Gruber | Neumann

Erfolg im Mathe-Abi 2011

Übungsbuch für den Wahlteil Baden-Württemberg mit Tipps und Lösungen

Freiburger Verlag

Inhaltsverzeichnis

Analysis

Geometrie

Vorwort

Erfolg von Anfang an

Das vorliegende Übungsbuch ist speziell auf die Anforderungen des Wahlteils des Mathematik-Abiturs in Baden-Württemberg abgestimmt. Es umfasst die zwei großen Themenbereiche Analysis und Geometrie sowie die Original-Abituraufgaben seit 2004 in einem Buch.

Der Wahlteil besteht aus komplexeren Aufgaben, die mit Hilfe eines grafikfähigen Taschenrechners (GTR) und einer Formelsammlung gelöst werden sollen. Der Schwerpunkt liegt auf der Analysis. Thematisch geht es um anwendungsbezogene Transferaufgaben, um das Modellieren realitätsnaher Aufgabenstellungen, um das Herstellen von Zusammenhängen und das Entwickeln von Lösungsstrategien.

Der blaue Tippteil

Manchmal hat man keine Idee, wie man eine Aufgabe angehen soll bzw. es fehlt der Lösungsansatz. Hier hilft der blaue Tippteil in der Mitte des Buches weiter: Zu jeder Aufgabe gibt es dort Tipps, die helfen, einen Ansatz zu finden, ohne die Lösung vorwegzunehmen.

Der Aufbau der Mathematikprüfung

- Die gesamte Prüfungszeit beträgt 240 Minuten (vier Zeitstunden).
- Der Lehrer erhält vor der Prüfung den Pflichtteil und für den Wahlteil drei Aufgabenvorschläge aus der Analysis und zwei aus der Geometrie. Er wählt aus den Vorschlägen für den Wahlteil je einen aus der Analysis bzw. der Geometrie aus.
- Der Schüler erhält zu Beginn der Prüfung alle Aufgaben (den Pflichtteil und den vom Lehrer ausgesuchten Wahlteil, bestehend aus Analysis und Geometrie). Er erhält zu diesem Zeitpunkt noch keine Hilfsmittel.
- Er bearbeitet zuerst den Pflichtteil (Richtzeit: 80 Min), dann gibt er den Pflichtteil ab und erhält die Hilfsmittel (Taschenrechner, Formelsammlung) für den Wahlteil.

Insgesamt können maximal 60 Verrechnungspunkte in der Prüfung erzielt werden, davon 26 im Pflichtteil und 34 im Wahlteil. Wer den Pflichtteil vollständig richtig bearbeitet hat und im Wahlteil mindestens einen Verrechnungspunkt erhält, bekommt die Note ausreichend (5 Notenpunkte).

Allen Schülern, die sich auf das Abitur vorbereiten, wünschen wir viel Erfolg.

Helmut Gruber, Robert Neumann

Analysis

1 Gebrochenrationale Funktion – Laptop

Tipps ab Seite 27, Lösungen ab Seite 39

a) Die Herstellungskosten eines Laptops in Abhängigkeit von der produzierten Stückzahl werden durch die Funktion H mit

$$\mathrm{H}(x) = \frac{1200x + 45\,000}{2x+3};\ \ x \geqslant 0$$

beschrieben (x: Stückzahl, $\mathrm{H}(x)$: Herstellungskosten des x-ten Laptops in €).
Ihr Schaubild sei K.

Skizzieren Sie K und zeigen Sie, dass die Herstellungskosten fortwährend sinken.
Wie hoch sind die langfristigen Herstellungskosten?
Berechnen Sie die durchschnittlichen Herstellungskosten eines Laptops bei einer Stückzahl von 1000 bzw. 10 000 Stück.

Ein Discounter, der die Laptops zum Herstellungspreis einkauft, verkauft den Laptop zu einem Preis von 629 €.

Ab welcher Stückzahl liegen die Herstellungskosten erstmals unter dem Verkaufspreis?
Wie hoch ist der zu erwartende Gewinn des Discounters, wenn 20 000 Laptops bei der Herstellerfirma geordert werden und die Verkaufsrate 98 % beträgt?
Wie hoch muss die Verkaufsrate mindestens sein, so dass kein Verlust entsteht?

b) Das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} + 2$, die x-Achse sowie die Geraden mit den Gleichungen $x = n$ und $x = n+1$ $(n \geqslant 2)$ begrenzen eine Fläche mit dem Inhalt $\mathrm{A}(n)$.
Die Zahlenfolge (a_n) ist gegeben durch $a_n = \mathrm{A}\,(n)\,;\, n \geqslant 2,\, n \in \mathbb{N}$.

Bestimmen Sie a_2 und a_3 sowie den Grenzwert der Zahlenfolge.
Untersuchen Sie (a_n) auf Monotonie.

