II) $A\,(-5 \mid 2 \mid -1)$, $B\,(0 \mid 5 \mid -3)$, $C\,(-1 \mid 6 \mid -3)$

b) Prüfen Sie, ob das Dreieck ABC rechtwinklig ist:
$A\,(5 \mid 1 \mid 0)$, $B\,(1 \mid 5 \mid 2)$, $C\,(-1 \mid 1 \mid 6)$

c) I) Bestimmen Sie den Mittelpunkt M von $A\,(4 \mid 1 \mid 3)$ und $B\,(-2 \mid 5 \mid -5)$.

II) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes P so, dass $B\,(4 \mid 2 \mid 5)$ der Mittelpunkt von $A\,(3 \mid -1 \mid -4)$ und P ist.

d) Bestimmen Sie jeweils den Schwerpunkt des Dreiecks:

I) $A(4 \mid 1 \mid 2)$, $B(5 \mid 3 \mid 0)$, $C(0 \mid 2 \mid 1)$

II) $P(-3 \mid 2 \mid 4)$, $Q(5 \mid 1 \mid 2)$, $R(-5 \mid 3 \mid 6)$

e) Gegeben sind die Punkte $A\,(4 \mid 2 \mid 3)$, $B\,(1 \mid 8 \mid 5)$ und $C\,(-2 \mid 1 \mid -3)$.

I) Bestimmen Sie den Punkt D so, dass das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist.

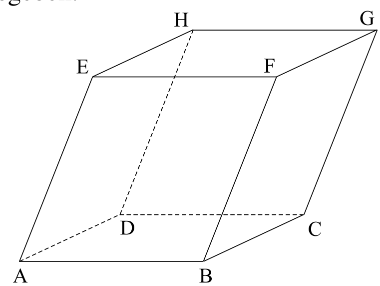
II) Bestimmen Sie den Punkt D^* so, dass das Viereck ABD^*C ein Parallelogramm ist.

III) Bestimmen Sie den Punkt D' so, dass das Viereck $AD'BC$ ein Parallelogramm ist.

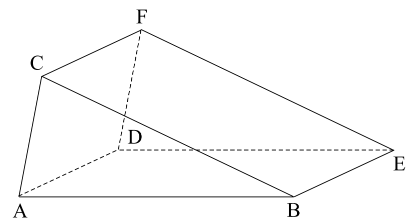
f) Von einem Spat (Körper mit jeweils 4 parallelen Kanten) sind die Punkte $A(3\mid 1\mid 4)$, $B(-2\mid 1\mid -3)$, $C(5\mid -2\mid 3)$ und $F(9\mid 2\mid 6)$ gegeben.

I) Bestimmen Sie die Koordinaten der übrigen Punkte des Spats.

II) Berechnen Sie die Länge der Raumdiagonalen AG.



g) Ein schiefes Dreiecksprisma ist gegeben durch die Punkte $A(4\mid 1\mid -3)$, $B(5\mid -2\mid -1)$, $C(-1\mid 3\mid -2)$ und $D(7\mid 4\mid 2)$.
Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte E und F sowie die Länge der Kante EF.



11.6 Teilverhältnisse

Gegeben sind die Punkte $A(3\mid -1\mid 2)$ und $B(5\mid -2\mid 0)$.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes S so, dass S die Strecke AB innen im Verhältnis 1 : 2 teilt.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes T so, dass T die Strecke AB innen im Verhältnis 5 : 4 teilt.

c) In welchem Verhältnis teilt der Punkt $U(4,5\mid -1,75\mid 0,5)$ die Strecke AB?

11.7 Lineare Abhängigkeit / Unabhängigkeit

Wenn zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear abhängig sind, bedeutet das, dass sie ein Vielfaches voneinander sind: $\vec{a} = k\cdot\vec{b}$ mit $k \in \mathbb{R}$, es muss also immer einen Faktor geben, mit dem man einen der beiden Vektoren multiplizieren kann, so dass sich der andere ergibt.

