Die Lerndominos sind ein idealer Weg, um Gelerntes zu vertiefen.

Das Domino wird mit der Start-Karte begonnen, dann werden die passenden Antwort-Karten angelegt bis die Ziel-Karte erreicht ist. Bewährt hat es sich, zu zweit oder zu dritt mit einem Satz Mathe-Dominos zu arbeiten.

– Auf der Tipp-Karte stehen Tipps für das Anlegen der ersten Karten.
– Es ist sinnvoll, eine Musteraufgabe vorher an der Tafel zu rechnen.
– Viele Aufgaben sind ähnlich, beim Bearbeiten ist genaues Hinsehen gefragt.
– Auf der Tipp-Karte stehen Tipps für das Anlegen der ersten Karten oder allgemeine Tipps und Regeln.
– Wer gut zurechtkommt, rechnet im Kopf, die anderen können Bleistift und Papier zu Hilfe nehmen.
– Die richtige Reihenfolge steht auf der Lösungskarte.

G1 – Lage spezieller Geraden

Ziel ist es, die Lage spezieller Geraden im Koordinatensystem anzugeben.

Um zu prüfen, ob eine Gerade in oder parallel zu einer Koordinatenachse oder Koordinatenebene liegt, geht man wie folgt vor:

1. Richtungsvektor auf Nullen prüfen: Enthält der Richtungsvektor **eine** Null, dann ist die Gerade zur entsprechenden Koordinaten**ebene** parallel oder liegt in dieser Ebene.
   Enthält der Richtungsvektor **zwei** Nullen, dann ist die Gerade zur entsprechenden Koordinaten**achse** parallel oder stellt eine Gleichung dieser Koordinatenachse dar.
2. Stützvektor auf Nullen prüfen: Sind die Nullen im Stützvektor an der gleichen Stelle wie beim Richtungsvektor, dann liegt die Gerade in der entsprechenden Koordinatenebene bzw. stellt die entsprechende Koordinatenachse dar; ansonsten verläuft sie parallel dazu.
   Fehlt der Stützvektor oder ist er ein Vielfaches des Richtungsvektors, so geht die Gerade durch den Ursprung.

Beispiel:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$$

Der Richtungsvektor enthält eine Null und die Null im Stützvektor steht nicht an der gleichen Stelle wie im Richtungsvektor, daher ist g parallel zur x_1x_2-Ebene.

G3 – Lage spezieller Ebenen (Koordinatengleichung)

Ziel ist es, die Lage spezieller Ebenen im Koordinatensystem zu bestimmen.

In Bezug auf die Koordinatenachsen gilt:
Enthält die Ebenengleichung **eine** Komponente nicht (x_1, x_2 oder x_3), dann besitzt der Normalenvektor der Ebene keinen Anteil, der in die Richtung dieser Koordinaten**achse** zeigt. Also ist die Ebene entweder parallel zu dieser Koordinatenachse oder enthält sie. Ist das Absolutglied (der Term ohne x) gleich Null, enthält die Ebene die entsprechende Koordinatenachse.

Beispiel:
$\mathrm{E}: 3x_1 + 2x_3 - 12 = 0$ d.h. E ist parallel zur x_2-Achse
$\mathrm{E}: 3x_1 + 2x_3 = 0$ d.h. E enthält die x_2-Achse.

Enthält die Ebene **zwei** Komponenten nicht, dann ist sie parallel zu dieser Koordinaten**ebene** oder eine Gleichung dieser Koordinatenebene.

Beispiel:
$\mathrm{E}: 2x_3 = 0$ d.h. E ist eine Gleichung der x_1x_2-Ebene
$\mathrm{E}: 2x_3 + 2 = 0$ d.h. E ist parallel zur x_1x_2-Ebene

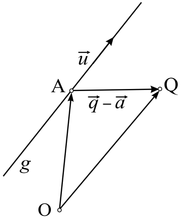
G4 – Gegenseitige Lage von Punkten, Geraden und Ebenen 1

(Schwerpunkt Parameterform)

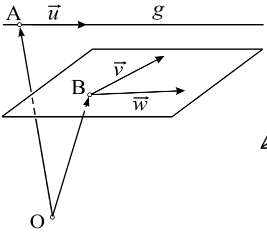
Ziel ist es, die Lage von Punkten, Geraden und Ebenen zueinander zu bestimmen.

Dabei geht es vor allem darum, herauszufinden, welche Bedingungen für die Vektoren gelten müssen. Zur Veranschaulichung sind Skizzen sehr hilfreich.

