

Gruber | Neumann

Erfolg im Mathe-Abi 2013

**Vorabdruck
Pflichtteil Stochastik
für das Abitur ab 2013
zum
Übungsbuch für den Pflichtteil
Baden-Württemberg
mit Tipps und Lösungen**

Vorwort

Erfolg von Anfang an

...ist das Geheimnis eines guten Abiturs.

Ab 2013 werden im Abitur in Baden-Württemberg auch Stochastik-Aufgaben enthalten sein. Dieses Sonderheft ist speziell auf die Anforderungen des Pflichtteils in Stochastik des G8-Abiturs in Baden-Württemberg abgestimmt und enthält Übungsaufgaben sowie Musteraufgaben, die dem Niveau des Abiturs entsprechen.

In den Büchern «Erfolg im Mathe-Abi Pflichtteil» und «Erfolg im Mathe-Abi Wahlteil» finden Sie dann alle Themenbereiche Analysis, Geometrie und Stochastik mit Muster-Abituraufgaben sowie Original-Abituraufgaben mit Tipps und ausführlichen und verständlichen Lösungen.

Der blaue Tippteil

Hat man keine Idee, wie man eine Aufgabe angehen soll, hilft der blaue Tippteil zwischen Aufgaben und Lösungen weiter: Zu jeder Aufgabe gibt es dort Tipps, die helfen, einen Ansatz zu finden, ohne die Lösung vorwegzunehmen.

Wie arbeiten Sie mit diesem Buch?

Mit diesem Buch können Sie Ihre Grundlagen in Stochastik auffrischen oder sich neu erarbeiten. Dazu befindet sich am Anfang jedes Kapitels eine kurze thematische Übersicht. Die einzelnen Kapitel bauen zwar teilweise aufeinander auf, doch ist es nicht zwingend notwendig, das Buch der Reihe nach durchzuarbeiten. Die Aufgaben sind in der Regel in ihrer Schwierigkeit gestaffelt.

Den besten Lerneffekt erreichen Sie, wenn Sie beim Aufgabenlösen zuerst im Tippteil nachschauen. Die Lösungen mit ausführlichen und verständlichen Lösungswegen bilden den letzten Teil des Übungsbuchs. Hier finden Sie neben den notwendigen Formeln, Rechenverfahren und Denkschritten auch sinnvolle alternative Lösungswege.

Allen Schülerinnen und Schülern, die sich auf das Abitur vorbereiten, wünschen wir viel Erfolg.

Helmut Gruber und Robert Neumann

Inhaltsverzeichnis

1	Baumdiagramme und Pfadregeln	3
2	Binomialverteilung	9
3	Erwartungswert	13
	Tipps	16
	Lösungen	23
	Abitur-Musteraufgaben	52
	Stichwortverzeichnis	81

1 Baumdiagramme und Pfadregeln

Tipps ab Seite 16, Lösungen ab Seite 23

In diesem Kapitel geht es darum, mithilfe bereits bekannter Wahrscheinlichkeiten von einzelnen Ergebnissen die Wahrscheinlichkeiten weiterer, oft «komplizierterer» Ereignisse zu bestimmen. Ein wichtiges Hilfsmittel zur Veranschaulichung hierfür sind *Baumdiagramme*. Sie sind insbesondere bei mehrstufigen Zufallsexperimenten hilfreich. Eine Verzweigung entspricht dabei den möglichen Versuchsausgängen der jeweiligen Stufe; längs der «Äste» werden die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten notiert.

Bei mehrstufigen Zufallsexperimenten unterscheidet man *geordnete Stichproben* (d.h. Beachtung der Reihenfolge) von *ungeordneten Stichproben*; beide Stichprobenarten können *mit oder ohne Zurücklegen* durchgeführt werden. Bei der Erstellung des Baumdiagrammes muss man darauf achten, dass sich bei Stichproben ohne Zurücklegen die Wahrscheinlichkeiten bei jeder Stufe ändern.

Manchmal ist es auch geschickt oder hilfreich die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A mit des Gegenereignisses \bar{A} zu berechnen; dies ist vor allem (aber nicht immer) bei den Signalwörtern «mindestens» oder «höchstens» der Fall. Es gilt dann für die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten:

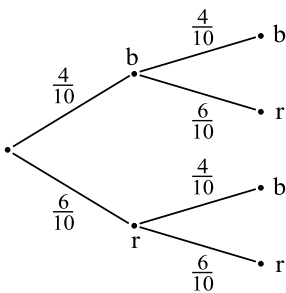
$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

1. Beispiel: Ziehen mit Zurücklegen

Ein Gefäß enthält 4 blaue und 6 rote Kugeln. Es werden 2 Kugeln mit Zurücklegen gezogen.

Da 4 blaue und 6 rote, also insgesamt 10 Kugeln in der Urne sind, beträgt die Wahrscheinlichkeit bei jedem Ziehen für die Ergebnisse blau (b): $\frac{4}{10}$ und für rot (r): $\frac{6}{10}$.

Damit erhält man folgendes Baumdiagramm:



Wichtige Rechenregeln für Baumdiagramme sind die *1. Pfadregel* und die *2. Pfadregel*:

Die *1. Pfadregel* (Produktregel) besagt, dass man die Wahrscheinlichkeit längs eines Pfades berechnet, indem man die Wahrscheinlichkeiten der zugehörigen Äste miteinander multipliziert.

Mit der *2. Pfadregel* (Summenregel) kann man die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses berechnen, indem man die Wahrscheinlichkeiten aller zugehörigen Pfade addiert.

