Gruber I Neumann

Erfolg im Mathe-Abi

Band 1: Grundwissen
Berufliche Gymnasien
Baden-Württemberg

Übungsbuch mit Tipps und Lösungen

Freiburger Verlag

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Erfolg von Anfang an

...ist das Geheimnis eines guten Abiturs.

Das vorliegende Übungsbuch ist speziell auf die grundlegenden Anforderungen des Mathematik-Abiturs an beruflichen Gymnasien in Baden-Württemberg seit 2017 abgestimmt. Es umfasst die drei großen Themenbereiche Analysis, Stochastik und Vektorgeometrie/Matrizen.

Die meisten Aufgaben sind wie im hilfsmittelfreien Teil, der aus mehreren kleinen Aufgaben besteht, ohne Taschenrechner und ohne Formelsammlung zu lösen. Genau hierfür wurde das vorliegende Buch konzipiert: Es fördert das Grundwissen und die Grundkompetenzen in Mathematik, vom einfachen Rechnen und Formelanwenden bis hin zum Verstehen von gedanklichen Zusammenhängen. Das Übungsbuch ist eine Hilfe zum Selbstlernen (learning by doing) und bietet die Möglichkeit, sich intensiv auf die Prüfung vorzubereiten und gezielt Themen zu vertiefen. Hat man Erfolg bei den grundlegenden Aufgaben, machen Mathematik und das Lernen mehr Spaß.

Bei einigen Aufgaben ist es nötig, den Taschenrechner zu benutzen. Nicht bei allen Rechnerfunktionen ist gleich klar, wie sie aufgerufen werden.

Daher befinden sich im Buch QR-Codes auf die entsprechenden Videos, in denen die Funktionen des Tachenrechners kurz erklärt werden. Der QR-Code kann mit einer entsprechenden App gescannt werden. Alternativ lässt sich auch der Link unter dem Code benutzen.

Der Code neben diesem Text verweist beispielsweise auf ein Video zum Bestimmen der kumulierten Binomialverteilung.

frv.tv/df

MeinMatheAbi.de

Auf unserem Portal www.MeinMatheAbi.de finden Sie weiteres Material:

- Viele Lernvideos, in denen die grundlegenden Themen an einfachen Beispielen erklärt werden. Die entsprechenden Stellen sind im Buch mit einem Kamerasymbol gekennzeichnet.
- Lernkarten zum Online-Lernen und eine Lernkarten-App.
- Taschenrechneranleitungen

Der blaue Tippteil

Hat man keine Idee, wie man eine Aufgabe angehen soll, hilft der blaue Tippteil zwischen Aufgaben und Lösungen weiter: Zu jeder Aufgabe gibt es dort Tipps, die helfen, einen Ansatz zu finden, ohne die Lösung vorwegzunehmen.

Wie arbeiten Sie mit diesem Buch?

Am Anfang jedes Kapitels finden Sie eine kurze Übersicht über die jeweiligen Themen. Die einzelnen Kapitel bauen zwar aufeinander auf, doch ist es nicht zwingend notwendig, das Buch der Reihe nach durchzuarbeiten. Die Aufgaben sind in der Regel in ihrer Schwierigkeit gestaffelt. Von fast jeder Aufgabe gibt es mehrere Variationen zum Vertiefen.

Bereits durchgearbeitete Kapitel können Sie im Kästchen «abhaken». ☐

In der Mitte des Buches finden Sie den blauen Tippteil mit Denk- und Lösungshilfen.
Die Lösungen mit ausführlichen verständlichen Lösungswegen bilden den dritten Teil des Übungsbuchs. Hier finden Sie die notwendigen Formeln, Rechenverfahren und Denkschritte sowie manchmal alternative Lösungswege.

Allen Schülerinnen und Schülern, die sich auf das Abitur vorbereiten, wünschen wir viel Erfolg.

Helmut Gruber, Robert Neumann

Analysis

1 Strecken und Geraden ☐

Tipps ab Seite 83, Lösungen ab Seite 121

Im kartesischen Koordinatensystem können Streckenlängen berechnet und Geraden durch Gleichungen dargestellt werden. Ein wichtiger Begriff ist hierbei die Steigung, welche in der Analysis als Ableitung wieder auftaucht.

