

Gruber | Neumann

Erfolg im Mathe-Abi 2017

Übungsaufgaben
für den Wahlteil
Baden-Württemberg
mit Tipps und Lösungen

Freiburger
Verlag

Inhaltsverzeichnis

Analysis

1	Tunnel	7
2	Windkraftanlage.....	8
3	Testzug	9
4	Abkühlung.....	10
5	Malaria	11
6	Sonnenblume.....	12
7	Kanal	13
8	Fische	14
9	Funktionenscharen.....	15

Geometrie

10	Turm	17
11	Solarzellen.....	18
12	Ebenenschar	19
13	Pyramide.....	20
14	Wintergarten	21
15	Haus am Hang	22

Stochastik

16	Baumdiagramme und Pfadregeln.....	23
17	Binomialverteilung	25
18	Erwartungswert	28
19	Hypothesentests	30

Tipps	33
--------------------	-----------

Lösungen	49
-----------------------	-----------

Original Abituraufgaben 2013.....	111
--	------------

Original Abituraufgaben 2014.....	145
--	------------

Original Abituraufgaben 2015.....	179
--	------------

Original Abituraufgaben 2016.....	213
--	------------

Stichwortverzeichnis	253
-----------------------------------	------------

Vorwort

Erfolg von Anfang an

... ist das Geheimnis eines guten Abiturs. Das vorliegende Übungsbuch ist speziell auf die Anforderungen des Wahlteils des Mathematik-Abiturs in Baden-Württemberg ab 2017 abgestimmt. Es umfasst die drei großen Themenbereiche Analysis, Analytische Geometrie und Stochastik sowie Abituraufgaben seit 2013 in einem Buch. Ab 2017 ändert sich die Struktur des Wahlteils grundlegend: Insgesamt gibt es 40 Verrechnungspunkte (VP). In Analysis gibt es eine sehr umfangreiche Aufgabe mit 20 VP, in der Analytischen Geometrie und in Stochastik gibt es jeweils eine Aufgabe mit 10 VP. Daher haben wir die Original-Prüfungsaufgaben teilweise gekürzt oder erweitert und durch gleichwertige Aufgaben ersetzt (Ergänzungen sind mit * gekennzeichnet). Auch die Benennung der Aufgaben wurde angepasst: Pro Jahrgang gibt es jetzt zwei Aufgaben aus der Analysis (A und B), zwei Aufgaben aus der Analytischen Geometrie (A und B) sowie zwei Aufgaben aus der Stochastik (A und B). Alle Aufgaben sind gleichermaßen für GTR und CAS geeignet.

Durch diese Anpassung erhalten Sie die bestmögliche Vorbereitung auf die Abiturprüfung!

Der Wahlteil besteht aus komplexeren Aufgaben, die mithilfe eines grafikfähigen Taschenrechners (GTR/CAS) und einer Merkhilfe gelöst werden sollen. Der Schwerpunkt liegt auf der Analysis. Thematisch geht es meist um anwendungsbezogene Transferaufgaben, um das Modellieren realitätsnaher Aufgabenstellungen, um das Herstellen von Zusammenhängen und um das Entwickeln von Lösungsstrategien.

Der blaue Tippteil

Hat man einmal keine Idee, wie man eine Aufgabe angehen soll bzw. fehlt der Lösungsansatz, hilft der blaue Tippteil in der Mitte des Buches weiter: Zu jeder Aufgabe gibt es dort Tipps, die helfen, einen Ansatz zu finden, ohne die Lösung vorwegzunehmen.

Die Kontrollkästchen



Damit Sie immer den Überblick behalten können, welche Aufgaben Sie schon bearbeitet haben, befindet sich neben jedem Aufgabentitel ein Kontrollkästchen zum Abhaken.


MeinMatheAbi.de

Im Internet finden Sie unter www.MeinMatheAbi.de/bw-abi weitere Abituraufgaben.

Dort gibt es auch Lernkarten (auch als App), Taschenrechneranleitungen für verschiedene Taschenrechnerarten, Videotutorials und ein Forum, das die Vorbereitung auf die Prüfung erleichtert.