Will man beispielsweise die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass beide Kugeln rot sind, so ergibt sich mit Hilfe der *1. Pfadregel*:

$$P(\text{«beide Kugeln rot»}) = P(rr) = \frac{6}{10} \cdot \frac{6}{10} = \frac{36}{100} = 0,36$$

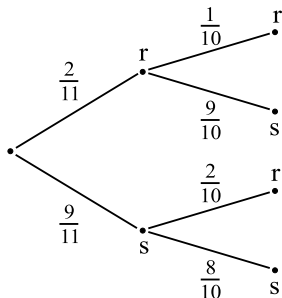
Will man die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass beide Kugeln gleichfarbig sind, so ergibt sich mit Hilfe der 1. und 2. Pfadregel:

$$P(\text{«beide Kugeln gleichfarbig»}) = P(rr) + P(bb) = \frac{6}{10} \cdot \frac{6}{10} + \frac{4}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{36}{100} + \frac{16}{100} = \frac{52}{100} = 0,52$$

2. Beispiel: Ziehen ohne Zurücklegen

Eine Urne enthält 2 rote und 9 schwarze Kugeln. Es werden 2 Kugeln gleichzeitig gezogen.

Das gleichzeitige Ziehen entspricht dem Ziehen ohne Zurücklegen. Man erhält folgendes Baumdiagramm:



Da 2 rote und 9 schwarze, also insgesamt 11 Kugeln in der Urne sind, beträgt die Wahrscheinlichkeit beim 1. Ziehen für rot (r): $\frac{2}{11}$ und für schwarz (s): $\frac{9}{11}$.

Beim 2. Ziehen sind nur noch 10 Kugeln vorhanden und die Wahrscheinlichkeiten hängen davon ab, welche Farbe schon gezogen wurde.

Will man beispielsweise die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass genau eine Kugel schwarz ist, ergibt sich mit Hilfe der 1. und 2. Pfadregel (Produkt- und Summenregel):

$$P(\text{«genau eine schwarze Kugel»}) = P(rs) + P(sr) = \frac{2}{11} \cdot \frac{9}{10} + \frac{9}{11} \cdot \frac{2}{10} = \frac{9}{55} + \frac{9}{55} = \frac{18}{55}$$

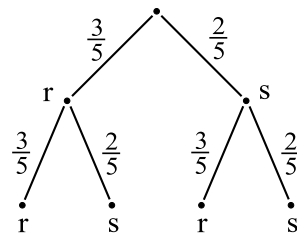
Will man die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass mindestens eine der beiden Kugeln schwarz ist, erhält man mit Hilfe des Gegenereignisses:

$$\begin{aligned} P(\text{«mindestens eine schwarze Kugel»}) &= 1 - P(\text{«keine schwarze Kugel»}) \\ &= 1 - P(rr) \\ &= 1 - \frac{2}{11} \cdot \frac{1}{10} \\ &= 1 - \frac{1}{55} \\ &= \frac{54}{55} \end{aligned}$$

1.1 Ziehen mit Zurücklegen

- In einem Behälter befinden sich 3 weiße und 7 rote Kugeln. Es werden 2 Kugeln mit Zurücklegen gezogen.
 - Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind beide Kugeln gleichfarbig?
 - Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine Kugel weiß ist.
- Eine Urne enthält 4 rote, 3 weiße und 2 gelbe Kugeln. Es werden 2 Kugeln mit Zurücklegen gezogen.
 - Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man eine weiße und eine gelbe Kugel?
 - Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man keine weiße Kugel erhält ?

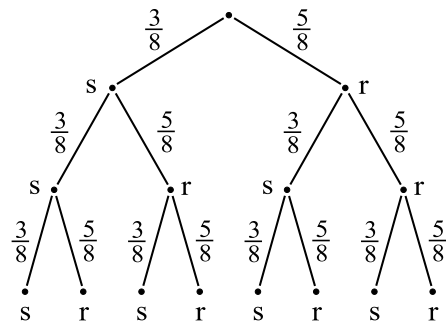
- In einer Urne befinden sich rote und schwarze Kugeln. Es ergibt sich das nebenstehende Baumdiagramm.



- Beschreiben Sie eine Situation, die zu diesem Baumdiagramm passt.
 - Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kugeln gleichfarbig sind?
- Ein Gefäß enthält 8 rote, 4 blaue und 2 weiße Kugeln. Es werden 2 Kugeln mit Zurücklegen gezogen.
 - Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man keine rote Kugel?
 - Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass man höchstens eine rote Kugel erhält?
 - Ein Würfel trägt auf einer Seite die Zahl 1, auf vier anderen Seiten die Zahl 2 und auf einer Seite die Zahl 3. Er wird zweimal nacheinander geworfen und die Ergebnisse als zweistellige Zahl notiert.
 - Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das Ergebnis kleiner als 20?
 - Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das Ergebnis eine Primzahl ist.
 - In einem Behälter befinden sich 3 rote und 5 gelbe Kugeln. Es werden 2 Kugeln mit Zurücklegen gezogen.
 - Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine der beiden Kugeln gelb ist.
 - Wie viele gelbe Kugeln hätten sich in dem Behälter befinden müssen, damit die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine gelbe Kugel zu ziehen, 0,91 betragen hätte?