1.1 Länge, Mittelpunkt und Steigung ☐

Berechnen Sie jeweils die Länge, den Mittelpunkt und die Steigung folgender Strecken:

a) $\mathrm{P}(4 \mid 2)$, $\mathrm{Q}(7 \mid 6)$
b) $\mathrm{A}(4 \mid 1)$, $\mathrm{B}(5 \mid -3)$
c) $\mathrm{A}(4 \mid 2)$, $\mathrm{C}(-1 \mid -3)$
d) $\mathrm{B}(4 \mid -2)$, $\mathrm{D}(-2 \mid -6)$
e) $\mathrm{F}(-4 \mid -2)$, $\mathrm{S}(-1 \mid -8)$

1.2 Geradengleichungen ☐

Bestimmen Sie jeweils die Gleichung der Geraden:

a) Die Gerade g_1 hat die Steigung $m = 2$ und geht durch den Punkt $\mathrm{A}(4 \mid 3)$.

b) Die Gerade g_2 hat die Steigung $m = -\frac{2}{3}$ und geht durch den Punkt $\mathrm{P}(-6 \mid 5)$.

c) Die Gerade g_3 geht durch die Punkte $\mathrm{A}(4 \mid 2)$ und $\mathrm{B}(1 \mid 6)$.

d) Die Gerade g_4 geht durch den Punkt $\mathrm{A}(-2 \mid 1)$ und ist parallel zur Geraden mit der Gleichung $y = 2x + 3$.

e) Die Gerade g_5 geht durch den Punkt $\mathrm{B}(4 \mid -1)$ und verläuft orthogonal zur Geraden mit der Gleichung $y = \frac{2}{3}x - 1$.

1.3 Schnittpunkte von Geraden ☐

Berechnen Sie jeweils die Schnittpunkte der Geraden:

a) $g\colon y = 2x - 4$
$h\colon y = -3x + 1$

b) $g\colon y = \frac{1}{2}x + 4$
$h\colon y = -\frac{3}{2}x - 2$

c) $g\colon y = \frac{1}{3}x + 1$
$h\colon y = -\frac{4}{3}x + 3$

d) $g\colon y = 2x - 4$
$h\colon x$-Achse

e) $g\colon y = \frac{1}{2}x + 4$
$h\colon x$-Achse

1.4 Gemischte Aufgaben ☐

a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC mit $A(3 \mid 2)$, $B(-2 \mid 3)$ und $C(-3 \mid -2)$ gleichschenklig ist.

b) Prüfen Sie, ob das Viereck ABCD mit $A(5 \mid 1)$, $B(1 \mid 3)$, $C(-2 \mid -2)$ und $D(2 \mid -4)$ ein Parallelogramm ist.

c) Prüfen Sie, ob die Gerade g durch $A(3 \mid 2)$ und $B(1 \mid -4)$ parallel zur Geraden h durch $P(4 \mid 2)$ und $Q(3 \mid 5)$ ist.

d) Zeigen Sie, dass die Gerade g durch $A(4 \mid 1)$ und $B(1 \mid 5)$ orthogonal zur Geraden h durch $P(2 \mid 2)$ und $Q(6 \mid 5)$ ist.

e) Berechnen Sie den Abstand des Schnittpunktes der Geraden $g\colon\ y = 2x - 4$ und $h\colon\ y = -3x + 1$ zum Ursprung.

Tipps

Analysis

1 Strecken und Geraden

1.1 Länge, Mittelpunkt und Steigung

Die Länge einer Strecke $\overline{\mathrm{PQ}}$ erhalten Sie mit der Längenformel $\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{(x_{\mathrm{Q}} - x_{\mathrm{P}})^2 + (y_{\mathrm{Q}} - y_{\mathrm{P}})^2}$, den Mittelpunkt zwischen P und Q mit der Mittelpunktsformel $\mathrm{M}_{\mathrm{PQ}}\left(\frac{x_{\mathrm{P}}+x_{\mathrm{Q}}}{2} \mid \frac{y_{\mathrm{P}}+y_{\mathrm{Q}}}{2}\right)$ und die Steigung mit der Steigungsformel $m_{\mathrm{PQ}} = \frac{y_{\mathrm{Q}}-y_{\mathrm{P}}}{x_{\mathrm{Q}}-x_{\mathrm{P}}}$.