Die grafikfähigen Taschenrechner können nicht nur Funktionsgraphen zeichnen und besondere Punkte bestimmen. Sie können z.B. auch Gleichungen und lineare Gleichungssysteme lösen, Integrale berechnen, Binomialverteilungen angeben, etc.

Ist es sinnvoll, eine bestimmte Taschenrechnerfunktion zu nutzen, befindet sich an der entsprechenden Stelle ein QR-Code und ein Direktlink auf das entsprechende Video, in dem diese Funktion des Taschenrechners kurz erklärt wird. Der QR-Code kann mit einer entsprechenden App gescannt werden. Alternativ lässt sich auch der Link unter dem Code benutzen.

 Der Code neben diesem Text verweist beispielsweise auf ein Video zur Bestimmung der kumulierten Binomialverteilung.
frv.tv/as

Der Aufbau der Mathematikprüfung

- Die gesamte Prüfungszeit beträgt 270 Minuten (4,5 Zeitstunden).
- Der Lehrer erhält vor der Prüfung den Pflichtteil (HMF) und für den Wahlteil zwei Aufgabenvorschläge aus Analysis (A und B), zwei aus Analytischer Geometrie (A und B) sowie zwei aus Stochastik (A und B). Er wählt aus den Vorschlägen für den Wahlteil je einen aus Analysis, einen aus Analytischer Geometrie und einen aus Stochastik aus.
- Die Schüler erhalten zu Beginn der Prüfung alle Aufgaben (den Pflichtteil (HMF) und den vom Lehrer ausgesuchten Wahlteil, bestehend aus Analysis, Geometrie und Stochastik). Sie erhalten zu diesem Zeitpunkt noch keine Hilfsmittel.
- Die Schüler bearbeiten zunächst den Pflichtteil (HMF). Nach dessen Abgabe erhalten sie die Hilfsmittel (Taschenrechner, Merkhilfe) für den Wahlteil.

Insgesamt können maximal 60 Verrechnungspunkte in der Prüfung erreicht werden, davon 20 im Pflichtteil (HMF) und 40 im Wahlteil.

Allen Schülern, die sich auf das Abitur vorbereiten, wünschen wir viel Erfolg!

Helmut Gruber, Robert Neumann

Stochastik

16 Baumdiagramme und Pfadregeln



Tipps ab Seite 44, Lösungen ab Seite 92

a) Eine Urne enthält n blaue und 6 rote Kugeln.

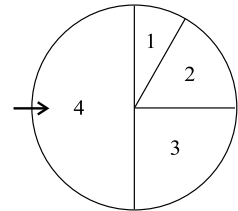
I) Es werden 2 Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Wie viele blaue Kugeln müssen sich in der Urne befinden, damit die Wahrscheinlichkeit, höchstens eine blaue Kugel zu ziehen, 0,64 beträgt?

II) Es werden 3 Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Bestimmen Sie die Anzahl der blauen Kugeln, wenn die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine blaue Kugel zu ziehen, $\frac{19}{27}$ betragen soll.

b) Ein Glücksrad besteht aus vier Kreissektoren, die mit den Zahlen 1, 2, 3 und 4 versehen sind.

Die Mittelpunktswinkel der verschiedenen Sektoren haben die Weiten 30° , 60° , 90° und 180° (siehe Abbildung).

Nach jeder Drehung gilt diejenige Zahl als gezogen, auf deren Kreissektor der feststehende Pfeil zeigt.



I) Wie oft müsste man das Glücksrad drehen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 97 % mindestens einmal die Zahl 4 gezogen wird?

II) Wie groß müsste der zur Zahl 1 gehörende Mittelpunktswinkel sein, damit bei dreimaligem Drehen mit 99,9%-iger Wahrscheinlichkeit höchstens zweimal die Zahl 1 gezogen wird?

c) In einer Urne sind 4 weiße und eine unbekannte Anzahl roter Kugeln.

I) Es werden 2 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Wie viele rote Kugeln waren vorhanden, wenn die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kugeln weiß sind, $\frac{1}{6}$ beträgt?

II) Es werden 3 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Wie viele rote Kugeln waren vorhanden, wenn die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine Kugel weiß ist, $\frac{17}{28}$ beträgt?