Sind drei Vektoren linear abhängig, dann liegen sie in einer Ebene. Das bedeutet, dass man einen der drei Vektoren als «Linearkombination» der beiden andern ausdrücken kann. Man prüft aber in diesem Fall die Situation, dass man die drei Vektoren aneinanderhängt, so dass sie den Nullvektor ergeben. Anschaulich gesprochen will man «im Kreis» gehen und wieder am Ausgangspunkt ankommen: $r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c} = \vec{0}$... Sind die Vektoren linear abhängig, gibt es dafür unendlich viele Lösungen. Sind sie linear unabhängig, müssen die Koeffizienten r, s und t gleich Null sein, denn nur so kann man «wieder am Ausgangspunkt ankommen». Man stellt also ein Gleichungssystem auf und bestimmt r, s und t.

a) Prüfen Sie, ob die beiden Vektoren linear abhängig oder unabhängig sind:

I) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ II) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

III) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ IV) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$

b) Prüfen Sie, ob die drei angegebenen Vektoren linear abhängig oder unabhängig sind:

I) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

II) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$

III) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$

Geometrie

11 Rechnen mit Vektoren

11.1 Addition und Subtraktion von Vektoren

Für das Rechnen mit Vektoren gelten folgende Gesetze:

Addition: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{pmatrix}$ Subtraktion: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1-b_1 \\ a_2-b_2 \\ a_3-b_3 \end{pmatrix}$

Skalare Multiplikation: $s \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s\cdot a_1 \\ s\cdot a_2 \\ s\cdot a_3 \end{pmatrix}$ (Zahl · Vektor = Vektor), für $s \in \mathbb{R}$

Skalarprodukt: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$ (Vektor · Vektor = Zahl)

Betrag bzw. Länge: $\left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

11.2 Orthogonalität von Vektoren

Zwei Vektoren stehen genau dann senkrecht aufeinander, wenn das Skalarprodukt gleich Null ist. Ist das Skalarprodukt ungleich Null, dann sind die beiden Vektoren nicht orthogonal.

11.3 Auffinden von orthogonalen Vektoren

Es sind Vektoren zu suchen, deren Skalarprodukt mit $\vec{n}$ Null ergibt.

11.4 Orts- und Verbindungsvektoren

Ortsvektoren setzen am Ursprung $\mathrm{O}\,(0 \mid 0 \mid 0)$ an. Verbindungsvektoren zwischen zwei Punkten erhält man mit Hilfe der Ortsvektoren.

11.5 Verschiedene Aufgaben

a) Stellen Sie jeweils drei Verbindungsvektoren zwischen je zwei Punkten auf und berechnen Sie deren Länge.

b) Die Orthogonalität lässt sich mit dem Skalarprodukt überprüfen.

c) Tragen Sie in Ihre Skizze jeweils die gegebenen und gesuchten Punkte sowie den Ursprung O ein. Bestimmen Sie mit Hilfe einer Vektorkette den Ortsvektor des gesuchten Punktes. Geben Sie die Koordinaten des gesuchten Punktes an.

d) Den Schwerpunkt S eines Dreiecks ABC erhalten Sie mit der Formel $\vec{s} = \frac{1}{3} \cdot \left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)$.

e) Tragen Sie in Ihre Skizze die gegebenen und gesuchten Punkte sowie den Ursprung O ein. Achten Sie dabei auf die Reihenfolge der Punkte (*gegen* den Uhrzeigersinn). Bestimmen Sie mit Hilfe einer Vektorkette den Ortsvektor des gesuchten Punktes. Geben Sie die Koordinaten des gesuchten Punktes an.

f) Da je vier Kanten parallel sind, gilt
$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{EH}$ und $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{HG}$.
Bestimmen Sie mit Hilfe einer Vektorkette den Ortsvektor des gesuchten Punktes. Geben Sie die Koordinaten des gesuchten Punktes an.

g) Tragen Sie in Ihre Skizze die gegebenen und gesuchten Punkte sowie den Ursprung O ein. Bestimmen Sie mit Hilfe einer Vektorkette den Ortsvektor des gesuchten Punktes. Geben Sie die Koordinaten des gesuchten Punktes an. Die Länge einer Kante ist die Länge des Verbindungsvektors der beiden Eckpunkte.

11.6 Teilverhältnisse

a) - b) Erstellen Sie jeweils eine Skizze und stellen Sie eine geeignete Vektorkette für den Ortsvektor von S bzw. T auf.

c) Überlegen Sie, wo der Punkt U liegt, berechnen Sie die Längen der Vektoren $\overrightarrow{AU}$ und $\overrightarrow{UB}$ und teilen Sie die Ergebnisse durcheinander.