1.2 Geradengleichungen

Die Gleichung einer Geraden erhalten Sie mit der Punktsteigungsform $f(x) = m(x - x_{\mathrm{P}}) + y_{\mathrm{p}}$.

a) Setzen Sie den gegebenen Punkt und die gegebene Steigung in die Punktsteigungsform ein.

b) Setzen Sie den gegebenen Punkt und die gegebene Steigung in die Punktsteigungsform ein.

c) Berechnen Sie zuerst die Steigung von g_3 mit der Steigungsformel $m_{\mathrm{PQ}} = \frac{y_{\mathrm{Q}}-y_{\mathrm{P}}}{x_{\mathrm{Q}}-x_{\mathrm{P}}}$. Anschließend setzen Sie einen gegebenen Punkt und die Steigung in die Punktsteigungsform ein.

d) Beachten Sie, dass parallele Geraden die gleiche Steigung haben. Setzen Sie den gegebenen Punkt und die abgelesene Steigung in die Punktsteigungsform ein.

e) Beachten Sie, dass bei orthogonalen Geraden gilt: $m_g = \frac{1}{m_h} - 1$, d.h. die eine Steigung ist der negative Kehrwert der anderen Steigung. Bestimmen Sie damit die Steigung von g_5 und setzen Sie den gegebenen Punkt und die bestimmte Steigung in die Punktsteigungsform ein.

1.3 Schnittpunkte von Geraden

Den Schnittpunkt zweier Geraden erhalten Sie durch Gleichsetzen der Geradengleichungen. Lösen Sie die entstandene Gleichung nach x auf und setzen Sie den x-Wert in eine der Geradengleichungen ein, um den y-Wert zu bestimmen. Die x-Achse hat die Gleichung $y = 0$.

1.4 Gemischte Aufgaben

a) Bestimmen Sie die Längen der drei Seiten des Dreiecks mit der Längenformel $\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{(x_\mathrm{Q}-x_\mathrm{P})^2+(y_\mathrm{Q}-y_\mathrm{P})^2}$. Falls zwei Seiten gleich lang sind, handelt es sich um ein gleichschenkliges Dreieck.

b) Berechnen Sie jeweils die Steigungen gegenüberliegender Seiten mit der Steigungsformel $m_\mathrm{PQ} = \frac{y_\mathrm{Q}-y_\mathrm{P}}{x_\mathrm{Q}-x_\mathrm{P}}$. Falls jeweils gegenüberliegende Steigungen gleich sind, handelt es sich um ein Parallelogramm.

c) Berechnen Sie jeweils die Steigungen der beiden Geraden mit der Steigungsformel $m_\mathrm{PQ} = \frac{y_\mathrm{Q}-y_\mathrm{P}}{x_\mathrm{Q}-x_\mathrm{P}}$. Falls die beiden Steigungen gleich sind, sind die Geraden parallel, sonst nicht.

d) Berechnen Sie jeweils die Steigungen der beiden Geraden mit der Steigungsformel $m_\mathrm{PQ} = \frac{y_\mathrm{Q}-y_\mathrm{P}}{x_\mathrm{Q}-x_\mathrm{P}}$. Falls die eine Steigung der negative Kehrwert der anderen Steigung ist bzw. $m_\mathrm{AB} \cdot m_\mathrm{PQ} = -1$ gilt, sind g und h orthogonal.

e) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts S der Geraden g und h durch Gleichsetzen. Setzen Sie den erhaltenen x-Wert in g ein, um den y-Wert zu erhalten. Den Abstand d von S zum Ursprung erhalten Sie mit der Längenformel $\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{(x_\mathrm{Q}-x_\mathrm{P})^2+(y_\mathrm{Q}-y_\mathrm{P})^2}$.