Tipps – Analysis

1 Gebrochenrationale Funktion – Laptop

a) Erstellen Sie mit dem GTR eine Wertetabelle und skizzieren Sie K.
Mit Hilfe von $\mathrm{H}'(x)$ können Sie das fortwährende Sinken nachweisen.
Die langfristigen Kosten ermitteln Sie durch $x \to \infty$.
Die Durchschnittskosten erhalten Sie durch die Berechnung von Integralen (GTR), dabei gilt für den Mittelwert von Integralen: $\overline{m} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.
Wenn Sie die Kurve mit einer Geraden schneiden, erhalten Sie die Gleichheit von Herstellungskosten und Verkaufspreis.
Überlegen Sie, wie sich der Gewinn zusammensetzt.

b) Berechnen Sie $\mathrm{A}(n)$ durch Integration, a_2 und a_3 erhalten Sie durch Einsetzen, den Grenzwert durch $n \to \infty$.
Zur Monotoniebestimmung berechnen Sie $a_n - a_{n+1}$:
Falls $a_n - a_{n+1} > 0$ für alle n, ist (a_n) streng monoton fallend;
falls $a_n - a_{n+1} < 0$ für alle n, ist (a_n) streng monoton wachsend.

2 Gebrochenrationale Funktion – Heizkosten

a) Für die Definitionsbereichsbestimmung setzen Sie den Nenner gleich Null.
Wählen Sie für t drei beliebige Werte, um die Kurven zu skizzieren.
Untersuchen Sie (ohne Rechnung) die Kurven für $t = 1, t > 1$ und $t < 1$ auf Asymptoten, Symmetrie, Schnittpunkte mit den Achsen, Hoch-, Tief- und Wendepunkte.
Überlegen Sie, ob Achsen- oder Punktsymmetrie vorliegt; bei Achsensymmetrie zu $x = a$ gilt: $f(a+h) = f(a-h)$, bei Punktsymmetrie zu $\mathrm{P}\,(a \mid b)$ gilt: $\frac{f(a+h)+f(a-h)}{2} = b$.
Um die Punkte mit minimalem Abstand zu erhalten, stellen Sie eine Abstandsfunktion zwischen Punkt P und einem Punkt $\mathrm{Q}\,(x \mid f(x))$ der Kurve auf.
Der Abstand zweier Punkte ist $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.
Bestimmen Sie die Minima mit Hilfe des GTR.
Überlegen Sie, welche Eigenschaften Punkte auf der 1. Winkelhalbierenden haben.

b) Bestimmen Sie die Heizkosten ohne Dämmung ($d = 0$) und setzen Sie ein Viertel davon mit H(d) gleich.
Überlegen Sie, wie sich die Gesamtkosten G in 30 Jahren zusammensetzen, stellen Sie eine Funktion G(d) auf und bestimmen Sie mit dem GTR das Minimum.
Berechnen Sie jeweils die Gesamtkosten, die Ersparnis ergibt sich aus der Differenz.

3 Gebrochenrationale Funktion – Mineraldünger

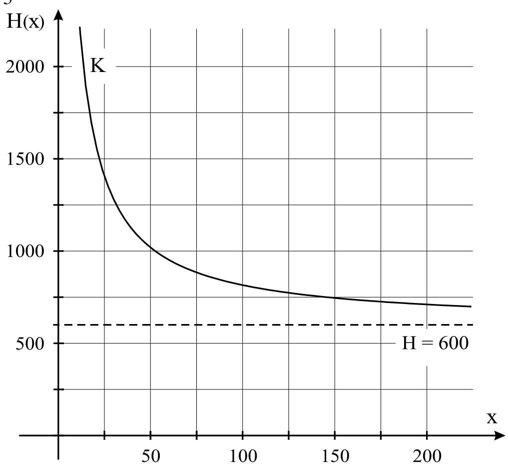
a) Stellen Sie mit Hilfe der gegebenen Daten drei Gleichungen mit drei Unbekannten auf und lösen Sie das Gleichungssystem (eventuell mit dem GTR).

Lösungen

Analysis

1 Gebrochenrationale Funktion – Laptop

a) Es ist $\mathrm{H}(x) = \frac{1200x+45\,000}{2x+3}$; $x \geqslant 0$



Diese Lösung verwendet den Ansatz eines kontinuierlichen Modells. Um zu zeigen, dass die Herstellungskosten fortwährend sinken, bestimmt man $\mathrm{H}'(x)$ mit der Quotientenregel

$$\begin{aligned}\mathrm{H}'(x) &= \frac{1200 \cdot (2x+3) - (1200x + 45\,000) \cdot 2}{(2x+3)^2} \\ &= \frac{-86\,400}{(2x+3)^2} < 0.\end{aligned}$$

Da $\mathrm{H}'(x) < 0$, ist H streng monoton fallend, also sinken die Herstellungskosten fortwährend.

Die langfristigen Herstellungskosten erhält man, wenn $x \to \infty$ geht:
$\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{H}(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1200x+45\,000}{2x+3} = \frac{1200}{2} = 600.$
Die Herstellungskosten betragen langfristig 600 €.

