

Gruber | Neumann

Erfolg im Mathe-Abi 2012

**Übungsbuch für den Pflichtteil
Baden-Württemberg
mit Tipps und Lösungen**

Freiburger
Verlag

Inhaltsverzeichnis

1 Analysis

1.1 Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten	11
1.2 Potenzfunktionen mit negativen Exponenten	12
1.3 Potenzfunktionen mit gebrochenen Exponenten	12
1.4 Exponentialfunktionen	12
1.5 Trigonometrische Funktionen	12
1.6 Vermischte Aufgaben	12

2 Stammfunktionen und Integrale

2.1 Stammfunktionen	13
2.2 Integrale und Integralfunktionen	14
2.3 * Flächeninhalt zwischen zwei Kurven	15
2.4 * Ins Unendliche reichende Flächen	15
2.5 * Angewandte Integrale	16
2.6 * Rotationskörper	16

3 Gleichungen

3.1 Quadratische, biquadratische und nichtlineare Gleichungen	17
3.2 Exponentialgleichungen	17
3.3 Bruchgleichungen	18
3.4 Trigonometrische Gleichungen	19

4 Funktionen und Schaubilder

4.1 Von der Gleichung zur Kurve	21
4.2 Aufstellen von Funktionen mit Randbedingungen	23
4.3 Von der Kurve zur Gleichung	26

5 Eigenschaften von Kurven

5.1 Schaubilder von f , f' und F	30
5.2 Kurvendiskussion	37

6 Punkte, Geraden und Ebenen

6.1 Rechnen mit Vektoren	43
6.2 Geraden	47

6.3 Ebenen	50
6.4 Gegenseitige Lage von Geraden und Ebenen	54
6.5 Gegenseitige Lage von Ebenen	57
7 Abstände, Winkel und Spiegelungen	
7.1 Abstandsberechnungen	59
7.2 Winkelberechnungen	62
7.3 Spiegelungen	64
Tipps	65
Lösungen	90
Original-Abituraufgaben	177
Stichwortverzeichnis	223

Vorwort

Erfolg von Anfang an

...ist das Geheimnis eines guten Abiturs.

Das vorliegende Übungsbuch ist speziell auf die grundlegenden Anforderungen des Pflichtteils des Doppel-Abiturs G8/G9 in Baden-Württemberg abgestimmt. Es umfasst die zwei großen Themenbereiche Analysis und Geometrie sowie die Original-Abituraufgaben seit 2006 in einem Buch.

Der Pflichtteil besteht aus mehreren kleinen Aufgaben, die ohne Taschenrechner und ohne Formelsammlung gelöst werden müssen. Genau hierfür wurde das vorliegende Buch konzipiert: Es fördert das Grundwissen und die Grundkompetenzen in Mathematik, vom einfachen Rechnen und Formelanwenden bis zum Verstehen von gedanklichen Zusammenhängen. Das Übungsbuch ist eine Hilfe zum Selbstlernen (learning by doing) und bietet die Möglichkeit, sich intensiv auf die Prüfung vorzubereiten und gezielt Themen zu vertiefen. Hat man Erfolg bei den grundlegenden Aufgaben, machen Mathematik und das Lernen wieder mehr Spaß.

Der blaue Tippteil

Hat man keine Idee, wie man eine Aufgabe angehen soll, hilft der blaue Tippteil zwischen Aufgaben und Lösungen weiter: Zu jeder Aufgabe gibt es dort Tipps, die helfen, einen Ansatz zu finden, ohne die Lösung vorwegzunehmen.

Wie arbeiten Sie mit diesem Buch?

Am Anfang jedes Kapitels finden Sie eine kurze Übersicht über die jeweiligen Themen. Die einzelnen Kapitel bauen zwar aufeinander auf, doch ist es nicht zwingend notwendig, das Buch der Reihe nach durchzuarbeiten. Die Aufgaben sind in der Regel in ihrer Schwierigkeit gestaffelt. Von fast jeder Aufgabe gibt es mehrere Variationen zum Vertiefen.

In der Mitte des Buches finden Sie den blauen Tippteil mit Denk- und Lösungshilfen.

Die Lösungen mit ausführlichen verständlichen Lösungswegen bilden den dritten Teil des Übungsbuchs. Hier finden Sie die notwendigen Formeln, Rechenverfahren und Denkschritte sowie manchmal alternative Lösungswege. Anspruchsvolle Aufgaben sind mit einem Sternchen * gekennzeichnet.