2 Gleichungen

2.1 Quadratische, biquadratische und nichtlineare Gleichungen

a) - b) abc-Formel verwenden (Zahlen unter der Wurzel als Bruch schreiben).

c) - d) Verwenden Sie den Satz vom Nullprodukt: Setzen Sie jeden einzelnen Faktor gleich Null und lösen Sie die entstandenen Gleichungen nach x auf.

e) - h) Klammern Sie x oder x^2 oder x^3 aus und bestimmen Sie damit die erste Lösung. Danach wiederholtes Ausklammern oder Lösen der Gleichung mit der abc-Formel.

i) - j) Biquadratische Gleichungen: Substitution von x^2 durch z. Die quadratische Gleichung wird mit Hilfe der abc-Formel nach z aufgelöst. Anschließende Rücksubstitution liefert die Lösungsmenge. (Zahlen unter der Wurzel als Bruch schreiben).

2.2 Exponentialgleichungen

a) - e) Setzen Sie jeden einzelnen Faktor gleich Null und überlegen Sie, ob Lösungen existieren.

f) - g) Substitutieren Sie $e^x = z$ bzw. $e^{2x} = z$ und lösen Sie dann die quadratische Gleichung mit der abc-Formel. Durch anschließende Rücksubstitution von z können Sie x berechnen (Zahlen unter der Wurzel als Bruch schreiben).

h) Multiplizieren Sie die Gleichung mit e^x, substituieren Sie $e^x = z$ und lösen Sie dann die quadratische Gleichung mit der abc-Formel, anschließend Rücksubstitution und x berechnen.

Lösungen – Analysis

1 Strecken und Geraden

1.1 Länge, Mittelpunkt und Steigung

Die Länge einer Strecke $\overline{\text{PQ}}$ erhält man mit der Längenformel $\overline{\text{PQ}} = \sqrt{(x_\text{Q} - x_\text{P})^2 + (y_\text{Q} - y_\text{P})^2}$, den Mittelpunkt zwischen P und Q mit der Mittelpunktsformel $\text{M}_\text{PQ}\left(\frac{x_\text{P}+x_\text{Q}}{2} \mid \frac{y_\text{P}+y_\text{Q}}{2}\right)$ und die Steigung mit der Steigungsformel $m_\text{PQ} = \frac{y_\text{Q}-y_\text{P}}{x_\text{Q}-x_\text{P}}$.

a) $\overline{\text{PQ}} = \sqrt{(6-2)^2 + (7-4)^2} = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{25} = 5$, $\text{M}_\text{PQ}\left(\frac{4+7}{2} \mid \frac{2+6}{2}\right) = \text{M}_\text{PQ}\left(\frac{11}{2} \mid 4\right)$,
$m_\text{PQ} = \frac{6-2}{7-4} = \frac{4}{3}$

b) $\overline{\text{AB}} = \sqrt{(-3-1)^2 + (5-4)^2} = \sqrt{(-4)^2+1^2} = \sqrt{17}$, $\text{M}_\text{AB}\left(\frac{4+5}{2} \mid \frac{1+(-3)}{2}\right) = \text{M}_\text{AB}\left(\frac{9}{2} \mid -1\right)$,
$m_\text{AB} = \frac{-3-1}{5-4} = \frac{-4}{1} = -4$

c) $\overline{\text{AC}} = \sqrt{(-3-2)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{(-5)^2+(-5)^2} = \sqrt{50}$
$\text{M}_\text{AC}\left(\frac{4+(-1)}{2} \mid \frac{2+(-3)}{2}\right) = \text{M}_\text{AC}\left(\frac{3}{2} \mid -\frac{1}{2}\right)$, $m_\text{AC} = \frac{-3-2}{-1-4} = \frac{-5}{-5} = 1$

d) $\overline{\text{BD}} = \sqrt{(-6-(-2))^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{(-4)^2+(-6)^2} = \sqrt{52}$,
$\text{M}_\text{BD}\left(\frac{4+(-2)}{2} \mid \frac{-2+(-6)}{2}\right) = \text{M}_\text{BD}(1 \mid -4)$, $m_\text{BD} = \frac{-6-(-2)}{-2-4} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}$

e) $\overline{\text{FS}} = \sqrt{(-8-(-2))^2 + (-1-(-4))^2} = \sqrt{(-6)^2+3^2} = \sqrt{45}$,
$\text{M}_\text{FS}\left(\frac{-4+(-1)}{2} \mid \frac{-2+(-8)}{2}\right) = \text{M}_\text{FS}\left(-\frac{5}{2} \mid -5\right)$, $m_\text{FS} = \frac{-8-(-2)}{-1-(-4)} = \frac{-6}{3} = -2$

