Gruber | Neumann

Erfolg im Mathe-Abi 2012

Übungsbuch für den Wahlteil Baden-Württemberg mit Tipps und Lösungen

Freiburger Verlag

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Erfolg von Anfang an

... ist das Geheimnis eines guten Abiturs. Das vorliegende Übungsbuch ist speziell auf die Anforderungen des Wahlteils des Mathematik-Abiturs für G8 und G9 in Baden-Württemberg abgestimmt. Es umfasst die zwei großen Themenbereiche Analysis und Geometrie sowie passende Original-Abituraufgaben seit 2006 in einem Buch.

Der Wahlteil besteht aus komplexeren Aufgaben, die mit Hilfe eines grafikfähigen Taschenrechners (GTR) und einer Formelsammlung gelöst werden sollen. Der Schwerpunkt liegt auf der Analysis. Thematisch geht es i.d.R. um anwendungsbezogene Transferaufgaben, um das Modellieren realitätsnaher Aufgabenstellungen, um das Herstellen von Zusammenhängen und das Entwickeln von Lösungsstrategien.

Der blaue Tippteil

Manchmal hat man keine Idee, wie man eine Aufgabe angehen soll bzw. es fehlt der Lösungsansatz. Hier hilft der blaue Tippteil in der Mitte des Buches weiter: Zu jeder Aufgabe gibt es dort Tipps, die helfen, einen Ansatz zu finden, ohne die Lösung vorwegzunehmen.

Der Aufbau der Mathematikprüfung

- Die gesamte Prüfungszeit beträgt 240 Minuten (vier Zeitstunden).
- Der Lehrer erhält vor der Prüfung den Pflichtteil und für den Wahlteil drei Aufgabenvorschläge aus der Analysis und zwei aus der Geometrie. Er wählt aus den Vorschlägen für den Wahlteil je einen aus der Analysis bzw. der Geometrie aus.
- Der Schüler erhält zu Beginn der Prüfung alle Aufgaben (den Pflichtteil und den vom Lehrer ausgesuchten Wahlteil, bestehend aus Analysis und Geometrie). Er erhält zu diesem Zeitpunkt noch keine Hilfsmittel.
- Er bearbeitet zuerst den Pflichtteil (Richtzeit: 80 Min), dann gibt er den Pflichtteil ab und erhält die Hilfsmittel (Taschenrechner, Formelsammlung) für den Wahlteil.

Insgesamt können maximal 60 Verrechnungspunkte in der Prüfung erzielt werden, davon 26 im Pflichtteil und 34 im Wahlteil. Wer den Pflichtteil vollständig richtig bearbeitet hat und im Wahlteil mindestens einen Verrechnungspunkt erhält, bekommt die Note ausreichend (5 Notenpunkte).

Allen Schülern, die sich auf das Abitur vorbereiten, wünschen wir viel Erfolg.

Helmut Gruber, Robert Neumann

Analysis

1 Windkraftanlage

Tipps ab Seite 22, Lösungen ab Seite 32

Bei einer Darrieus-Windkraftanlage ist der Rotor vertikal angeordnet. Zwei vorgebogene Metallblätter mit geeigneter Stellung wandeln die Windenergie in Rotationsenergie um. Die Rotorblätter behalten auch bei schneller Umdrehung ihre Bogenform bei, wie ein Springseil, welches mit den Händen um den Körper geschleudert wird. Legt man die x-Achse entlang der Rotorachse, so lässt sich die geometrische Form eines Blattes des abgebildeten Rotors näherungsweise durch einen Teil des Graphen der Funktion f mit

$$f(x) = -0,00045x^4 - 0,044x^2 + 6$$

beschreiben. Dabei entspricht eine Längeneinheit einem Meter.

a) Untersuchen Sie den Graphen der Funktion f auf Symmetrie und bestimmen Sie die Nullstellen von f.
   Skizzieren Sie den Graphen von f im Intervall zwischen den Nullstellen.