- d) In einem Gefäß sind 6 rote und n blaue Kugeln. Es werden 3 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.
- I) Wie viele blaue Kugeln waren vorhanden, wenn die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine Kugel rot ist, $\frac{11}{14}$ beträgt?
 - II) Für welche Werte von n beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei Kugeln blau sind, wenigstens 90%?
- e) Eine Urne enthält sechs rote und eine blaue Kugel. Für ein Glücksspiel wird folgende Regel vereinbart:
Es wird genau eine Kugel gezogen. Ist die gezogene Kugel blau, so wird sie in die Urne zurückgelegt. Ist sie dagegen rot, so wird sie beiseite gelegt und in der Urne durch eine blaue ersetzt.
- I) Das Glücksspiel wird dreimal durchgeführt und jeweils die Farbe der gezogenen Kugel festgestellt.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine der Kugeln blau ist.
 - II) Ein Glücksspieler behauptet, dass man mindestens zwei Ziehungen durchführen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% mindestens eine rote Kugel zu ziehen. Hat er Recht?

Stochastik

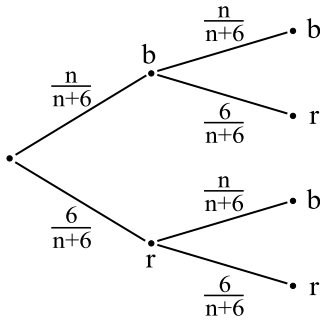
16 Baumdiagramme und Pfadregeln

- a) I) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm mit den Ästen blau (b) und rot (r). Beachten Sie, dass die Wahrscheinlichkeiten bei jedem Ziehen gleich bleiben. Rechnen Sie mit dem Gegenereignis \bar{A} , indem Sie $P(A) = 1 - P(\bar{A})$ verwenden. Stellen Sie eine Gleichung auf und lösen Sie diese mithilfe des GTR/CAS. Beachten Sie, dass $n > 0$ ist.
- II) Rechnen Sie mit dem Gegenereignis \bar{A} , indem Sie $P(A) = 1 - P(\bar{A})$ verwenden. Stellen Sie eine Gleichung auf und lösen Sie diese mithilfe des GTR/CAS. Beachten Sie, dass $n > 0$ ist.
- b) I) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Zahlen, indem Sie den zugehörigen Mittelpunktswinkel durch 360° teilen. Verwenden Sie für das gesuchte Ereignis bei n Drehungen das Gegenereignis, stellen Sie eine Gleichung auf und lösen Sie diese mithilfe des GTR/CAS.
- II) Beachten Sie, dass für die Wahrscheinlichkeit der Zahl 1 gilt: $P(1) = \frac{\alpha}{360^\circ}$. Verwenden Sie für das gesuchte Ereignis bei 3 Drehungen das Gegenereignis, stellen Sie eine Gleichung auf und lösen Sie diese mithilfe des GTR/CAS.
- c) I) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm mit den Ästen weiß (w) und rot (r). Beachten Sie, dass sich die Wahrscheinlichkeiten bei jedem Ziehen ändern. Verwenden Sie die 1. Pfadregel, stellen Sie eine Gleichung auf und lösen Sie diese mithilfe des GTR/CAS. Beachten Sie, dass $n > 0$ ist.
- II) Rechnen Sie mit dem Gegenereignis \bar{A} , indem Sie $P(A) = 1 - P(\bar{A})$ verwenden. Stellen Sie eine Gleichung auf und lösen Sie diese mithilfe des GTR/CAS. Beachten Sie, dass $n > 0$ ist.
- d) I) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm mit den Ästen blau (b) und rot (r). Beachten Sie, dass sich die Wahrscheinlichkeiten bei jedem Ziehen ändern. Rechnen Sie mit dem Gegenereignis \bar{A} , indem Sie $P(A) = 1 - P(\bar{A})$ verwenden. Stellen Sie eine Gleichung auf und lösen Sie diese mithilfe des GTR/CAS. Beachten Sie, dass $n > 0$ ist.
- II) Überlegen Sie, welche Ergebnisse zum gesuchten Ereignis gehören und verwenden Sie die Pfadregeln. Stellen Sie eine Ungleichung auf und lösen Sie diese mithilfe des GTR/CAS. Beachten Sie, dass $n > 0$ ist.
- e) I) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm mit blau (b) und rot (r). Beachten Sie, dass sich nach Ziehung einer roten Kugel die Verhältnisse in der Urne ändern. Rechnen Sie mit dem Gegenereignis \bar{A} , indem Sie $P(A) = 1 - P(\bar{A})$ verwenden.