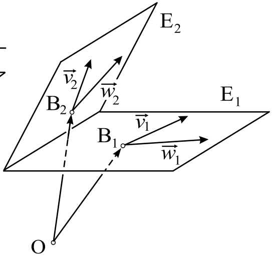
Beispiele:



Punkt Q befindet sich nicht auf Gerade g: $\vec{q} - \vec{a}$ und $\vec{u}$ sind linear unabhängig.



Gerade g parallel zur Ebene E: $\vec{u}, \vec{v}$ und $\vec{w}$ sind linear abhängig und $\vec{a} - \vec{b}, \vec{v}$ und $\vec{w}$ sind linear unabhängig.



Zwei Ebenen E_1 und E_2 mit Schnittgerade: Entweder sind $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{w_1}$ und $\overrightarrow{v_2}$ oder $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{w_1}$ und $\overrightarrow{w_2}$ linear unabhängig.

G5 – Gegenseitige Lage von Punkten, Geraden und Ebenen 2

(Schwerpunkt Koordinatenform)

Ziel ist es, die Lage von Punkten, Geraden und Ebenen zueinander zu bestimmen.
Dabei geht es vor allem darum, die Situationen, die beim Lösen der zugehörigen Gleichungssysteme entstehen, geometrisch zu interpretieren.

Für das Lösen der Aufgaben ist es hilfreich, sich klarzumachen, dass die Lösbarkeit des zugehörigen Gleichungssystems darüber entscheidet, ob es gemeinsame Punkte gibt.

Beispiel:
Beim Lageproblem Gerade – Ebene bedeutet das Auftreten einer eindeutigen Lösung, dass es einen gemeinsamen Punkt, den Schnittpunkt, gibt. Gibt es unendlich viele Lösungen, dann gibt es unendlich viele gemeinsamen Punkte, die Gerade liegt in der Ebene. Keine Lösung wiederum bedeutet, dass es keine gemeinsamen Punkte gibt, die Gerade also parallel zur Ebene liegen muss.

G6 – Lotgeraden und Lotebenen

Ziel ist es, Gleichungen von Geraden oder Ebenen aufzustellen, die parallel oder senkrecht («lotrecht») zu einer gegebenen Ebene sein müssen. Dabei sind eventuell noch Zusatzbedingungen gefordert.
Allgemein gilt:

– Eine Ursprungsgerade besitzt den Ursprung als Stützpunkt; dieser wird hier beim Aufstellen der Geradengleichung weggelassen.
– Verläuft eine Gerade parallel zu einer Ebene, ist das Skalarprodukt zwischen dem Richtungsvektor der Geraden und dem Normalenvektor der Ebene gleich Null.
– Steht eine Gerade senkrecht auf einer Ebene, dann sind der Normalenvektor der Ebene und der Richtungsvektor der Gerade linear abhängig, bzw. man kann den Normalenvektor direkt als Richtungsvektor übernehmen.
– Verläuft eine Ebene parallel zu einer Koordinatenachse, ist die entsprechende Komponente im Normalenvektor gleich Null.

Einen Vektors, der senkrecht auf einem gegebenen Vektor steht, bestimmt man leicht, indem man eine Komponente gleich Null setzt, die Komponenten vertauscht und das Vorzeichen einer der beiden Komponenten umdreht:

Ein Vektor, der auf $\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ senkrecht steht, ist z.B. $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$.

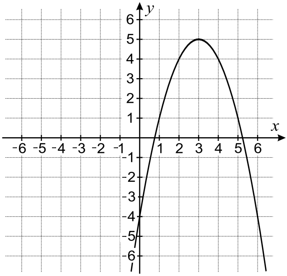
G7 – Punkte, Geraden und Ebenen, gemischte Aufgaben 1

Dieses Domino enthält verschiedene Geometrie-Aufgaben. Die Aufgaben werden entsprechend der Dominos zum jeweiligen Thema gelöst.

A2 – Verschobene Parabeln 1

Ziel ist es, zu einer gegebenen Kurve die Parabelgleichung in Normalform zu bestimmen. Dazu wird anhand der Lage des Scheitels der Parabel die Scheitelform aufgestellt und diese durch Auflösen der Klammer in die Normalform gebracht.