b) Berechnen Sie den Winkel, den die Blätter mit der Rotorachse einschließen.
   Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Punktes P in der Rotorblattmitte bei einer Drehzahl von 80 Umdrehungen pro Minute in km/h.
   Bei einer Darrieus-Windkraftanlage ist die so genannte Wirkfläche die Fläche zwischen den beiden Rotorblättern. Diese Darrieus-Windkraftanlage leistet pro Quadratmeter der Wirkfläche 125 Watt. Berechnen Sie die Wirkfläche in m^2 und die Leistung dieser Anlage in Watt.

c) Eine weitere Möglichkeit der näherungsweisen Beschreibung der Blattform der Darrieus-Windkraftanlage soll der Graph der Funktion g mit

$$g(x) = 7 - \frac{1}{2} \cdot \left(e^{0,3 \cdot x} + e^{-0,3 \cdot x}\right) \text{ mit } x \in [-8,75\,;8,75] \quad \text{liefern.}$$

   Berechnen Sie den Flächeninhalt der Rotoren bei diesem Rechenmodell und geben Sie die prozentuale Abweichung zum ursprünglichen Flächeninhalt in Teilaufgabe b) an.
   Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion g in diesem Intervall keine Wendepunkte besitzt.

Tipps – Analysis

1 Windkraftanlage

a) Setzen Sie $-x$ in $f(x)$ ein; falls $f(-x) = f(x)$ ist der Graph von f achsensymmetrisch zur y-Achse. Die Nullstellen von f erhalten Sie durch Lösen der Gleichung $f(x) = 0$ mit Hilfe des GTR. Zum Skizzieren des Graphen von f müssen Sie den Zeichenbereich entsprechend einstellen.

b) Den Winkel α, den die Blätter mit der Rotorachse einschließen, erhalten Sie, indem Sie zuerst die Steigung m in einer Nullstelle mit Hilfe der 1. Ableitung von f bestimmen; setzen Sie hierzu den x-Wert in $f'(x)$ ein; verwenden Sie $\tan\alpha = m$.
Überlegen Sie, welchen Radius r der Kreis hat, auf welchem sich der Punkt P bewegt. Den Umfang eines Kreises erhalten Sie mit Hilfe der Formel $\mathrm{U} = 2 \cdot \pi \cdot r$. Bestimmen Sie die Anzahl der Umdrehungen pro Stunde und den zurückgelegten Weg s. Die Geschwindigkeit erhalten Sie durch $v = \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{t}}$, wobei t die Zeitdauer ist.
Die Wirkfläche W ist doppelt so groß wie der Flächeninhalt A der Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse.
Den Flächeninhalt A erhalten Sie mit Hilfe eines Integrals; verwenden Sie den GTR. Multiplizieren Sie die berechnete Wirkfläche W mit der Leistung pro Quadratmeter.

c) Die Wirkfläche W^* der Rotoren ist doppelt so groß wie der Flächeninhalt A^* der Fläche zwischen dem Graphen von g und der x-Achse. Den Flächeninhalt A^* erhalten Sie wiederum mit Hilfe eines Integrals. Die prozentuale Abweichung von W^* zu W erhalten Sie, indem Sie die Differenz von W^* und W durch W teilen und mit 100% multiplizieren.
Zur Bestimmung von Wendepunkten verwenden Sie die 2. Ableitung von g, die Sie mit der Kettenregel erhalten. Als notwendige Bedingung lösen Sie die Gleichung $g''(x) = 0$; beachten Sie, dass $e^{0,3x} > 0$ und $e^{-0,3x} > 0$ ist.

2 Heizkosten

a) Für die Definitionsbereichsbestimmung setzen Sie den Nenner gleich Null.
Die senkrechte Asymptote (Pol) erhalten Sie als Nullstelle des Nenners von $f_t(x)$, die waagrechte Asymptote erhalten Sie für $|x| \to \infty$.
Überlegen Sie, ob Achsen- oder Punktsymmetrie vorliegt; bei Achsensymmetrie zu $x = a$ gilt: $f(a+h) = f(a-h)$, bei Punktsymmetrie zu $\mathrm{P}\,(a \mid b)$ gilt: $\frac{f(a+h)+f(a-h)}{2} = b$.
Um die Punkte mit minimalem Abstand zu erhalten, stellen Sie eine Abstandsfunktion zwischen Punkt P und einem Punkt $\mathrm{Q}\,(x \mid f(x))$ der Kurve auf.
Der Abstand zweier Punkte ist $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.
Bestimmen Sie die Minima mit Hilfe des GTR.
Überlegen Sie, welche Eigenschaften Punkte auf der 1. Winkelhalbierenden haben.

b) Bestimmen Sie die Heizkosten ohne Dämmung ($d = 0$) und setzen Sie ein Viertel davon mit $\mathrm{H}(d)$ gleich.