Im Anhang ab Seite 177 befinden sich die Abituraufgaben ab 2006 mit Tipps und ausführlichen Lösungen.

Angepasste Abituraufgaben sind mit einer Raute \diamond gekennzeichnet.

Geometrie

6 Punkte, Geraden und Ebenen

6.1 Rechnen mit Vektoren

Tipps ab Seite 80, Lösungen ab Seite 136

In diesem Kapitel geht es darum, die Grundkenntnisse des Rechnens mit Vektoren zu wiederholen. Dazu gehören die Addition und Subtraktion von Vektoren. Neben diesen Rechenoperationen ist es wichtig, das Skalarprodukt zu kennen und zu wissen, dass es genau dann gleich Null ist, wenn zwei Vektoren senkrecht aufeinander stehen.

Da mit den Vektoren geometrische Objekte wie Dreiecke, Parallelogramme und verschiedene Körper beschrieben werden können, sollten Sie die grundlegenden Eigenschaften dieser Objekte kennen, z.B. dass in einem gleichschenkligen Dreieck zwei Seiten die gleiche Länge haben. Rechenregeln für das Rechnen mit Vektoren finden Sie bei den Tipps auf Seite 80. Wenn nicht anders angegeben gilt für alle Parameter: $r, s, t, \dots \in \mathbb{R}$.

Addition und Subtraktion von Vektoren

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie:

a) $\vec{a} + \vec{b}$ b) $\vec{a} - \vec{b}$ c) $2 \cdot \vec{a}$ d) $-\vec{a}$ e) $2\vec{a} + 3\vec{b}$

f) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ g) $|\vec{a}|$ h) $|\vec{b}|$ i) $|\vec{a} + \vec{b}|$

Orthogonalität von Vektoren

Prüfen Sie, ob folgende Vektoren senkrecht (orthogonal) aufeinander stehen.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ b) $\vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

c) $\vec{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

- d) Geben Sie drei verschiedene Vektoren an, die zu $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ orthogonal sind.

Orts- und Verbindungsvektoren

Gegeben sind die Punkte A(2 | 3 | 2), B(7 | 4 | 3) und C(1 | 5 | -2).

- Bestimmen Sie die Ortsvektoren \vec{a} , \vec{b} , und \vec{c} .
- Bestimmen Sie die Verbindungsvektoren \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} und \overrightarrow{BC} .
- Ist jeder Verbindungsvektor ein Ortsvektor? Begründen Sie Ihre Antwort.

Verschiedene Aufgaben

Tip: Fertigen Sie eine Skizze an und stellen Sie Vektorketten auf.

- a) Prüfen Sie, ob das Dreieck ABC gleichschenkelig ist:

I) A(3 | 7 | 2), B(-1 | 5 | 1), C(2 | 3 | 0)

II) A(-5 | 2 | -1), B(0 | 5 | -3), C(-1 | 6 | -3)

- b) Prüfen Sie, ob das Dreieck ABC rechtwinklig ist:

A(5 | 1 | 0), B(1 | 5 | 2), C(-1 | 1 | 6)

- c) I) Bestimmen Sie den Mittelpunkt M von A(4 | 1 | 3) und B(-2 | 5 | -5).

II) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes P so, dass B(4 | 2 | 5) der Mittelpunkt von A(3 | -1 | -4) und P ist.

- d) Gegeben sind die Punkte A(4 | 2 | 3), B(1 | 8 | 5) und C(-2 | 1 | -3).

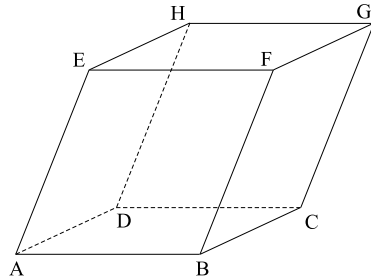
I) Bestimmen Sie den Punkt D so, dass das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist.

II) Bestimmen Sie den Punkt D* so, dass das Viereck ABD*C ein Parallelogramm ist.