7. Eine Urne enthält 4 blaue und 6 rote Kugeln. Es werden 2 Kugeln mit Zurücklegen gezogen.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens eine Kugel blau ist.
 - Wie viele blaue Kugeln hätten sich in der Urne befinden müssen, damit die Wahrscheinlichkeit, höchstens eine blaue Kugel zu ziehen, 0,64 betragen hätte?
8. In einem Hut befinden sich 4-mal der Buchstabe A und 8-mal der Buchstabe B. Es werden 2 Buchstaben mit Zurücklegen gezogen.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens einmal der Buchstabe B gezogen wird.
 - Wie viele Buchstaben A müssten sich in dem Hut befinden, damit die Wahrscheinlichkeit, höchstens einmal den Buchstaben B zu ziehen, 0,96 beträgt?
9. Ein Behälter enthält 6 rote, 3 blaue und 1 gelbe Kugel. Es werden 3 Kugeln mit Zurücklegen gezogen.
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man keine blaue Kugel?
 - Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass alle drei Kugeln verschiedenfarbig sind.

10. In einer Urne befinden sich rote und schwarze Kugeln. Es ergibt sich das nebenstehende Baumdiagramm.



- Beschreiben Sie eine Situation, die zu diesem Baumdiagramm passt.
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine Kugel rot ist?

11. In einem Behälter befinden sich 5 Kugeln mit den Zahlen 1 bis 5. Es werden 3 Kugeln mit Zurücklegen gezogen.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass erst im dritten Zug eine gerade Zahl gezogen wird.
 - Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine Zahl gerade ist?
12. Ein Fertigungsteil durchläuft mehrmals dieselbe Kontrolle, da mit einer Wahrscheinlichkeit von 20% ein Fehler übersehen wird.
- Bestimmen Sie mit Hilfe eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeit, dass ein vorhandener Fehler zweimal übersehen und beim 3. Mal erkannt wird.
 - Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein vorhandener Fehler spätestens beim 3. Mal erkannt wird?

Tipps

1 Baumdiagramme und Pfadregeln

1.1 Ziehen mit Zurücklegen

1.
 - a) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm mit den Ästen rot (r) und weiß (w). Beachten Sie, dass die Wahrscheinlichkeiten bei jedem Ziehen gleich bleiben. Überlegen Sie, welche Ergebnisse zum gesuchten Ereignis gehören und verwenden Sie die Pfadregeln.
 - b) Überlegen Sie, welche Ergebnisse zum gesuchten Ereignis gehören und verwenden Sie die Pfadregeln oder rechnen Sie alternativ mit dem Gegenereignis \bar{A} und verwenden Sie $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.
2.
 - a) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm mit den Ästen rot (r), weiß (w) und gelb (g). Beachten Sie, dass die Wahrscheinlichkeiten bei jedem Ziehen gleich bleiben. Überlegen Sie, welche Ergebnisse zum gesuchten Ereignis gehören und verwenden Sie die Pfadregeln.
 - b) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm mit den Ästen weiß (w) und nicht weiß (\bar{w}). Beachten Sie, dass die Wahrscheinlichkeiten bei jedem Ziehen gleich bleiben. Überlegen Sie, welches Ergebnis zum gesuchten Ereignis gehört und verwenden Sie die 1. Pfadregel.
3.
 - a) Überlegen Sie, wie viele Kugeln insgesamt mindestens vorhanden sein müssen und beachten Sie, ob sich die Wahrscheinlichkeiten für rot oder schwarz bei jedem Ziehen ändern oder nicht.
 - b) Überlegen Sie, welche Ergebnisse zum gesuchten Ereignis gehören und verwenden Sie die Pfadregeln.
4.
 - a) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm mit den Ästen rot (r) und nicht rot (\bar{r}). Beachten Sie, dass die Wahrscheinlichkeiten bei jedem Ziehen gleich bleiben. Überlegen Sie, welches Ergebnis zum gesuchten Ereignis gehört und verwenden Sie die 1. Pfadregel.
 - b) Überlegen Sie, welche Ergebnisse zum gesuchten Ereignis gehören und verwenden Sie die Pfadregeln oder rechnen Sie alternativ mit dem Gegenereignis \bar{A} und verwenden Sie $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.
5.
 - a) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm mit den Ästen 1, 2 und 3. Beachten Sie, dass die Wahrscheinlichkeiten bei jedem Würfeln gleich bleiben. Überlegen Sie, welche Ergebnisse zum gesuchten Ereignis gehören und verwenden Sie die Pfadregeln.
 - b) Überlegen Sie, welche Ergebnisse zum gesuchten Ereignis gehören und verwenden Sie die Pfadregeln.