Stochastik

16 Baumdiagramme und Pfadregeln

a) I)



Wenn im Behälter 6 rote und n blaue Kugeln sind, gibt es insgesamt $n + 6$ Kugeln. Damit beträgt die Wahrscheinlichkeit bei jedem Ziehen für blau (b): $\frac{n}{n+6}$ und für rot (r): $\frac{6}{n+6}$.

Da die Wahrscheinlichkeit, höchstens eine blaue Kugel zu ziehen, 0,64 betragen soll, erhält man (am geschicktesten) mithilfe des Gegenereignisses folgende Gleichung:

$$P(\text{«höchstens eine blaue Kugel»}) = 1 - P(\text{«zwei blaue Kugeln»})$$

$$0,64 = 1 - P(bb)$$

$$0,64 = 1 - \frac{n}{n+6} \cdot \frac{n}{n+6}$$

$$\frac{n}{n+6} \cdot \frac{n}{n+6} = 0,36$$



frv.tv/an

Mithilfe des GTR/CAS erhält man: $n_1 = 9$ und $n_2 = -\frac{9}{4}$.

Wegen $n > 0$ kommt nur $n_1 = 9$ als Lösung in Frage.

Also müssen sich im Behälter 9 blaue Kugeln befinden.

II) Da die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine blaue Kugel zu ziehen, $\frac{19}{27}$ betragen soll, erhält man (am geschicktesten) mithilfe des Gegenereignisses folgende Gleichung:

$$P(\text{«mindestens eine blaue Kugel»}) = 1 - P(\text{«keine blaue Kugel»})$$

$$\frac{19}{27} = 1 - P(rrr)$$

$$\frac{19}{27} = 1 - \frac{6}{n+6} \cdot \frac{6}{n+6} \cdot \frac{6}{n+6}$$

$$\frac{6}{n+6} \cdot \frac{6}{n+6} \cdot \frac{6}{n+6} = \frac{8}{27}$$



frv.tv/an

Man erhält mithilfe des GTR/CAS: $n = 3$.

Also müssen sich im Behälter 3 blaue Kugeln befinden.

- b) I) Die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Zahlen erhält man, indem man den zugehörigen Mittelpunktswinkel durch 360° teilt:

$$P(1) = \frac{30^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{12}$$

$$P(2) = \frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{6}$$

$$P(3) = \frac{90^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{4}$$

$$P(4) = \frac{180^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{2}$$

Zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit, dass bei n Drehungen des Glücksrads mindestens einmal die Zahl 4 erscheint, verwendet man das Gegenereignis «keine 4 erscheint»:

$$P(\text{«mindestens einmal 4»}) = 1 - P(\text{«keine 4»}) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Damit diese Wahrscheinlichkeit etwa 97% beträgt, muss gelten:

$$0,97 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0,03$$

Mithilfe des GTR/CAS erhält man: $n \approx 5,06$.

Also muss man etwa fünfmal drehen, damit mit etwa 97%-iger Wahrscheinlichkeit mindestens einmal die Zahl 4 erscheint.



frv.tv/an

- II) Allgemein gilt für die Zahl 1 die Wahrscheinlichkeit $P(1) = \frac{\alpha}{360^\circ}$.

Das Gegenereignis von höchstens zweimal die Zahl 1 ziehen ist genau dreimal die Zahl 1 ziehen; dieses hat die Wahrscheinlichkeit $P(111) = \left(\frac{\alpha}{360^\circ}\right)^3$.

Damit gilt für die Wahrscheinlichkeit, höchstens zweimal die Zahl 1 ziehen:

$$P(\text{«höchstens zweimal 1»}) = 0,999$$

$$1 - P(111) = 0,999$$

$$1 - \left(\frac{\alpha}{360^\circ}\right)^3 = 0,999$$

$$0,001 = \left(\frac{\alpha}{360^\circ}\right)^3$$

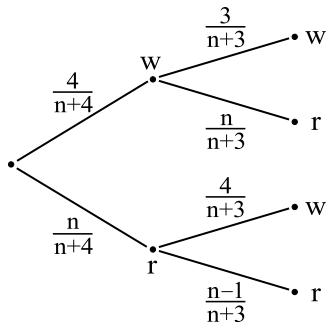
Mithilfe des GTR/CAS erhält man: $\alpha = 36^\circ$.