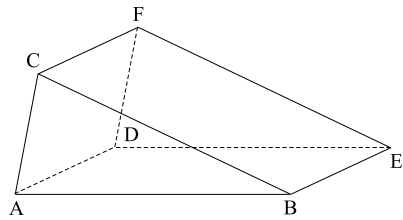
III) Bestimmen Sie den Punkt D' so, dass das Viereck AD'BC ein Parallelogramm ist.

- e) Von einem Spat (Körper mit jeweils 4 parallelen Kanten) sind die Punkte $A(3 \mid 1 \mid 4)$, $B(-2 \mid 1 \mid -3)$, $C(5 \mid -2 \mid 3)$ und $F(9 \mid 2 \mid 6)$ gegeben.

- I) Bestimmen Sie die Koordinaten der übrigen Punkte des Spats.
 II) Berechnen Sie die Länge der Raumdiagonalen AG.



- f) Ein schiefes Dreiecksprisma ist gegeben durch die Punkte $A(4 \mid 1 \mid -3)$, $B(5 \mid -2 \mid -1)$, $C(-1 \mid 3 \mid -2)$ und $D(7 \mid 4 \mid 2)$.
 Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte E und F sowie die Länge der Kante EF.



*Teilverhältnisse

Gegeben sind die Punkte $A(3 \mid -1 \mid 2)$ und $B(5 \mid -2 \mid 0)$.

- a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes S so, dass S die Strecke AB innen im Verhältnis 1 : 2 teilt.
 b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes T so, dass T die Strecke AB innen im Verhältnis 5 : 4 teilt.
 c) In welchem Verhältnis teilt der Punkt $U(4,5 \mid -1,75 \mid 0,5)$ die Strecke AB?

Linearkombination

Wenn zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} linear abhängig sind, bedeutet das, dass sie ein Vielfaches voneinander sind: $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$ mit $k \in \mathbb{R}$, es muss also immer einen Faktor geben, mit dem man einen der beiden Vektoren multiplizieren kann, so dass sich der andere ergibt.

Sind drei Vektoren linear abhängig, dann liegen sie in einer Ebene. Das bedeutet, dass man einen der drei Vektoren als «Linearkombination» der beiden andern ausdrücken kann, z.B. $\vec{a} = s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c}$. Man stellt also ein Gleichungssystem auf und bestimmt s und t .

Prüfen Sie, ob man den Vektor \vec{a} als Linearkombination der Vektoren \vec{b} und \vec{c} darstellen kann.

$$\text{a) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Geometrie

6 Punkte, Geraden und Ebenen

6.1 Rechnen mit Vektoren

Addition und Subtraktion von Vektoren

Für das Rechnen mit Vektoren gelten folgende Gesetze:

$$\text{Addition: } \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} \quad \text{Subtraktion: } \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Skalare Multiplikation: } s \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \cdot a_1 \\ s \cdot a_2 \\ s \cdot a_3 \end{pmatrix} \quad (\text{Zahl} \cdot \text{Vektor} = \text{Vektor}), \text{ für } s \in \mathbb{R}$$

$$\text{Skalarprodukt: } \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 \quad (\text{Vektor} \cdot \text{Vektor} = \text{Zahl})$$

$$\text{Betrag bzw. Länge: } \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Orthogonalität von Vektoren

- a) - c) Zwei Vektoren stehen genau dann senkrecht aufeinander, wenn das Skalarprodukt gleich Null ist. Ist das Skalarprodukt ungleich Null, dann sind die beiden Vektoren nicht orthogonal.
- d) Es sind Vektoren zu suchen, deren Skalarprodukt mit \vec{n} Null ergibt.

Orts- und Verbindungsvektoren

Ortsvektoren setzen am Ursprung $O(0 | 0 | 0)$ an. Verbindungsvektoren zwischen zwei Punkten erhält man mit Hilfe der Ortsvektoren.

Verschiedene Aufgaben

- a) Stellen Sie jeweils drei Verbindungsvektoren zwischen je zwei Punkten auf und berechnen Sie deren Länge.
- b) Die Orthogonalität lässt sich mit dem Skalarprodukt überprüfen.
- c) Tragen Sie in Ihre Skizze jeweils die gegebenen und gesuchten Punkte sowie den Ursprung O ein. Bestimmen Sie mit Hilfe einer Vektorkette den Ortsvektor des gesuchten Punktes. Geben Sie die Koordinaten des gesuchten Punktes an.