6. a) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm mit den Ästen rot (r) und gelb (g). Beachten Sie, dass die Wahrscheinlichkeiten bei jedem Ziehen gleich bleiben. Überlegen Sie, welche Ergebnisse zum gesuchten Ereignis gehören und verwenden Sie die Pfadregeln oder rechnen Sie alternativ mit dem Gegenereignis \bar{A} und verwenden Sie $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.
- b) Wählen Sie n als Anzahl der gelben Kugeln und zeichnen Sie ein Baumdiagramm. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für das gesuchte Ereignis mit Hilfe des Gegenereignisses in Abhängigkeit von n ; verwenden Sie $P(A) = 1 - P(\bar{A})$. Stellen Sie eine quadratische Gleichung auf und lösen Sie diese durch Wurzelziehen und Fallunterscheidung. Beachten Sie, dass $n > 0$ sein muss.
7. a) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm mit den Ästen rot (r) und blau (b). Beachten Sie, dass die Wahrscheinlichkeiten bei jedem Ziehen gleich bleiben. Überlegen Sie, welche Ergebnisse zum gesuchten Ereignis gehören und verwenden Sie die Pfadregeln oder rechnen Sie alternativ mit dem Gegenereignis \bar{A} und verwenden Sie $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.
- b) Wählen Sie n als Anzahl der blauen Kugeln und zeichnen Sie ein Baumdiagramm. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für das gesuchte Ereignis mit Hilfe des Gegenereignisses in Abhängigkeit von n ; verwenden Sie $P(A) = 1 - P(\bar{A})$. Stellen Sie eine quadratische Gleichung auf und lösen Sie diese durch Wurzelziehen und Fallunterscheidung. Beachten Sie, dass $n > 0$ sein muss.
8. a) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm mit den Ästen A und B. Beachten Sie, dass die Wahrscheinlichkeiten bei jedem Ziehen gleich bleiben. Überlegen Sie, welche Ergebnisse zum gesuchten Ereignis gehören und verwenden Sie die Pfadregeln oder rechnen Sie alternativ mit dem Gegenereignis \bar{A} und verwenden Sie $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.
- b) Wählen Sie n als Anzahl der Buchstaben A und zeichnen Sie ein Baumdiagramm. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für das gesuchte Ereignis mit Hilfe des Gegenereignisses in Abhängigkeit von n ; verwenden Sie $P(A) = 1 - P(\bar{A})$. Stellen Sie eine quadratische Gleichung auf und lösen Sie diese durch Wurzelziehen und Fallunterscheidung. Beachten Sie, dass $n > 0$ sein muss.
9. a) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm mit den Ästen blau (b) und nicht blau (\bar{b}). Beachten Sie, dass die Wahrscheinlichkeiten bei jedem Ziehen gleich bleiben. Überlegen Sie, welches Ergebnis zum gesuchten Ereignis gehört und verwenden Sie die 1. Pfadregel.
- b) Überlegen Sie, welche Ergebnisse zum gesuchten Ereignis gehören und verwenden Sie die Pfadregeln.
10. a) Überlegen Sie, wie viele Kugeln insgesamt mindestens vorhanden sein müssen und

beachten Sie, ob sich die Wahrscheinlichkeiten für rot oder schwarz bei jedem Ziehen ändern oder nicht.

- b) Rechnen Sie mit dem Gegenereignis \bar{A} und verwenden Sie $P(A) = 1 - P(\bar{A})$ sowie die 1. Pfadregel.
11. a) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm mit den Ästen gerade (g) und ungerade (u). Beachten Sie, dass die Wahrscheinlichkeiten bei jedem Ziehen gleich bleiben. Überlegen Sie, welches Ergebnis zum gesuchten Ereignis gehört und verwenden Sie die 1. Pfadregel.
- b) Rechnen Sie mit dem Gegenereignis \bar{A} und verwenden Sie $P(A) = 1 - P(\bar{A})$ sowie die 1. Pfadregel.
12. a) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm mit den Ästen Fehler erkannt (e) und Fehler übersehen (\bar{e}). Beachten Sie, dass die Wahrscheinlichkeiten bei jeder Kontrolle gleich bleiben. Die Pfade in diesem Baumdiagramm sind unterschiedlich lang, da die Kontrolle abgebrochen wird, wenn ein Fehler erkannt ist. Überlegen Sie, welches Ergebnis zum gesuchten Ereignis gehört und verwenden Sie die 1. Pfadregel.
- b) Überlegen Sie, welche Ergebnisse zum gesuchten Ereignis gehören und verwenden Sie die Pfadregeln oder rechnen Sie alternativ mit dem Gegenereignis \bar{A} und verwenden Sie $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

1.2 Ziehen ohne Zurücklegen

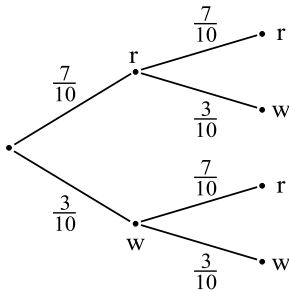
1. a) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm mit den Ästen rot (r), grün (g) und blau (b). Beachten Sie, dass sich die Wahrscheinlichkeiten bei jedem Ziehen ändern. Überlegen Sie, welche Ergebnisse zum gesuchten Ereignis gehören und verwenden Sie die Pfadregeln.
- b) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm mit den Ästen blau (b) und nicht blau (\bar{b}). Beachten Sie, dass sich die Wahrscheinlichkeiten bei jedem Ziehen ändern. Überlegen Sie, welches Ergebnis zum gesuchten Ereignis gehört und verwenden Sie die 1. Pfadregel.
2. a) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm mit den Ästen rot (r), blau (b) und weiß (w). Beachten Sie, dass sich die Wahrscheinlichkeiten bei jedem Ziehen ändern. Überlegen Sie, welche Ergebnisse zum gesuchten Ereignis gehören und verwenden Sie die Pfadregeln.
- b) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm mit den Ästen rot (r) und nicht rot (\bar{r}). Beachten Sie, dass sich die Wahrscheinlichkeiten bei jedem Ziehen ändern. Überlegen Sie, welches Ergebnis zum gesuchten Ereignis gehört und verwenden Sie die 1. Pfadregel.