11.7 Lineare Abhängigkeit / Unabhängigkeit

a) Wenn zwei Vektoren linear abhängig sind, dann ist der eine Vektor ein Vielfaches des anderen, d.h. sie müssen eine Zahl k finden, so dass gilt $k \cdot \vec{a} = \vec{b}$; $k \in \mathbb{R}$.

b) Wenn drei Vektoren linear unabhängig sind, so hat der Nullvektor $\vec{0}$ eine eindeutige Darstellung als Linearkombination der drei Vektoren: Wählen Sie als Ansatz $r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c} = \vec{0}$ und berechnen r, s und t aus dem entstandenen Gleichungssystem. Ist die einzige Lösung $r = s = t = 0$, so sind $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear unabhängig.

12 Geraden

12.1 Aufstellen von Geradengleichungen

Verwenden Sie den Ortsvektor des einen Punktes als Stützvektor. Bilden Sie den Richtungsvektor, indem Sie den Verbindungsvektor zwischen den beiden Punkten aufstellen.

Geometrie

11 Rechnen mit Vektoren

11.1 Addition und Subtraktion von Vektoren

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) $\vec{a}+\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a}-\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ c) $2\cdot\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$

d) $-\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ e) $2\vec{a}+3\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix}$

f) $\vec{a}\cdot\vec{b} = (-1)\cdot 3 + 2\cdot 1 + 4\cdot 2 = 7$

g) $|\vec{a}| = \sqrt{(-1)^2+2^2+4^2} = \sqrt{1+4+16} = \sqrt{21}$

h) $|\vec{b}| = \sqrt{3^2+1^2+2^2} = \sqrt{14}$

i) $|\vec{a}+\vec{b}| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{2^2+3^2+6^2} = \sqrt{49} = 7$

11.2 Orthogonalität von Vektoren

a) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1)\cdot 2 + 0\cdot 2 + 1\cdot 0 = -2 \Rightarrow \vec{a}$ steht nicht orthogonal auf $\vec{b}$.

b) $\vec{r}\cdot\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = 5\cdot 2 + (-1)\cdot 1 + 3\cdot(-3) = 0 \Rightarrow \vec{r}$ steht orthogonal auf $\vec{n}$.

c) $\vec{z}\cdot\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\cdot 1 + (-2)\cdot 3 + 4\cdot 1 = 0 \Rightarrow \vec{z}$ steht orthogonal auf $\vec{w}$.

11.3 Auffinden von orthogonalen Vektoren

Es sind Vektoren zu bestimmen, deren Skalarprodukt mit $\vec{n}$ Null ergibt. Dazu kann man zwei Komponenten des Vektors frei wählen, die dritte ergibt sich dann, z.B.:

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\-2\\0\end{pmatrix}, \text{ denn } \vec{a}\cdot\vec{n}=\begin{pmatrix}4\\-2\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}=4\cdot1+(-2)\cdot2+0\cdot(-3)=4-4=0$$

$$\vec{b}=\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}, \text{ denn } \vec{b}\cdot\vec{n}=\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}=0\cdot1+3\cdot2+2\cdot(-3)=6-6=0$$

$$\vec{c}=\begin{pmatrix}5\\-1\\1\end{pmatrix}, \text{ denn } \vec{c}\cdot\vec{n}=\begin{pmatrix}5\\-1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}=5\cdot1+(-1)\cdot2+1\cdot(-3)=5-2-3=0$$

11.4 Orts- und Verbindungsvektoren

Gegeben sind die Punkte A $(2 \mid 3 \mid 2)$, B $(7 \mid 4 \mid 3)$ und C $(1 \mid 5 \mid -2)$.

a) $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}7\\4\\3\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}1\\5\\-2\end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}=\begin{pmatrix}7\\4\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\1\\1\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AC}=\vec{c}-\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\5\\-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\\-4\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC}=\vec{c}-\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\5\\-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7\\4\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\1\\-5\end{pmatrix}$$

c) Nein, ein Verbindungsvektor verbindet zwei beliebige Punkte. Ein Ortsvektor geht immer vom Ursprung zu einem Punkt.

11.5 Verschiedene Aufgaben

a) I) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, es ist $\overline{AB} = \overline{AC} = \sqrt{21}$,

damit ist das Dreieck gleichschenklig.

II) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, es ist $\overline{AB} = \sqrt{38}$, $\overline{AC} = 6$

und $\overline{BC} = \sqrt{2}$, damit ist das Dreieck nicht gleichschenklig.

b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$

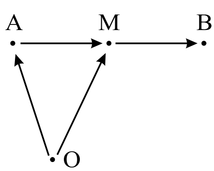
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = 24 + 0 + 12 = 36$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = 8 - 16 + 8 = 0$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = 12 + 0 + 24 = 36$$

Da das Skalarprodukt von $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$ gleich Null ist, stehen diese beiden Vektoren senkrecht aufeinander, d.h. das Dreieck ABC hat bei B einen rechten Winkel.

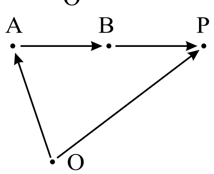
c) I)



$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow M(1 \mid 3 \mid -1)$

II)



$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow P(5 \mid 5 \mid 14)$

d) I) Den Schwerpunkt S des Dreiecks ABC mit A (4 | 1 | 2), B (5 | 3 | 0) und C (0 | 2 | 1) erhalten Sie mit der Formel

$$\vec{s} = \tfrac{1}{3} \cdot \left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right) = \tfrac{1}{3} \cdot \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \tfrac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

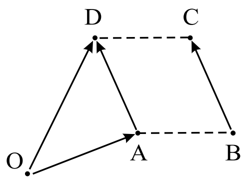
$\Rightarrow$ S (3 | 2 | 1).

II) Den Schwerpunkt S des Dreiecks PQR mit P (−3 | 2 | 4), Q (5 | 1 | 2) und R (−5 | 3 | 6) erhalten Sie mit der Formel

$$\vec{s} = \tfrac{1}{3} \cdot (\vec{p} + \vec{q} + \vec{r}) = \tfrac{1}{3} \cdot \left(\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}\right) = \tfrac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ S (−1 | 2 | 4).

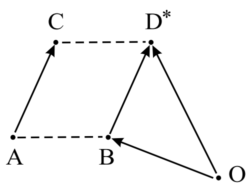
e) I)



$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ D (1 | −5 | −5)

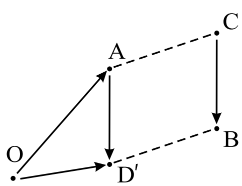
II)



$$\overrightarrow{OD^*} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ D* (−5 | 7 | −1)

III)



$$\overrightarrow{OD'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ D′ (7 | 9 | 11)

f) I) Es ergeben sich folgende mögliche Vektorketten:

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{D}\,(10 \mid -2 \mid 10)$$

$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BF} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{E}\,(14 \mid 2 \mid 13)$$

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BF} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -1 \\ 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{G}\,(16 \mid -1 \mid 12)$$

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{BF} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ -1 \\ 19 \end{pmatrix} \Rightarrow H(21 \mid -1 \mid 19)$$

II) Die Länge der Raumdiagonalen AG ist die Länge des Verbindungsvektors $\overrightarrow{AG}$:

$$AG = |\overrightarrow{AG}| = \left| \begin{pmatrix} 13 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{169+4+64} = \sqrt{237}\,\text{LE}.$$

g) Bei einem schiefen Dreiecksprisma sind folgende 3 Kanten parallel: AD, BE und CF $\Rightarrow$

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CF}$. Daher gilt: $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

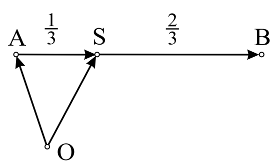
$\Rightarrow E(8 \mid 1 \mid 4)$

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow F(2 \mid 6 \mid 3)$$

Die Länge der Kante EF ist $|\overrightarrow{EF}| = \left| \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{36+25+1} = \sqrt{62}\,\text{LE}.$

11.6 Teilverhältnisse

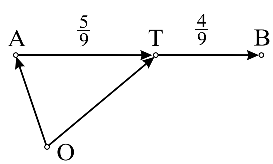
a)



Um die Koordinaten von S zu bestimmen, stellt man eine Vektorkette auf. Es ist:

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \tfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow S\left(\tfrac{11}{3} \mid -\tfrac{4}{3} \mid \tfrac{4}{3}\right).$$

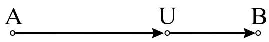
b)



Um die Koordinaten von T zu bestimmen, stellt man eine Vektorkette auf. Es ist:

$$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OA} + \tfrac{5}{9}\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \tfrac{5}{9} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{37}{9} \\ -\frac{14}{9} \\ \frac{8}{9} \end{pmatrix} \Rightarrow T\left(\tfrac{37}{9} \mid -\tfrac{14}{9} \mid \tfrac{8}{9}\right).$$

c) Der Punkt U liegt zwischen A und B, was anhand der einzelnen Koordinaten erkennbar ist.