Der Mittelpunktswinkel für die Zahl 1 muss also 36° betragen.



frv.tv/an

c) I)



Wenn in der Urne 4 weiße und n rote Kugeln sind, gibt es insgesamt $n + 4$ Kugeln. Damit beträgt die Wahrscheinlichkeit beim 1. Ziehen für weiß (w): $\frac{4}{n+4}$ und für rot (r): $\frac{n}{n+4}$. Beim 2. Ziehen sind nur noch $n + 3$ Kugeln vorhanden und die Wahrscheinlichkeiten hängen davon ab, welche Farbe schon gezogen wurde.

Da die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kugeln weiß sind, $\frac{1}{6}$ betragen soll, erhält man mithilfe der 1. Pfadregel folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} P(\text{«beide Kugeln weiß»}) &= P(\text{ww}) \\ \frac{1}{6} &= \frac{4}{n+4} \cdot \frac{3}{n+3} \\ (n+4) \cdot (n+3) &= 72 \\ n^2 + 7n - 60 &= 0 \end{aligned}$$

Mithilfe des GTR/CAS erhält man: $n_1 = 5$ und $n_2 = -12$.

Wegen $n > 0$ kommt nur $n_1 = 5$ als Lösung in Frage.

Also waren in der Urne 5 rote Kugeln vorhanden.

II) Da die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine weiße Kugel zu ziehen, $\frac{17}{28}$ betragen soll, erhält man (am geschicktesten) mithilfe des Gegenereignisses folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} P(\text{«mindestens eine weiße Kugel»}) &= 1 - P(\text{«keine weiße Kugel»}) \\ \frac{17}{28} &= 1 - P(\text{rrr}) \\ \frac{17}{28} &= 1 - \frac{n}{n+4} \cdot \frac{n-1}{n+3} \cdot \frac{n-2}{n+2} \\ \frac{n}{n+4} \cdot \frac{n-1}{n+3} \cdot \frac{n-2}{n+2} &= \frac{11}{28} \end{aligned}$$

Wegen $n > 0$ erhält man mithilfe des GTR/CAS: $n = 12$.

Also waren in der Urne 12 rote Kugeln vorhanden.

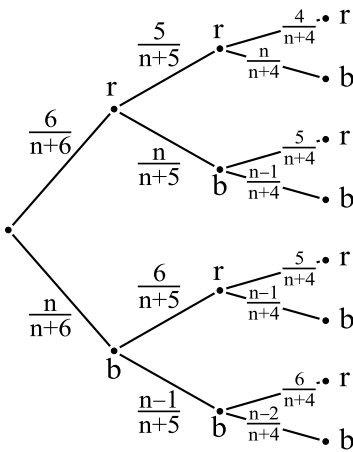


frv.tv/an



frv.tv/an

d) I)



Wenn im Gefäß 6 rote und n blaue Kugeln sind, gibt es insgesamt $n + 6$ Kugeln. Damit beträgt die Wahrscheinlichkeit beim 1. Ziehen Ziehen für blau (b): $\frac{n}{n+6}$ und für rot (r): $\frac{6}{n+6}$. Beim jedem weiteren Ziehen sind weniger Kugeln vorhanden und die Wahrscheinlichkeiten hängen davon ab, welche Farbe schon gezogen wurde.

Da die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine rote Kugel zu ziehen, $\frac{11}{14}$ betragen soll, erhält man (am geschicktesten) mithilfe des Gegenereignisses folgende Gleichung:

$$P(\text{«mindestens eine rote Kugel»}) = 1 - P(\text{«keine rote Kugel»})$$

$$\begin{aligned} \frac{11}{14} &= 1 - P(\text{bbb}) \\ \frac{11}{14} &= 1 - \frac{n}{n+6} \cdot \frac{n-1}{n+5} \cdot \frac{n-2}{n+4} \\ \frac{n}{n+6} \cdot \frac{n-1}{n+5} \cdot \frac{n-2}{n+4} &= \frac{3}{14} \end{aligned}$$

Wegen $n > 0$ erhält man mithilfe des GTR/CAS: $n = 10$.