Lösungen

1 Baumdiagramme und Pfadregeln

1.1 Ziehen mit Zurücklegen

1. a)



Da 3 weiße und 7 rote, also insgesamt 10 Kugeln in der Urne sind, betragen die Wahrscheinlichkeiten bei jedem Ziehen für weiß (w): $\frac{3}{10}$ und für rot (r): $\frac{7}{10}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kugeln gleichfarbig sind, erhält man mit Hilfe der 1. und 2. Pfadregel (Produkt- und Summenregel):

$$\begin{aligned}
 P(\text{«beide Kugeln gleichfarbig»}) &= P(ww) + P(rr) \\
 &= \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} + \frac{7}{10} \cdot \frac{7}{10} \\
 &= \frac{9}{100} + \frac{49}{100} \\
 &= \frac{58}{100} = 0,58
 \end{aligned}$$

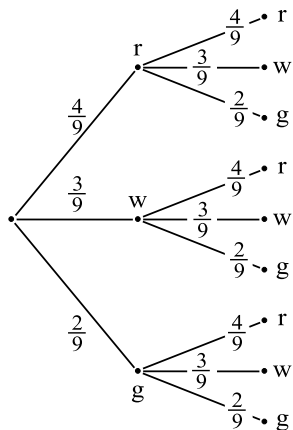
b) Die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine weiße Kugel zu ziehen, erhält man ebenfalls mit Hilfe der 1. und 2. Pfadregel (Produkt- und Summenregel):

$$\begin{aligned}
 P(\text{«mindestens eine weiße Kugel»}) &= P(wr) + P(rw) + P(ww) \\
 &= \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{10} + \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{10} + \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} \\
 &= \frac{21}{100} + \frac{21}{100} + \frac{9}{100} \\
 &= \frac{51}{100} = 0,51
 \end{aligned}$$

Alternativ kann man auch mit dem Gegenereignis rechnen:

$$\begin{aligned}
 P(\text{«mindestens eine weiße Kugel»}) &= 1 - P(\text{«keine weiße Kugel»}) \\
 &= 1 - P(rr) \\
 &= 1 - \frac{7}{10} \cdot \frac{7}{10} \\
 &= 1 - \frac{49}{100} \\
 &= \frac{51}{100}
 \end{aligned}$$

2. a)

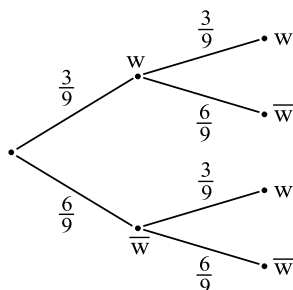


Da 4 rote, 3 weiße und 2 gelbe, also insgesamt 9 Kugeln in der Urne sind, betragen die Wahrscheinlichkeiten bei jedem Ziehen für rot (r), weiß (w) bzw. gelb (g): $\frac{4}{9}$, $\frac{3}{9}$ bzw. $\frac{2}{9}$.

Die Wahrscheinlichkeit, eine weiße und eine gelbe Kugel zu ziehen, erhält man mit Hilfe der 1. und 2. Pfadregel (Produkt- und Summenregel):

$$P(\text{«eine weiße und eine gelbe Kugel»}) = P(wg) + P(gw) = \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{9} = \frac{4}{27}$$

b)

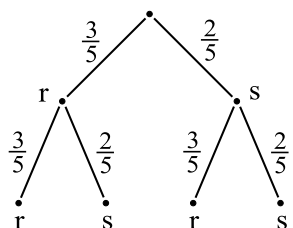


Da 3 weiße und 6 nicht weiße, also insgesamt 9 Kugeln in der Urne sind, beträgt die Wahrscheinlichkeit bei jedem Ziehen für weiß (w): $\frac{3}{9}$ und für nicht weiß (\bar{w}): $\frac{6}{9}$.

Die Wahrscheinlichkeit, keine weiße Kugel zu ziehen, erhält man mit Hilfe der 1. Pfadregel (Produktregel):

$$P(\text{«keine weiße Kugel»}) = P(\bar{w}\bar{w}) = \frac{6}{9} \cdot \frac{6}{9} = \frac{4}{9}$$

3. a)



Zum Baumdiagramm passt folgende Situation:

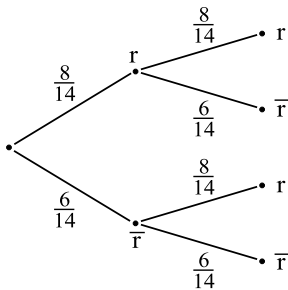
In einer Urne befinden sich 3 rote und 2 schwarze Kugeln. Es werden zwei Kugeln mit Zurücklegen gezogen, da die Wahrscheinlichkeiten beim 2. Zug gleich groß sind wie beim 1. Zug.

b) Die Wahrscheinlichkeit beträgt bei jedem Ziehen für rot (r): $\frac{3}{5}$ und für schwarz (s): $\frac{2}{5}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kugeln gleichfarbig sind, erhält man mit Hilfe der

1. und 2. Pfadregel (Produkt- und Summenregel):

$$\begin{aligned}
 P(\text{«beide Kugeln gleichfarbig»}) &= P(rr) + P(ss) \\
 &= \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \\
 &= \frac{9}{25} + \frac{4}{25} \\
 &= \frac{13}{25}
 \end{aligned}$$

4. a)



Da 8 rote und 6 nicht rote, also insgesamt 14 Kugeln in der Urne sind, beträgt die Wahrscheinlichkeit bei jedem Ziehen für rot (r): $\frac{8}{14}$ und für nicht rot (\bar{r}): $\frac{6}{14}$.