1.2 Geradengleichungen

Die Gleichung einer Geraden erhält man mit der Punktsteigungsform $f(x) = m(x - x_\text{P}) + y_\text{p}$. Falls die Steigung nicht gegeben ist, muss sie noch berechnet oder anderweitig überlegt werden.

a) Die Gerade g_1 hat die Steigung $m_1 = 2$ und geht durch den Punkt A$(4 \mid 3)$. Damit gilt:
$f(x) = 2(x-4)+3 \Rightarrow f(x) = 2x-5$

b) Die Gerade g_2 hat die Steigung $m_2 = -\frac{2}{3}$ und geht durch den Punkt P$(-6 \mid 5)$. Damit gilt:
$f(x) = -\frac{2}{3}(x-(-6))+5 \Rightarrow f(x) = -\frac{2}{3}x+1$

c) Die Gerade g_3 geht durch die Punkte A$(4 \mid 2)$ und B$(1 \mid 6)$. Die Steigung von g_3 erhält man mit der Steigungsformel: $m_3 = \frac{6-2}{1-4} = -\frac{4}{3}$. Damit gilt:
$f(x) = -\frac{4}{3}(x-4)+2 \Rightarrow f(x) = -\frac{4}{3}x+\frac{22}{3}$

d) Die Gerade g_4 geht durch den Punkt $\mathrm{A}(-2 \mid 1)$ und ist parallel zur Geraden mit der Gleichung $y = 2x+3$. Die Gerade g_4 hat die gleiche Steigung wie die angegebene Gerade, also $m_4 = 2$. Damit gilt: $f(x) = 2(x-(-2))+1 \;\Rightarrow\; f(x) = 2x+5$

e) Die Gerade g_5 geht durch den Punkt $\mathrm{B}(4 \mid -1)$ und verläuft orthogonal zur Geraden mit der Gleichung $y = \frac{2}{3}x - 1$. Da die beiden Geraden orthogonal sind, ist die Steigung von g_5 der negative Kehrwert der Steigung der angegebenen Geraden, also $m_5 = -\frac{3}{2}$. Damit gilt: $f(x) = -\frac{3}{2}(x-4)+(-1) \;\Rightarrow\; f(x) = -\frac{3}{2}x+5$

1.3 Schnittpunkte von Geraden

Den Schnittpunkt zweier Geraden erhält man durch Gleichsetzen der Geradengleichungen. Man löst die entstandene Gleichung nach x auf und setzt den x-Wert in eine der Geradengleichungen ein, um den y-Wert zu bestimmen.

a) Durch Gleichsetzen ergibt sich: $2x-4 = -3x+1 \;\Rightarrow\; x = 1$.
Setzt man $x = 1$ in g ein, erhält man: $y = 2\cdot 1 - 4 = -2$.
Damit hat der Schnittpunkt die Koordinaten: $\mathrm{S}(1 \mid -2)$.

b) Durch Gleichsetzen ergibt sich: $\frac{1}{2}x+4 = -\frac{3}{2}x-2 \;\Rightarrow\; x = -3$.
Setzt man $x = -3$ in g ein, erhält man: $y = \frac{1}{2}\cdot(-3)+4 = \frac{5}{2}$.
Damit hat der Schnittpunkt die Koordinaten: $\mathrm{S}\left(-3 \mid \frac{5}{2}\right)$.

c) Durch Gleichsetzen ergibt sich: $\frac{1}{3}x+1 = -\frac{4}{3}x+3 \;\Rightarrow\; x = \frac{6}{5}$.
Setzt man $x = \frac{6}{5}$ in g ein, erhält man: $y = \frac{1}{3}\cdot\frac{6}{5}+1 = \frac{7}{5}$.
Damit hat der Schnittpunkt die Koordinaten: $\mathrm{S}\left(\frac{6}{5} \mid \frac{7}{5}\right)$.