Lösungen – Analysis

1 Windkraftanlage

Es ist $f(x) = -0{,}00045x^4 - 0{,}044x^2 + 6$.

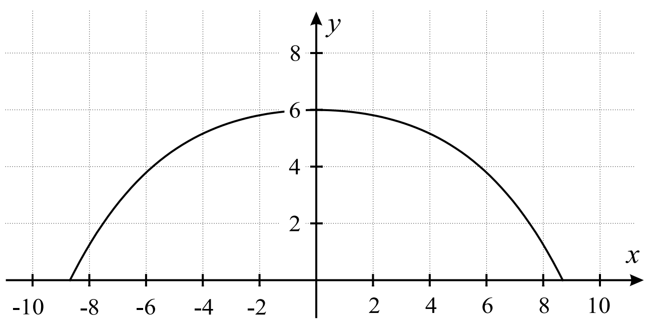
a) Um den Graphen von f auf Symmetrie zu untersuchen, setzt man $-x$ in $f(x)$ ein:

$$f(-x) = -0{,}00045 \cdot (-x)^4 - 0{,}044 \cdot (-x)^2 + 6 = -0{,}00045x^4 - 0{,}044x^2 + 6 = f(x)$$

Wegen $f(-x) = f(x)$ ist der Graph von f achsensymmetrisch zur y-Achse.
Die Nullstellen von f erhält man durch $f(x) = 0$ bzw. durch die Gleichung:

$$-0{,}00045x^4 - 0{,}044x^2 + 6 = 0$$

Mit Hilfe des GTR erhält man: $x_1 \approx -8{,}75$ und $x_2 \approx 8{,}75$.
Den Graphen von f erhält man mit Hilfe des GTR; Zeichenbereich $-9 \leqslant x \leqslant 9$ und $0 \leqslant y \leqslant 6$:



b) Den Winkel α, den die Blätter mit der Rotorachse einschließen, erhält man, indem man zuerst die Steigung m in einer Nullstelle, z.B. $x = -8{,}75$ mit Hilfe der 1. Ableitung von f bestimmt:

$$f'(x) = -0{,}0018x^3 - 0{,}088x$$

Setzt man $x = -8{,}75$ in $f'(x)$ ein, ergibt sich:

$$m = f'(-8{,}75) = -0{,}0018 \cdot (-8{,}75)^3 - 0{,}088 \cdot (-8{,}75) \approx 1{,}976$$

Damit erhält man:

$$\tan\alpha = m$$
$$\tan\alpha = 1{,}976$$
$$\Rightarrow \ \alpha \approx 63{,}16^\circ$$

Der Winkel, den die Blätter mit der Rotorachse einschließen, beträgt etwa $63,2^\circ$.

Der Punkt P bewegt sich auf einem Kreis mit Radius $r = f(0) = 6\,\text{m}$.
Bei einer Umdrehung ergibt sich der zurückgelegte Weg aus dem Umfang U des zugehörigen Kreises:

$$\text{U} = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot \pi \cdot 6\,\text{m} = 12\pi\,\text{m}$$

Eine Drehzahl von 80 Umdrehungen pro Minute ergibt 4800 Umdrehungen pro Stunde.
Der in einer Stunde $(\text{t} = 1\text{h})$ zurückgelegte Weg s beträgt damit:

$$\text{s} = 4800 \cdot \text{U} = 4800 \cdot 12\pi\text{m} = 57\,600\pi\,\text{m} \approx 180\,956\,\text{m} \approx 181\,\text{km}$$

Damit gilt für die Geschwindigkeit v des Punktes P:

$$v = \frac{\text{s}}{\text{t}} \approx \frac{181\,\text{km}}{1\text{h}} = 181\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Die Geschwindigkeit des Punktes P beträgt etwa $181\,\text{km/h}$.