Die Wahrscheinlichkeit, keine rote Kugel zu ziehen, erhält man mit Hilfe der 1. Pfadregel (Produktregel):

$$P(\text{«keine rote Kugel»}) = P(\bar{r}\bar{r}) = \frac{6}{14} \cdot \frac{6}{14} = \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{9}{49}$$

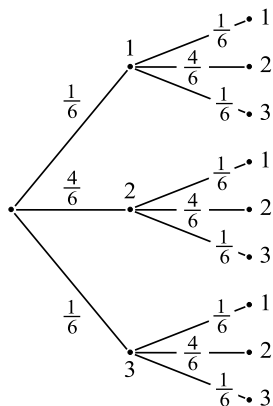
b) Die Wahrscheinlichkeit, höchstens eine rote Kugel zu ziehen, erhält man mit Hilfe der 1. und 2. Pfadregel (Produkt- und Summenregel):

$$\begin{aligned}
 P(\text{«höchstens eine rote Kugel»}) &= P(\bar{r}\bar{r}) + P(\bar{r}r) + P(r\bar{r}) \\
 &= \frac{6}{14} \cdot \frac{6}{14} + \frac{6}{14} \cdot \frac{8}{14} + \frac{8}{14} \cdot \frac{6}{14} \\
 &= \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} + \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{7} + \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} \\
 &= \frac{9}{49} + \frac{12}{49} + \frac{12}{49} \\
 &= \frac{33}{49}
 \end{aligned}$$

Alternativ kann man auch mit dem Gegenereignis rechnen:

$$\begin{aligned}
 P(\text{«höchstens eine rote Kugel»}) &= 1 - P(\text{«zwei rote Kugel»}) \\
 &= 1 - P(rr) \\
 &= 1 - \frac{8}{14} \cdot \frac{8}{14} \\
 &= 1 - \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} \\
 &= \frac{49}{49} - \frac{16}{49} \\
 &= \frac{33}{49}
 \end{aligned}$$

5. a)



Da der Würfel auf einer Seite die Zahl 1, auf vier anderen Seiten die Zahl 2 und auf einer Seite die Zahl 3 hat, beträgt die Wahrscheinlichkeit für die Zahl 1: $\frac{1}{6}$, für die Zahl 2: $\frac{4}{6}$ und für die Zahl 3: $\frac{1}{6}$.

Es gibt als Ergebnisse folgende zweistellige Zahlen: 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33.

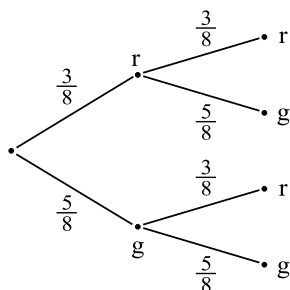
Die Wahrscheinlichkeit, dass das Ergebnis bei zwei Würfeln kleiner als 20 ist, erhält man mit Hilfe der 1. und 2. Pfadregel (Produkt- und Summenregel):

$$\begin{aligned} P(\llcorner\text{Ergebnis ist kleiner als 20}\llcorner) &= P(11) + P(12) + P(13) \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{36} + \frac{4}{36} + \frac{1}{36} \\ &= \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

b) Die Wahrscheinlichkeit, dass das Ergebnis bei zwei Würfeln eine Primzahl ist, erhält man ebenfalls mit Hilfe der 1. und 2. Pfadregel (Produkt- und Summenregel):

$$\begin{aligned} P(\llcorner\text{Ergebnis ist Primzahl}\llcorner) &= P(11) + P(13) + P(23) + P(31) \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{4}{36} + \frac{1}{36} = \frac{7}{36} \end{aligned}$$

6. a)



Da 5 gelbe und 3 rote, also insgesamt 8 Kugeln im Behälter sind, beträgt die Wahrscheinlichkeit bei jedem Ziehen für gelb (g): $\frac{5}{8}$ und für rot (r): $\frac{3}{8}$.

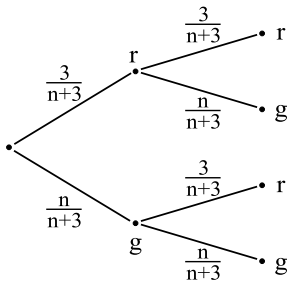
Die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine gelbe Kugel zu ziehen, erhält man mit Hilfe der 1. und 2. Pfadregel (Produkt- und Summenregel):

$$\begin{aligned} P(\llcorner\text{mindestens eine gelbe Kugel}\llcorner) &= P(rg) + P(gr) + P(gg) \\ &= \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{8} + \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{8} + \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} \\ &= \frac{15}{64} + \frac{15}{64} + \frac{25}{64} = \frac{55}{64} \end{aligned}$$

Alternativ kann man auch mit dem Gegenereignis rechnen:

$$\begin{aligned}
 P(\text{«mindestens eine gelbe Kugel»}) &= 1 - P(\text{«keine gelbe Kugel»}) \\
 &= 1 - P(rr) \\
 &= 1 - \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} \\
 &= \frac{64}{64} - \frac{9}{64} = \frac{55}{64}
 \end{aligned}$$

b)



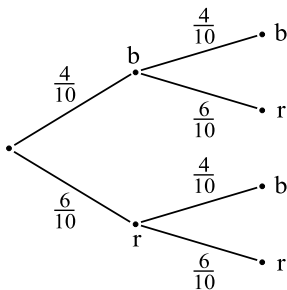
Wenn im Behälter 3 rote und n gelbe Kugeln sind, gibt es insgesamt $n + 3$ Kugeln. Damit beträgt die Wahrscheinlichkeit bei jedem Ziehen für gelb (g): $\frac{n}{n+3}$ und für rot (r): $\frac{3}{n+3}$. Da die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine gelbe Kugel zu ziehen, 0,91 betragen soll, erhält man (am geschicktesten) mit Hilfe des Gegenereignisses folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}
 P(\text{«mindestens eine gelbe Kugel»}) &= 1 - P(\text{«keine gelbe Kugel»}) \\
 0,91 &= 1 - P(rr) \\
 0,91 &= 1 - \frac{3}{n+3} \cdot \frac{3}{n+3} \\
 \frac{3}{n+3} \cdot \frac{3}{n+3} &= 0,09 \\
 \frac{9}{(n+3)^2} &= 0,09 \\
 \frac{9}{0,09} &= (n+3)^2 \\
 100 &= (n+3)^2 \\
 \pm 10 &= n+3 \\
 \Rightarrow n_1 &= 7 \text{ bzw. } n_2 = -13
 \end{aligned}$$

Wegen $n > 0$ kommt nur $n_1 = 7$ als Lösung in Frage.