Beispiel:



Schrittweise Entwicklung der Scheitelform:

1. Der Scheitel ist um 3 LE nach rechts verschoben: $y = (x-3)^2$
2. Die Parabel ist nach unten geöffnet: $y = -(x-3)^2$
3. Der Scheitel ist um 5 LE nach oben verschoben: $y = -(x-3)^2 + 5$
   (Diese Gleichung ist die Scheitelform)

Zum Schluss wird die Klammer in der Scheitelform aufgelöst, um die Normalform der Parabelgleichung zu erhalten:

$$
\begin{aligned}
y &= -(x-3)^2 + 5 \\
&= -\left(x^2 - 6x + 9\right) + 5 \\
&= -x^2 + 6x - 9 + 5 \\
&= -x^2 + 6x - 4
\end{aligned}
$$

A3 – Verschobene Parabeln 2

Ziel ist es, die gegebene Normalform einer Parabelgleichung in die Scheitelform umzuformen und dieser die passende Kurve zuzuordnen. Die Scheitel-form $y=(x-2)^2+5$ ist beispielsweise eine nach oben geöffnete Parabel, deren Scheitel $2\,\mathrm{LE}$ nach rechts und $5\,\mathrm{LE}$ nach oben verschoben wurde.

1. Beispiel:

$$
\begin{aligned}
y &= x^2-6x+4 && \text{Der mittlere Term wird umgeschrieben}\\
&= x^2-2\cdot 3x+4 && 3^2 \text{ wird addiert und wieder abgezogen}\\
&= x^2-2\cdot 3x+3^2+4-3^2 && \text{Binomische Formel 'rückwärts' anwenden}\\
&= (x-3)^2-5 && \text{Die Parabel steht in Scheitelform da}
\end{aligned}
$$

Nun kann die Kurve gesucht werden, die nach oben geöffnet, um $3\,\mathrm{LE}$ nach rechts und um $5\,\mathrm{LE}$ nach unten verschoben ist.

2. Beispiel (negatives Vorzeichen vor dem x^2):

$$
\begin{aligned}
y &= -x^2-6x-4 && \text{Das Minuszeichen wird ausgeklammert}\\
&= -\left(x^2+6x+4\right) && \text{Der mittlere Term wird umgeschrieben}\\
&= -\left(x^2+2\cdot 3x+4\right) && 3^2 \text{ wird addiert und wieder abgezogen}\\
&= -\left(x^2+2\cdot 3x+3^2+4-3^2\right) && \text{Binomische Formel 'rückwärts' anwenden}\\
&= -\left((x+3)^2-5\right) && \text{Die Minusklammer wird aufgelöst}\\
&= -(x+3)^2+5 && \text{Die Parabel steht in Scheitelform da}
\end{aligned}
$$

Nun kann die Kurve gesucht werden, die nach unten geöffnet, um $3\,\mathrm{LE}$ nach links und um $5\,\mathrm{LE}$ nach oben verschoben ist.

A8 – Ganzrationale Funktionen mit Linearfaktoransatz 1

Ziel ist es, zu einem gegebenen Funktionsterm die entsprechende Kurve zu finden. Diese wird mit Hilfe der Linearfaktoren – das sind Ausdrücke wie $(x-2)$ oder $(x+4)$ – bestimmt.

Zunächst ermittelt man die Nullstellen der Kurve, indem man die Linearfaktoren gleich Null setzt. Ist eine Klammer für einen x-Wert gleich Null, schneidet oder berührt die Kurve die x-Achse an dieser Stelle.

Die Hochzahl des Linearfaktors

Ist die Hochzahl gleich 1, schneidet die Kurve die x-Achse.
Ist die Hochzahl gleich 2, berührt die Kurve die x-Achse.

Der Leitkoeffizient

Das Vorzeichen vor den Linearfaktoren bestimmt das Verhalten der Kurve für $x \to \infty$. Ist das Vorzeichen positiv, geht die Kurve für $x \to +\infty$ nach oben, ist das Vorzeichen negativ, geht die Kurve für $x \to +\infty$ nach unten.

Beispiel: $f(x) = -\frac{1}{4}(x+1) \cdot (x-4)^2$

Aus $(x+1) = 0$ ergibt sich $x_1 = -1$, Schnittpunkt bei $(-1 \mid 0)$.
Aus $(x-4)^2 = 0$ ergibt sich $x_2 = 4$, Berührpunkt bei $(4 \mid 0)$.

Die Kurve von f schneidet also die x-Achse also bei $x_1 = -1$, berührt sie bei $x_2 = 4$ und die Kurve geht für $x \to +\infty$ nach unten.

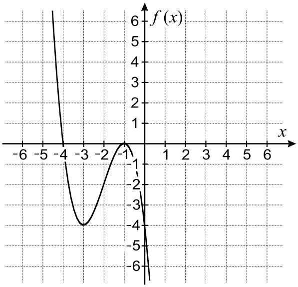
A9 – Ganzrationale Funktionen mit Linearfaktoransatz 2

Ziel ist es, zu einer gegebenen Kurve den entsprechenden Funktionsterm zu finden.