Die Wirkfläche W ist doppelt so groß wie der Flächeninhalt A der Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse.
Den Flächeninhalt A erhält man mit Hilfe eines Integrals:

$$\text{A} = \int_{-8,75}^{8,75} f(x)\text{d}x \approx 76,12 \text{ (GTR)}$$

Damit gilt:

$$\text{W} = 2 \cdot \text{A} \approx 2 \cdot 76,12 = 152,24$$

Die Wirkfläche dieser Darrieus-Windkraftanlage beträgt etwa $152,2\,\text{m}^2$.

Da diese Darrieus-Windkraftanlage pro Quadratmeter der Wirkfläche 125 Watt leistet, erhält man die gesamte Leistung P, indem man die Wirkfläche mit der Leistung pro Quadratmeter multipliziert:

$$\text{P} \approx 152,2\,\text{m}^2 \cdot 125\,\frac{\text{Watt}}{\text{m}^2} = 19\,025 \text{ Watt}$$

Die Leistung beträgt etwa 19 025 Watt.

c) Die Wirkfläche W^* der Rotoren ist doppelt so groß wie der Flächeninhalt A^* der Fläche zwischen dem Graphen von g mit $g(x) = 7 - \frac{1}{2} \cdot \left(e^{0,3 \cdot x} + e^{-0,3 \cdot x}\right)$; $x \in [-8,75\,; 8,75]$ und der x-Achse.
Den Flächeninhalt A^* erhält man mit Hilfe eines Integrals:

$$\text{A}^* = \int_{-8,75}^{8,75} g(x)\text{d}x \approx 76,73 \text{ (GTR)}$$

Damit gilt:

$$W^* = 2 \cdot A^* \approx 2 \cdot 76,73 = 153,46$$

Die Wirkfläche dieser Darrieus-Windkraftanlage beträgt etwa $153,5\,\mathrm{m}^2$.

Die Differenz D von $W^* = 153,46$ zu $W = 152,24$ beträgt:

$$D = W^* - W = 153,46 - 152,24 = 1,22$$

Die prozentuale Abweichung von W^* zu W erhält man, indem man die Differenz D von W^* zu W durch W teilt und mit 100% multipliziert:

$$\frac{D}{W} \cdot 100\% = \frac{1,22}{152,24} \cdot 100\% \approx 0,80\,\%$$

Damit beträgt die prozentuale Abweichung etwa $0,8\,\%$.
Um zu zeigen, dass der Graph der Funktion g im Intervall $[-8,75\,;\,8,75]$ keine Wendepunkte hat, verwendet man die 2. Ableitung von g, die man mit der Kettenregel erhält:

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{1}{2} \cdot \left(e^{0,3\cdot x} \cdot 0,3 + e^{-0,3\cdot x} \cdot (-0,3)\right) = -0,15 \cdot e^{0,3x} + 0,15 \cdot e^{-0,3x} \\ g''(x) &= -0,15 \cdot e^{0,3x} \cdot 0,3 + 0,15 \cdot e^{-0,3x} \cdot (-0,3) = -0,045 \cdot e^{0,3x} - 0,045 \cdot e^{-0,3x} \end{aligned}$$

Die notwendige Bedingung $g''(x) = 0$ führt zu

$$\begin{aligned} -0,045 \cdot e^{0,3x} - 0,045 \cdot e^{-0,3x} &= 0 \\ -0,045 \cdot \left(e^{0,3x} + e^{-0,3x}\right) &= 0 \\ e^{0,3x} + e^{-0,3x} &= 0 \end{aligned}$$

Wegen $e^{0,3x} > 0$ und $e^{-0,3x} > 0$ ist auch $e^{0,3x} + e^{-0,3x} > 0$, so dass die Gleichung $e^{0,3x} + e^{-0,3x} = 0$ keine reelle Lösung hat.
Damit hat der Graph der Funktion g im Intervall $[-8,75\,;\,8,75]$ keine Wendepunkte.