d) Die x-Achse hat die Gleichung $y = 0$.
Durch Gleichsetzen ergibt sich: $2x-4 = 0 \;\Rightarrow\; x = 2$.
Damit hat der Schnittpunkt die Koordinaten: $\mathrm{S}(2 \mid 0)$.

e) Die x-Achse hat die Gleichung $y = 0$.
Durch Gleichsetzen ergibt sich: $\frac{1}{2}x+4 = 0 \;\Rightarrow\; x = -8$.
Damit hat der Schnittpunkt die Koordinaten: $\mathrm{S}(-8 \mid 0)$.

1.4 Gemischte Aufgaben

a) Um zu zeigen, dass das Dreieck ABC mit $\mathrm{A}(3 \mid 2)$, $\mathrm{B}(-2 \mid 3)$ und $\mathrm{C}(-3 \mid -2)$ gleichschenklig ist, berechnet man die Längen der drei Seiten des Dreiecks mit der Längenformel:

$$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(3-2)^2+(-2-3)^2} = \sqrt{1^2+(-5)^2} = \sqrt{26}$$
$$\overline{\mathrm{AC}} = \sqrt{(-2-2)^2+(-3-3)^2} = \sqrt{(-4)^2+(-6)^2} = \sqrt{52}$$
$$\overline{\mathrm{BC}} = \sqrt{(-3-(-2))^2+(-2-3)^2} = \sqrt{(-1)^2+(-5)^2} = \sqrt{26}$$

Wegen $\overline{AB} = \overline{BC}$ ist das Dreieck ABC gleichschenklig.

b) Um zu prüfen, ob das Viereck ABCD mit A(5 | 1), B(1 | 3), C(−2 | −2) und D(2 | −4) ein Parallelogramm ist, berechnet man die Steigungen gegenüberliegender Seiten:

$$m_{AB} = \frac{3-1}{1-5} = -\frac{1}{2}$$
$$m_{CD} = \frac{-4-(-2)}{2-(-2)} = -\frac{1}{2}$$
$$m_{AD} = \frac{-4-1}{2-5} = \frac{5}{3}$$
$$m_{BC} = \frac{-2-3}{-2-1} = \frac{5}{3}$$

Wegen $m_{AB} = m_{CD}$ und $m_{AD} = m_{BC}$ ist das Viereck ABCD ein Parallelogramm.

c) Um zu prüfen, ob die Gerade g durch A(3 | 2) und B(1 | −4) parallel zur Geraden h durch P(4 | 2) und Q(3 | 5) ist, berechnet man jeweils die Steigung:

$$m_{AB} = \frac{-4-2}{1-3} = 3$$
$$m_{PQ} = \frac{5-2}{3-4} = -3$$

Wegen $m_{AB} \neq m_{PQ}$ sind g und h nicht parallel.

d) Um zu zeigen, dass die Gerade g durch A(4 | 1) und B(1 | 5) orthogonal zur Geraden h durch P(2 | 2) und Q(6 | 5) ist, berechnet man jeweils die Steigung:

$$m_{AB} = \frac{5-1}{1-4} = -\frac{4}{3}$$
$$m_{PQ} = \frac{5-2}{6-2} = \frac{3}{4}$$

Wegen $m_{AB} \cdot m_{PQ} = -\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} = -1$ sind g und h orthogonal.

e) Die Koordinaten des Schnittpunkts S der Geraden $g\colon y = 2x - 4$ und $h\colon y = -3x + 1$ erhält man durch Gleichsetzen: $2x - 4 = -3x + 1 \Rightarrow x = 1$.
Setzt man $x = 1$ in g ein, erhält man: $y = 2 \cdot 1 - 4 = -2$.
Damit hat der Schnittpunkt die Koordinaten: S(1 | −2).
Den Abstand d von S zum Ursprung O(0 | 0) erhält man mit der Längenformel:

$$\mathrm{d} = \overline{OS} = \sqrt{(-2-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$