Die Linearfaktoren des Funktionsterms lassen sich durch die Nullstellen der Kurve ermitteln. Schneidet oder berührt die Kurve die *x*-Achse, muss der zugehörige Linearfaktor für diesen *x*-Wert gleich Null sein.

Für die Vorzeichen innerhalb der Linearfaktoren, die Hochzahlen der Linearfaktoren und die Leitkoeffizienten gelten die gleichen Regeln wie bei Domino A8.

Beispiel:



- Es gibt Schnittstelle mit der *x*-Achse bei $x = -4$, d.h. der erste Linearfaktor ist $(x+4)$
- Es gibt ein Berührstelle der *x*-Achse bei $x = -1$, d.h. der zweite Linearfaktor ist $(x+1)^2$
- Der rechte Kurvenast geht für $x \to \infty$ nach unten, also ist der Leitkoeffizient negativ.

Damit ist $f(x) = a \cdot (x+4) \cdot (x+1)^2$ für eine negative Zahl $a < 0$.

A10 – Verschobene ganzrationale und gebrochenrationale Funktionen 1

Ziel ist, zu einem gegebenen Funktionsterm die entsprechende Kurve zu finden. Dies geschieht mithilfe der folgenden charakteristischen Eigenschaften:

Polstellen

Gebrochenrationale Funktionen ohne x im Zähler haben Polstellen bei den Nullstellen des Nenners. Besitzt der Linearfaktor im Nenner eine gerade Hochzahl, so handelt es sich um eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel (beide Äste der Kurve gehen in die gleiche Richtung), ansonsten handelt es sich um eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel.

Gerade / ungerade Hochzahlen

Kurven von ganzrationalen Funktionen 2. oder 4. Grades mit geraden Hochzahlen wie $f(x) = x^2$ oder $f(x) = (x-2)^2$ sind achsensymmetrisch; ganzrationale Funktionen mit ungeraden Hochzahlen wie $f(x) = (x-2)^3$ sind punktsymmetrisch.

Verschiebung nach rechts / links sowie oben / unten

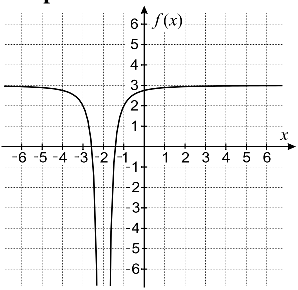
Kurven von Funktionen, bei denen statt des x ein Ausdruck wie $(x+a)$ oder $(x-a)$ steht, sind um a LE nach links oder rechts verschoben. $f(x) = (x-2)^2$ ist beispielsweise eine Normalparabel, die um 2 LE nach rechts verschoben wurde; $f(x) = (x+1)^3$ ist eine kubische Parabel, die um 1 LE nach links verschoben wurde. Das absolute Glied (der Ausdruck ohne x) verschiebt die Kurve nach oben oder unten.

A11 – Verschobene ganzrationale und gebrochenrationale Funktionen 2

Ziel ist es, zu einer gegebenen Kurve den entsprechenden Funktionsterm zu finden. Die Grundfunktionen sind: $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \frac{1}{x}$ und $y = \frac{1}{x^2}$.

Dies geschieht mit Hilfe von charakteristischen Eigenschaften der Kurven (siehe Domino A10).

Beispiel:



- Polstelle bei $x = -2$, d.h. im Nenner steht $(x+2)^k$
- Die Polstelle besitzt keinen Vorzeichenwechsel, also muss die Hochzahl k gerade sein, d.h. der Ausdruck im Nenner lautet $(x+2)^2$ (oder $(x+2)^4$ etc.)

- Für $x \to -2$ geht auch der rechte Ast der Kurve gegen $-\infty$, also hat der Funktionsterm ein negatives Vorzeichen.
- Die Kurve hat die waagerechte Asymptote $y = 3$, daher hat das absolute Glied den Wert 3.

Damit ergibt sich als mögliche Funktion: $f(x) = -\frac{1}{(x+2)^2} + 3$; $x \neq -2$

A26 – Kurven bestimmen mit f, f' und f''

Ziel ist es, aus den gegebenen Informationen über die Funktion sowie ihre erste und zweite Ableitung die zugehörige Kurve zu bestimmen. Dafür gibt es drei Kriterien:

Die Punkt-Bedingung $f(u) = v$
Der Punkt P(u | v) muss auf der Kurve liegen

Die Steigungs-Bedingung $f'(u) = m$
Im Punkt P muss die eingezeichnete Tangente t die Steigung m besitzen.