Um das Teilverhältnis zu bestimmen, berechnet man die Längen der Vektoren $\overrightarrow{AU}$ und $\overrightarrow{UB}$ und teilt diese durcheinander. Es gilt:

$$\overline{AU} = |\overrightarrow{AU}| = \left|\begin{pmatrix} 1,5 \\ -0,75 \\ -1,5 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{1,5^2 + (-0,75)^2 + (-1,5)^2} = 2,25$$

$$\overline{UB} = |\overrightarrow{UB}| = \left|\begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,25 \\ -0,5 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{0,5^2 + (-0,25)^2 + (-0,5)^2} = 0,75$$

Somit gilt für das Teilverhältnis: $\frac{\overline{AU}}{\overline{UB}} = \frac{2,25}{0,75} = 3 = \frac{3}{1}$

Der Punkt U teilt die Strecke AB im Verhältnis 3 : 1.

11.7 Lineare Abhängigkeit/ Unabhängigkeit

a) I) Der Ansatz $k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ führt zu $\begin{aligned} 2k &= -4 \\ k &= -2 \\ -3k &= 6 \end{aligned}$ und damit zu $k = -2$,

d.h. $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind linear abhängig.

II) Der Ansatz $k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ führt zu $\begin{aligned} 2k &= -2 \\ 0 &= 1 \\ 3k &= -3 \end{aligned}$ und damit zu einem

Widerspruch, d.h. $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind linear unabhängig.

III) Der Ansatz $k \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ führt zu $\begin{aligned} 6k &= 2 \\ 3k &= 1 \\ -9k &= -3 \end{aligned}$ und damit zu $k = \frac{1}{3}$,

d.h. $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind linear abhängig.

IV) Der Ansatz $k \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$ führt zu $\begin{aligned} 4k &= 5 \\ -2k &= 1 \\ 3k &= 9 \end{aligned}$ und damit zu verschiedenen Werten für k, also sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear unabhängig.

b) I) Der Ansatz $r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ führt zu

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \text{I} & 2r & + & 4s & + & 3t & = & 0 \\ \text{II} & r & - & 2s & + & 5t & = & 0 \\ \text{III} & -3r & + & s & & & = & 0 \end{array}$$

Löst man das Gleichungssystem entsprechend Kapitel 5, so erhält man $s = 0$, $r = 0$ und $t = 0$, d.h. $\vec{a}$, $\vec{b}$, und $\vec{c}$ sind linear unabhängig.

II) Der Ansatz $r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ führt zu

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \text{I} & 4r & + & s & + & 6t & = & 0 \\ \text{II} & & & 3s & + & 6t & = & 0 \\ \text{III} & -2r & - & s & - & 4t & = & 0 \end{array}$$

Addiert man Gleichung I zum Zweifachen von Gleichung III, so ergibt sich

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \text{I} & 4r & + & s & + & 6t & = & 0 \\ \text{II} & & & 3s & + & 6t & = & 0 \\ \text{IIIa} & & & -s & - & 2t & = & 0 \end{array}$$

Nun erkennt man, dass Gleichung II das (-3)-fache von Gleichung IIIa ist, d.h. es gibt unendlich viele Lösungen, z.B. kann man $t = 1$ wählen, so ergibt sich $s = -2$ und $r = -1$. Damit gibt es Lösungen mit $r \neq 0$, $s \neq 0$ und $t \neq 0$, d.h. $\vec{a}$, $\vec{b}$, und $\vec{c}$ sind linear abhängig.

III) Der Ansatz $r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ führt zu

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \text{I} & -r & + & 5s & + & 3t & = & 0 \\ \text{II} & 3r & + & 2s & - & 4t & = & 0 \\ \text{III} & -2r & + & s & - & 3t & = & 0 \end{array}$$

Löst man das Gleichungssystem entsprechend Kapitel 5, so erhält man $r = 0$, $s = 0$ und $t = 0$, d.h. $\vec{a}$, $\vec{b}$, und $\vec{c}$ sind linear unabhängig.