- d) Tragen Sie in Ihre Skizze die gegebenen und gesuchten Punkte sowie den Ursprung O ein. Achten Sie dabei auf die Reihenfolge der Punkte (*gegen* den Uhrzeigersinn). Bestimmen Sie mit Hilfe einer Vektorkette den Ortsvektor des gesuchten Punktes. Geben Sie die Koordinaten des gesuchten Punktes an.
- e) Da je vier Kanten parallel sind, gilt $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{EH}$ und $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{HG}$. Bestimmen Sie mit Hilfe einer Vektorkette den Ortsvektor des gesuchten Punktes. Geben Sie die Koordinaten des gesuchten Punktes an.
- f) Tragen Sie in Ihre Skizze die gegebenen und gesuchten Punkte sowie den Ursprung O ein. Bestimmen Sie mit Hilfe einer Vektorkette den Ortsvektor des gesuchten Punktes. Geben Sie die Koordinaten des gesuchten Punktes an. Die Länge einer Kante ist die Länge des Verbindungsvektors der beiden Eckpunkte.

Teilverhältnisse

- a) - b) Erstellen Sie jeweils eine Skizze und stellen Sie eine geeignete Vektorkette für den Ortsvektor von S bzw. T auf.
- c) Überlegen Sie, wo der Punkt U liegt, berechnen Sie die Längen der Vektoren \overrightarrow{AU} und \overrightarrow{UB} und teilen Sie die Ergebnisse durcheinander.

Linearkombination

Stellen Sie das zur Gleichung $\vec{a} = s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c}$ zugehörige lineare Gleichungssystem auf und berechnen Sie (falls möglich) s und t.

6.2 Geraden

Aufstellen von Geradengleichungen

Verwenden Sie den Ortsvektor des einen Punktes als Stützvektor. Bilden Sie den Richtungsvektor, indem Sie den Verbindungsvektor zwischen den beiden Punkten aufstellen.

Punktprobe

Setzen Sie den Ortsvektor des Punktes in die Geradengleichung ein und prüfen Sie, ob sich für alle drei Komponenten der gleiche Parameter ergibt.

Gegenseitige Lage von Geraden

Für die gegenseitige Lage von zwei Geraden gibt es vier Möglichkeiten: Die Geraden können sich schneiden, parallel, identisch oder windschief sein.

Zur Bestimmung der gegenseitigen Lage prüft man zuerst die Richtungsvektoren auf lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit:

Geometrie

6 Punkte, Geraden und Ebenen

6.1 Rechnen mit Vektoren

Addition und Subtraktion von Vektoren

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$\text{a) } \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{c) } 2 \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } -\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{e) } 2\vec{a} + 3\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$$\text{f) } \vec{a} \cdot \vec{b} = (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 7$$

$$\text{g) } |\vec{a}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{1 + 4 + 16} = \sqrt{21}$$

$$\text{h) } |\vec{b}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{14}$$

$$\text{i) } |\vec{a} + \vec{b}| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7$$

Orthogonalität von Vektoren

$$\text{a) } \vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 = -2 \Rightarrow \vec{a} \text{ steht nicht orthogonal auf } \vec{b}.$$

$$\text{b) } \vec{r} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = 5 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 3 \cdot (-3) = 0 \Rightarrow \vec{r} \text{ steht orthogonal auf } \vec{n}.$$

$$\text{c) } \vec{z} \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + (-2) \cdot 3 + 4 \cdot 1 = 0 \Rightarrow \vec{z} \text{ steht orthogonal auf } \vec{w}.$$

d) Es sind Vektoren zu bestimmen, deren Skalarprodukt mit \vec{n} Null ergibt. Dazu kann man zwei Komponenten des Vektors frei wählen, die dritte ergibt sich dann, z.B.:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ denn } \vec{a} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 4 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 + 0 \cdot (-3) = 4 - 4 = 0$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ denn } \vec{b} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 0 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) = 6 - 6 = 0$$

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ denn } \vec{c} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 5 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 1 \cdot (-3) = 5 - 2 - 3 = 0$$

Orts- und Verbindungsvektoren

Gegeben sind die Punkte A(2 | 3 | 2), B(7 | 4 | 3) und C(1 | 5 | -2).

$$\text{a) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

c) Nein, ein Verbindungsvektor verbindet zwei beliebige Punkte. Ein Ortsvektor geht immer vom Ursprung zu einem Punkt.