Die durchschnittlichen Herstellungskosten $\overline{\mathrm{H}}$ eines Laptops erhält man durch folgende Integrale:

$$\overline{\mathrm{H}}_1 = \frac{1}{1000}\int_0^{1000} \mathrm{H}(x)dx = \frac{1}{1000}\int_0^{1000} \frac{1200x+45\,000}{2x+3}dx = 740,48$$

$$\overline{\mathrm{H}}_2 = \frac{1}{10\,000}\int_0^{10\,000} \mathrm{H}(x)dx = \frac{1}{10\,000}\int_0^{10\,000} \frac{1200x+45\,000}{2x+3}dx = 619,02.$$

Die durchschnittlichen Herstellungskosten eines Laptops betragen bei 1000 Stück 740 €, bei 10000 Stück 619 €.

Man erhält die Gleichheit von Herstellungskosten und Verkaufspreis, wenn man das Schaubild von H mit der Geraden $y = 629$ schneidet. Mit dem GTR erhält man $x = 743,33$, also liegen die Herstellungskosten ab einer Stückzahl von 744 erstmals unter dem Verkaufspreis.

Den Gewinn G erhält man, indem man vom Verkaufserlös die Herstellungskosten abzieht: Der Verkaufserlös ergibt sich aus 98 % von 20000 Laptops à 629 €, also
$0,98 \cdot 20000 \cdot 629 = 12\,328\,400$.
Die Herstellungskosten erhält man durch Integration der Herstellungskostenfunktion:

$$\int_0^{20\,000} \frac{1200x+45\,000}{2x+3}dx = 12\,205\,159 \;\;(\mathrm{GTR}).$$

Damit beträgt der Gewinn G $= 12\,328\,400$ € $-$ $12\,205\,159$ € $= 123\,241$ €.

Damit kein Verlust entsteht, muss der Verkaufspreis bei einer Verkaufsrate p gleich groß wie die Herstellungskosten sein, also $p \cdot 20000 \cdot 629 = 12\,205\,159 \Rightarrow p = 0,97$.
Die Verkaufsrate muss also mindestens 97 % betragen.

b) Es ist $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} + 2$, die Zahlenfolge ist gegeben durch $a_n = \mathrm{A}(n)$; $n \geqslant 2, n \in \mathbb{N}$.
Den Flächeninhalt A(n) erhält man durch folgendes Integral:

$$\begin{aligned}\mathrm{A}(n) &= \int_n^{n+1} f(x)dx = \int_n^{n+1} \left(\tfrac{1}{(x-1)^2} + 2\right)dx = \left[-\tfrac{1}{x-1} + 2x\right]_n^{n+1}\\ &= -\tfrac{1}{n+1-1} + 2\cdot(n+1) - \left(-\tfrac{1}{n-1} + 2n\right)\\ &= -\tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{n-1} + 2\\ &= -\tfrac{n-1}{n\cdot(n-1)} + \tfrac{n}{n\cdot(n-1)} + \tfrac{2\cdot(n-1)\cdot n}{n\cdot(n-1)}\\ &= \tfrac{2n^2-2n+1}{n\cdot(n-1)} = a_n.\end{aligned}$$

Indem man für $n = 2$ einsetzt, erhält man
$a_2 = \frac{2\cdot 2^2 - 2\cdot 2 + 1}{2\cdot(2-1)} = \frac{5}{2}$.
Indem man für $n = 3$ einsetzt, erhält man

$a_3 = \frac{2\cdot 3^2 - 2\cdot 3 + 1}{3\cdot(3-1)} = \frac{13}{6}$.

Der Grenzwert der Zahlenfolge ist

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2-2n+1}{n\cdot(n-1)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2-2n+1}{n^2-n} = \frac{2}{1} = 2.$

Wenn man (a_n) auf Monotonie untersucht, liegt die Vermutung nahe, dass (a_n) streng monoton fallend ist.

Um dies zu zeigen, berechnet man $a_n - a_{n+1}$:

$$\begin{aligned}
a_n - a_{n+1} &= \frac{2n^2-2n+1}{n\cdot(n-1)} - \frac{2\cdot(n+1)^2 - 2\,(n+1)+1}{(n+1)\cdot(n+1-1)} \\
&= \frac{2n^2-2n+1}{n\cdot(n-1)} - \frac{2n^2+2n+1}{(n+1)\cdot n} \\
&= \frac{\left(2n^2-2n+1\right)\cdot(n+1)}{n\cdot(n-1)\cdot(n+1)} - \frac{\left(2n^2+2n+1\right)(n-1)}{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)} \\
&= \frac{2n^3-n+1}{n\cdot(n-1)\cdot(n+1)} - \frac{2n^3-n-1}{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)} \\
&= \frac{2}{n\cdot(n-1)\cdot(n+1)} > 0.
\end{aligned}$$

Da $a_n - a_{n+1} > 0$, ist die Folge (a_n) streng monoton fallend.