Die Krümmung der Kurve $f''(u) = k$
Der Wert der zweiten Ableitung gibt die Krümmung der Kurve in P bzw. die Drehrichtung der Tangente an:

$k > 0$: Die Kurve ist in P linksgekrümmt (Drehung gegen den Uhrzeigersinn)
$k < 0$: Die Kurve ist in P rechtsgekrümmt (Drehung im Uhrzeigersinn)
$k = 0$: Die Kurve besitzt in P einen Wendepunkt (keine Krümmung)

Beispiel:

$f(-3) = 2$ Die Kurve geht durch den Punkt P$(-3 \mid 2)$
$f'(-3) = -1$ Die Tangente hat in P die Steigung -1
$f''(-3) = -4$ Die Kurve ist in P rechtsgekrümmt

A28 – Graphisches Ableiten

Ziel ist es, zu den gegebenen Kurven die entsprechenden Ableitungskurven zu bestimmen.

Dabei gilt, dass die Steigungswerte der Kurve in jedem Punkt genau die Werte der Ableitung der zugehörigen Funktion in diesem Punkt sind. Ist der Kurvenverlauf eher «flach», sind die Werte der Ableitung nahe Null, ist er «steil», besitzt die Ableitung betragsmäßig große Werte.

Für die charakteristischen Punkte der Kurven gilt:

Funktion $f(x)$	**Ableitung** $f'(x)$
Hochpunkt	Nullstelle mit VZW von $+$ nach $-$
Tiefpunkt	Nullstelle mit VZW von $-$ nach $+$
Wendepunkt mit Krümmungsänderung von rechts nach links	Tiefpunkt
Wendepunkt mit Krümmungsänderung von links nach rechts	Hochpunkt
Polstelle mit VZW	Polstelle ohne VZW
Polstelle ohne VZW	Polstelle mit VZW

A30 – Ableiten mit der Kettenregel

Ziel ist es, zu jeder gegebenen Funktion ihre Ableitung mit Hilfe der Kettenregel zu bestimmen.

Die Kettenregel für verkettete (oder verschachtelte) Funktionen lautet:

«Äußere Ableitung mal innere Ableitung»

Beispiel:

$$f(x) = 3\sin(2x+4)$$

$$f'(x) = \underbrace{3\cos(2x+4)}_{\text{ä. A.}} \cdot \underbrace{\ 2\ }_{\text{i. A.}} = 6\cos(2x+4)$$

Folgende Ableitungsregeln sollten für das Domino bekannt sein:

$f(x)$	$f'(x)$
$a \cdot x^n$	$n \cdot a \cdot x^{n-1}$
$\frac{a}{x^n} = a \cdot x^{-n}$	$-n \cdot a \cdot x^{-n-1} = -\frac{a \cdot n}{x^{n+1}}$
$a \cdot e^x$	$a \cdot e^x$
$a \cdot \sin x$	$a \cdot \cos x$
$a \cdot \cos x$	$-a \cdot \sin x$

Der konstante Faktor a bleibt beim Ableiten unverändert!

A33 – Stammfunktion bestimmen durch lineare Substitution

Zu jeder angegebenen Funktion soll eine Stammfunktion mit Hilfe linearer Substitution bestimmt werden.

Die Integrationsregel für verkettete (verschachtelte) Funktionen mit innerem **linearen** Term lautet:

«Äußere Stammfunktion geteilt durch innere Ableitung»

Beispiele:

$f(x) = 3\cos(2x+4)$ also ist $\mathrm{F}(x) = \frac{3\sin(2x+4)}{2} = \frac{3}{2}\sin(2x+4)$

$f(x) = \frac{4}{(2x-3)^2} = 4\cdot(2x-3)^{-2}$ also ist $\mathrm{F}(x) = \frac{\frac{1}{-1}\cdot 4\cdot(2x-3)^{-1}}{2} = -\frac{2}{(2x-3)}$

Folgende Stammfunktionen sollten für das Domino bekannt sein:

$f(x)$	$\mathrm{F}(x)$
$a\cdot x^n;\ n \geqslant 0$	$\frac{1}{n+1}\cdot a\cdot x^{n+1}$
$\frac{a}{x^n} = a\cdot x^{-n};\ n \geqslant 2$	$-\frac{1}{n+1}\cdot a\cdot x^{-n+1}$
$a\cdot e^x$	$a\cdot e^x$
$a\cdot\sin x$	$-a\cdot\cos x$
$a\cdot\cos x$	$a\cdot\sin x$

Der konstante Faktor *a* bleibt beim Integrieren unverändert!