Verschiedene Aufgaben

$$\text{a) I) } \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ es ist } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} = \sqrt{21},$$

damit ist das Dreieck gleichschenkelig.

$$\text{II) } \vec{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ es ist } \overline{AB} = \sqrt{38}, \overline{AC} = 6$$

und $\overline{BC} = \sqrt{2}$, damit ist das Dreieck nicht gleichschenkelig.

$$\text{b) } \vec{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{AC} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = 24 + 0 + 12 = 36$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = 8 - 16 + 8 = 0$$

$$\vec{AC} \cdot \vec{BC} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = 12 + 0 + 24 = 36$$

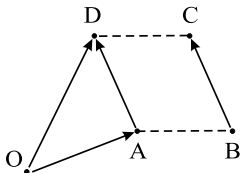
Da das Skalarprodukt von \vec{AB} und \vec{BC} gleich Null ist, stehen diese beiden Vektoren senkrecht aufeinander, d.h. das Dreieck ABC hat bei B einen rechten Winkel.

$$\text{c) I) } \begin{array}{c} \text{A} \quad \text{M} \quad \text{B} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \vec{A} \quad \vec{M} \quad \vec{B} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \text{O} \end{array} \quad \vec{OM} = \vec{OA} + \frac{1}{2} \vec{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

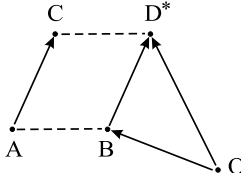
$$\Rightarrow \text{M}(1 \mid 3 \mid -1)$$

$$\text{II) } \begin{array}{c} \text{A} \quad \text{B} \quad \text{P} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \vec{A} \quad \vec{B} \quad \vec{P} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \text{O} \end{array} \quad \vec{OP} = \vec{OA} + 2 \cdot \vec{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 14 \end{pmatrix}$$

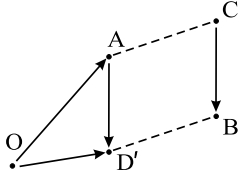
$$\Rightarrow \text{P}(5 \mid 5 \mid 14)$$

d) I) 
$$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D(1 \mid -5 \mid -5)$$

II) 
$$\vec{OD}^* = \vec{OB} + \vec{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D^*(-5 \mid 7 \mid -1)$$

III) 
$$\vec{OD}' = \vec{OA} + \vec{CB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D'(7 \mid 9 \mid 11)$$

e) I) Es ergeben sich folgende mögliche Vektorketten:

$$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix} \Rightarrow D(10 \mid -2 \mid 10)$$

$$\vec{OE} = \vec{OA} + \vec{BF} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix} \Rightarrow E(14 \mid 2 \mid 13)$$

$$\vec{OG} = \vec{OC} + \vec{BF} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -1 \\ 12 \end{pmatrix} \Rightarrow G(16 \mid -1 \mid 12)$$

$$\vec{OH} = \vec{OD} + \vec{BF} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ -1 \\ 19 \end{pmatrix} \Rightarrow H(21 \mid -1 \mid 19)$$

II) Die Länge der Raumdiagonalen AG ist die Länge des Verbindungsvektors \vec{AG} :

$$AG = |\vec{AG}| = \left| \begin{pmatrix} 13 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{169 + 4 + 64} = \sqrt{237}LE.$$

f) Bei einem schiefen Dreiecksprisma sind folgende 3 Kanten parallel: AD, BE und CF \Rightarrow

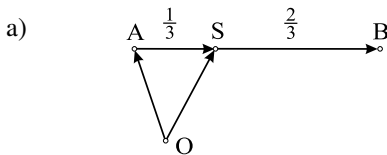
$$\vec{AD} = \vec{BE} = \vec{CF}. \text{ Daher gilt: } \vec{OE} = \vec{OB} + \vec{AD} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow E(8 \mid 1 \mid 4)$$

$$\vec{OF} = \vec{OC} + \vec{AD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow F(2 | 6 | 3)$$

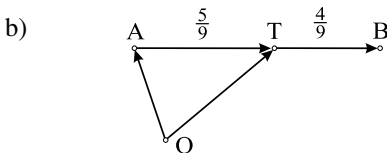
Die Länge der Kante EF ist $|\vec{EF}| = \left| \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{36 + 25 + 1} = \sqrt{62} \text{ LE.}$