Also waren im Gefäß 10 blaue Kugeln vorhanden.



frv.tv/an

II) Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei der Kugeln blau sind, soll wenigstens $90\% = 0,9$ betragen. Man erhält daher mithilfe der 1. und 2. Pfadregel folgende Ungleichung:

$$\begin{aligned} 0,9 &\leq P(\text{«mindestens zwei blaue Kugeln»}) \\ 0,9 &\leq P(\text{bbr}) + P(\text{brb}) + P(\text{rbb}) + P(\text{bbb}) \\ 0,9 &\leq \frac{n}{n+6} \cdot \frac{n-1}{n+5} \cdot \frac{6}{n+4} + \frac{n}{n+6} \cdot \frac{6}{n+5} \cdot \frac{n-1}{n+4} + \frac{6}{n+6} \cdot \frac{n}{n+5} \cdot \frac{n-1}{n+4} \\ &\quad + \frac{n}{n+6} \cdot \frac{n-1}{n+5} \cdot \frac{n-2}{n+4} \\ 0,9 &\leq \frac{(18n + n \cdot (n-2)) \cdot (n-1)}{(n+6) \cdot (n+5) \cdot (n+4)} \end{aligned}$$

Wegen $n > 0$ erhält man mithilfe des GTR/CAS: $n \geq 22,98$.

Also müssen im Gefäß mindestens 23 blaue Kugeln vorhanden sein.

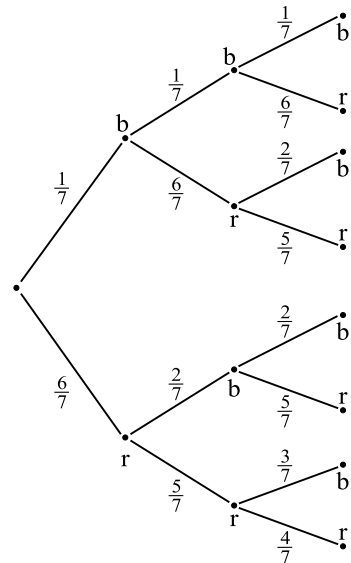


frv.tv/an

- e) I) Um eine Übersicht über alle möglichen Ausgänge des Spiels und deren Wahrscheinlichkeiten zu erhalten, bietet es sich an, ein Baumdiagramm zu zeichnen. Dabei ist darauf zu achten, dass sich nach Ziehung einer roten Kugel die Verhältnisse in der Urne ändern. Es ist b: blau und r: rot.

Die einzelnen Ziehungen sind nicht unabhängig voneinander, da die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Ziehung vom Ausgang der vorherigen Ziehung abhängt. Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine Kugel blau ist, erhält man mithilfe des Gegenereignisses:

$$\begin{aligned}
 P(\text{«mindestens eine blaue Kugel»}) &= 1 - P(\text{«alle Kugeln rot»}) = 1 - P(rrr) \\
 &= 1 - \frac{6}{7} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{7} = \frac{223}{343} \approx 0,650 = 65,0\%
 \end{aligned}$$



- II) Zuerst bestimmt man die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A: «Mindestens eine Kugel ist rot bei n Ziehungen».

Hierzu verwendet man das Gegenereignis \bar{A} : «Alle n Kugeln sind blau.»

Es gilt:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \left(\frac{1}{7}\right)^n$$

Der Spieler behauptet, dass $P(A) \geq 0,99$ für alle $n \geq 2$.

Nun berechnet man, für welche n die Wahrscheinlichkeit $P(A) \geq 0,99$ gilt:

$$\begin{aligned}
 1 - \left(\frac{1}{7}\right)^n &\geq 0,99 \\
 0,01 &\geq \left(\frac{1}{7}\right)^n
 \end{aligned}$$

Mithilfe des GTR/CAS erhält man: $n \geq 2,37$.

Die Behauptung des Spielers ist falsch, da $P(A) \geq 0,99$ erst für $n \geq 3$ gilt.