Also hätten sich im Behälter 7 gelbe Kugeln befinden müssen.

7. a)



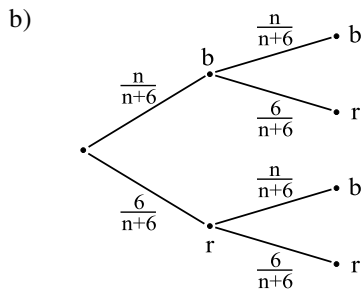
Da 4 blaue und 6 rote, also insgesamt 10 Kugeln in der Urne sind, beträgt die Wahrscheinlichkeit bei jedem Ziehen für blau (b): $\frac{4}{10}$ und für rot (r): $\frac{6}{10}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens eine Kugel blau ist, erhält man mit Hilfe der 1. und 2. Pfadregel (Produkt- und Summenregel):

$$\begin{aligned}
 P(\text{«höchstens eine blaue Kugel»}) &= P(rr) + P(br) + P(rb) \\
 &= \frac{6}{10} \cdot \frac{6}{10} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{10} + \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{10} \\
 &= \frac{36}{100} + \frac{24}{100} + \frac{24}{100} \\
 &= \frac{84}{100} = 0,84
 \end{aligned}$$

Alternativ kann man auch mit dem Gegenereignis rechnen:

$$\begin{aligned}
 P(\text{«höchstens eine blaue Kugel»}) &= 1 - P(\text{«zwei blaue Kugel»}) \\
 &= 1 - P(bb) \\
 &= 1 - \frac{4}{10} \cdot \frac{4}{10} \\
 &= \frac{100}{100} - \frac{16}{100} \\
 &= \frac{84}{100} = 0,84
 \end{aligned}$$



Wenn im Behälter 6 rote und n blaue Kugeln sind, gibt es insgesamt $n + 6$ Kugeln. Damit beträgt die Wahrscheinlichkeit bei jedem Ziehen für blau (b): $\frac{n}{n+6}$ und für rot (r): $\frac{6}{n+6}$.

Da die Wahrscheinlichkeit, höchstens eine blaue Kugel zu ziehen, 0,64 betragen soll, erhält man (am geschicktesten) mit Hilfe des Gegenereignisses folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}
 P(\text{«höchstens eine blaue Kugel»}) &= 1 - P(\text{«zwei blaue Kugel»}) \\
 0,64 &= 1 - P(bb) \\
 0,64 &= 1 - \frac{n}{n+6} \cdot \frac{n}{n+6} \\
 \frac{n}{n+6} \cdot \frac{n}{n+6} &= 0,36 \\
 \frac{n^2}{(n+6)^2} &= 0,36 \\
 \frac{n}{n+6} &= \pm 0,6
 \end{aligned}$$

Durch Fallunterscheidung erhält man:

$$\begin{aligned}
 \frac{n}{n+6} &= 0,6 \\
 n &= 0,6 \cdot n + 3,6 \\
 0,4 \cdot n &= 3,6 \\
 \Rightarrow n_1 &= 9
 \end{aligned}$$

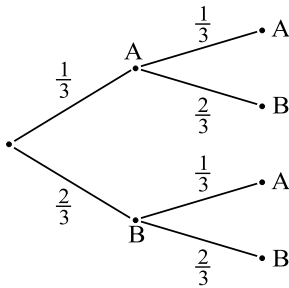
bzw.:

$$\begin{aligned} \frac{n}{n+6} &= -0,6 \\ n &= -0,6 \cdot n - 3,6 \\ 1,6 \cdot n &= -3,6 \\ \Rightarrow n_2 &= -\frac{9}{4} \end{aligned}$$

Wegen $n > 0$ kommt nur $n_1 = 9$ als Lösung in Frage.

Also hätten sich im Behälter 9 blaue Kugeln befinden müssen.

8. a)



Da 4-mal der Buchstabe A und 8-mal der Buchstabe B, also insgesamt 12 Buchstaben im Hut sind, beträgt die Wahrscheinlichkeit bei jedem Ziehen für A: $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ und für B: $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

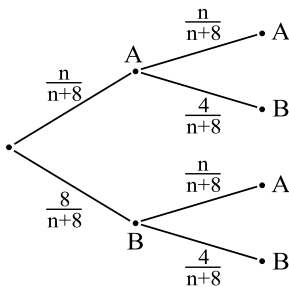
Die Wahrscheinlichkeit, mindestens einmal B zu ziehen, erhält man mit Hilfe der 1. und 2. Pfadregel (Produkt- und Summenregel):

$$\begin{aligned} P(\text{«mindestens einmal B»}) &= P(AB) + P(BA) + P(BB) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \\ &= \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{4}{9} = \frac{8}{9} \end{aligned}$$

Alternativ kann man auch mit dem Gegenereignis rechnen:

$$\begin{aligned} P(\text{«mindestens einmal B»}) &= 1 - P(\text{«kein B»}) \\ &= 1 - P(AA) \\ &= 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{9}{9} - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \end{aligned}$$

b)