Teilverhältnisse



Um die Koordinaten von S zu bestimmen, stellt man eine Vektorkette auf. Es ist:

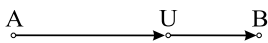
$$\vec{OS} = \vec{OA} + \frac{1}{3}\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow S\left(\frac{11}{3} \mid -\frac{4}{3} \mid \frac{4}{3}\right).$$



Um die Koordinaten von T zu bestimmen, stellt man eine Vektorkette auf. Es ist:

$$\vec{OT} = \vec{OA} + \frac{5}{9}\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{5}{9} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{37}{9} \\ -\frac{14}{9} \\ \frac{8}{9} \end{pmatrix} \Rightarrow T\left(\frac{37}{9} \mid -\frac{14}{9} \mid \frac{8}{9}\right).$$

c) Der Punkt U liegt zwischen A und B, was anhand der einzelnen Koordinaten erkennbar ist.



Um das Teilverhältnis zu bestimmen, berechnet man die Längen der Vektoren \vec{AU} und \vec{UB} und teilt diese durcheinander. Es gilt:

$$\overline{AU} = |\vec{AU}| = \left| \begin{pmatrix} 1,5 \\ -0,75 \\ -1,5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1,5^2 + (-0,75)^2 + (-1,5)^2} = 2,25$$

$$\overline{UB} = |\vec{UB}| = \left| \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,25 \\ -0,5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{0,5^2 + (-0,25)^2 + (-0,5)^2} = 0,75$$

Somit gilt für das Teilverhältnis: $\frac{\overline{AU}}{\overline{UB}} = \frac{2,25}{0,75} = 3 = \frac{3}{1}$

Der Punkt U teilt die Strecke AB im Verhältnis 3 : 1.

Linearkombination

a) Der Ansatz $\begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ führt zu

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad 5 = 4s + 3t \\ \text{II} \quad -9 = -2s + 5t \\ \text{III} \quad 2 = s \end{array}$$

Aus Gleichung III ergibt sich: $s = 2$. Setzt man $s = 2$ in Gleichung I ein, erhält man daraus: $5 = 4 \cdot 2 + 3t \Rightarrow t = -1$. Setzt man $s = 2$ in Gleichung II ein, erhält man daraus: $-9 = -2 \cdot 2 + 5t \Rightarrow t = -1$.

Damit ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar und der Vektor \vec{a} lässt sich als Linearkombination von \vec{b} und \vec{c} darstellen:

$$\vec{a} = 2 \cdot \vec{b} - \vec{c}$$

b) Der Ansatz $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$ führt zu

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad 4 = s + 6t \\ \text{II} \quad 0 = 3s + 6t \\ \text{III} \quad -2 = -s - 4t \end{array}$$

Addiert man Gleichung I zu Gleichung III, ergibt sich: $2 = 2t \Rightarrow t = 1$. Setzt man $t = 1$ in Gleichung I ein, erhält man: $4 = s + 6 \cdot 1 \Rightarrow s = -2$. Setzt man $t = 1$ und $s = -2$ in Gleichung II ein, ergibt sich: $0 = 3 \cdot (-2) + 6 \cdot 1 \Rightarrow 0 = 0$.

Damit ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar und der Vektor \vec{a} lässt sich als Linearkombination von \vec{b} und \vec{c} darstellen:

$$\vec{a} = -2 \cdot \vec{b} + \vec{c}$$

c) Der Ansatz $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$ führt zu

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad -1 = 5s + 3t \\ \text{II} \quad 3 = 2s - 4t \\ \text{III} \quad -2 = s - 3t \end{array}$$

Subtrahiert man das 5-fache von Gleichung II vom 2-fachen von Gleichung I, ergibt sich: $-17 = 26t \Rightarrow t = -\frac{17}{26}$. Subtrahiert man das 5-fache von Gleichung III von Gleichung I, erhält man: $9 = 18t \Rightarrow t = \frac{1}{2}$. Aufgrund des Widerspruchs ist das Gleichungssystem nicht lösbar. Damit lässt sich der Vektor \vec{a} nicht als Linearkombination von \vec{b} und \vec{c} darstellen, d.h. \vec{a} , \vec{b} , und \vec{c} sind linear unabhängig.