Wenn im Hut n -mal der Buchstabe A und 8-mal der Buchstabe B sind, gibt es insgesamt $n + 8$ Buchstaben. Damit beträgt die Wahrscheinlichkeit bei jedem Ziehen für A: $\frac{n}{n+8}$ und für B: $\frac{8}{n+8}$. Da die Wahrscheinlichkeit, höchstens einmal den Buchstaben B zu ziehen, 0,96 betragen soll, erhält man (am geschicktesten) mit Hilfe des Gegenereignisses folgende Gleichung:

$$P(\text{«höchstens einmal B»}) = 1 - P(\text{«zweimal B»})$$

$$0,96 = 1 - P(BB)$$

$$0,96 = 1 - \frac{8}{n+8} \cdot \frac{8}{n+8}$$

$$\frac{8}{n+8} \cdot \frac{8}{n+8} = 0,04$$

$$\frac{64}{(n+8)^2} = 0,04$$

$$\frac{64}{0,04} = (n+8)^2$$

$$1600 = (n+8)^2$$

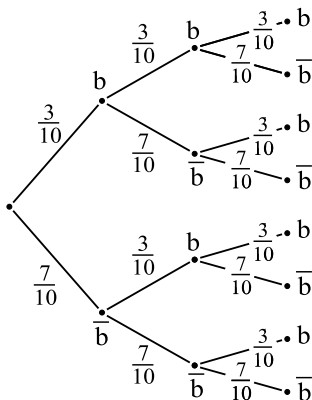
$$\pm 40 = n+8$$

$$\Rightarrow n_1 = 32 \text{ bzw. } n_2 = -48$$

Wegen $n > 0$ kommt nur $n_1 = 32$ als Lösung in Frage.

Also hätten sich im Hut 32 Buchstaben A befinden müssen.

9. a)



Da 3 blaue und 7 nicht blaue, also insgesamt 10 Kugeln in der Urne sind, betragen die Wahrscheinlichkeiten bei jedem Ziehen für blau (b): $\frac{3}{10}$ und für nicht blau (\bar{b}): $\frac{7}{10}$.

Die Wahrscheinlichkeit, keine blaue Kugel zu ziehen, erhält man mit Hilfe der 1. Pfadregel (Produktregel):

$$\begin{aligned} P(\text{«keine blaue Kugel»}) &= P(\bar{b}\bar{b}\bar{b}) \\ &= \frac{7}{10} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{7}{10} \\ &= \frac{343}{1000} = 0,343 \end{aligned}$$

b) Da 6 rote, 3 blaue und 1 gelbe, also insgesamt 10 Kugeln in der Urne sind, beträgt die Wahrscheinlichkeit bei jedem Ziehen für rot (r), blau (b) beziehungsweise gelb (g): $\frac{6}{10}$, $\frac{3}{10}$ und $\frac{1}{10}$.

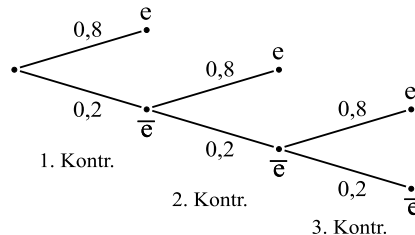
Die Wahrscheinlichkeit, dass alle Kugeln verschiedenfarbig sind, erhält man mit Hilfe der 1. und 2. Pfadregel (Produkt- und Summenregel):

$$\begin{aligned} P(\text{«alle Kugeln verschieden»}) &= P(\text{rbg}) + P(\text{rgb}) + P(\text{brg}) + P(\text{bgr}) + P(\text{grb}) + P(\text{gbr}) \\ &= \frac{6}{10} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{10} + \frac{6}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{10} + \frac{3}{10} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{1}{10} \\ &\quad + \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{6}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{3}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{6}{10} \\ &= 6 \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{108}{1000} = 0,108 \end{aligned}$$

schicktesten mit Hilfe der Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses:

$$\begin{aligned}
 P(\text{«mindestens eine gerade Zahl»}) &= 1 - P(\text{«keine gerade Zahl»}) \\
 &= 1 - P(\text{uuu}) \\
 &= 1 - \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \\
 &= \frac{125}{125} - \frac{27}{125} \\
 &= \frac{98}{125}
 \end{aligned}$$

12. a) e: Fehler erkannt; $P(e) = 0,8$.
 \bar{e} : Fehler übersehen; $P(\bar{e}) = 0,2$.



Die Wahrscheinlichkeit, dass ein vorhandener Fehler zweimal übersehen und erst beim dritten Mal erkannt wird, erhält man mit Hilfe der 1. Pfadregel (Produktregel):

$$P(\bar{e}\bar{e}e) = 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,8 = 0,032 = 3,2\%$$

- b) Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler spätestens beim 3. Mal erkannt wird, erhält man mit Hilfe der 1. und 2. Pfadregel (Produkt- und Summenregel); dabei kann der Fehler beim 1. Mal, beim 2. Mal oder erst beim 3. Mal erkannt werden:

$$\begin{aligned}
 P(\text{«Fehler spätestens beim 3. Mal erkannt»}) &= P(e) + P(\bar{e}e) + P(\bar{e}\bar{e}e) \\
 &= 0,8 + 0,2 \cdot 0,8 + 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,8 \\
 &= 0,8 + 0,16 + 0,032 \\
 &= 0,992
 \end{aligned}$$

Alternativ kann man auch mit dem Gegenereignis rechnen:

$$\begin{aligned}
 P(\text{«Fehler spätestens beim 3. Mal erkannt»}) &= 1 - P(\text{«Fehler nicht erkannt»}) \\
 &= 1 - P(\bar{e}\bar{e}\bar{e}) \\
 &= 1 - 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 \\
 &= 1 - 0,008 \\
 &= 0,992
 \end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 99,2% wird der Fehler spätestens beim 3. Mal erkannt.