Gruber I Neumann

# Erfolg im Mathe-Abi 2013

## Vorabdruck
## Wahlteil Stochastik
## für das Abitur ab 2013
## zum
## Übungsbuch für den Wahlteil
## Baden-Württemberg
## mit Tipps und Lösungen

# Vorwort

## Erfolg von Anfang an

...ist das Geheimnis eines guten Abiturs.

Dieses Sonderheft ist speziell auf die Anforderungen des Wahlteils in Stochastik des G8-Abiturs in Baden-Württemberg abgestimmt und enthält Übungsaufgaben sowie Abitur-Musteraufgaben, die dem Niveau des Abiturs entsprechen.

In den Büchern «Erfolg im Mathe-Abi Pflichtteil» und «Erfolg im Mathe-Abi Wahlteil» finden Sie dann alle Themenbereiche Analysis, Geometrie und Stochastik mit Muster-Abituraufgaben sowie Original-Abituraufgaben mit Tipps und ausführlichen und verständlichen Lösungen.

## Der blaue Tippteil

Hat man keine Idee, wie man eine Aufgabe angehen soll, hilft der blaue Tippteil zwischen Aufgaben und Lösungen weiter: Zu jeder Aufgabe gibt es dort Tipps, die helfen, einen Ansatz zu finden, ohne die Lösung vorwegzunehmen.

## Wie arbeiten Sie mit diesem Buch?

Mit diesem Buch können Sie Ihre mathematischen Grundlagen auffrischen. Dazu befindet sich am Anfang jedes Kapitels eine kurze thematische Übersicht. Die einzelnen Kapitel bauen zwar aufeinander auf, doch ist es nicht zwingend notwendig, das Buch der Reihe nach durchzuarbeiten. Die Aufgaben sind oft in ihrer Schwierigkeit gestaffelt.

Den besten Lerneffekt erreichen Sie, wenn Sie beim Aufgabenlösen zuerst im Tippteil nachschauen. Die Lösungen mit ausführlichen und verständlichen Lösungswegen bilden den letzten Teil des Übungsbuchs. Hier finden Sie neben den notwendigen Formeln, Rechenverfahren und Denkschritten auch sinvolle alternative Lösungswege.

Allen Schülerinnen und Schülern, die sich auf das Abitur vorbereiten, wünschen wir viel Erfolg.

Helmut Gruber und Robert Neumann

# Inhaltsverzeichnis

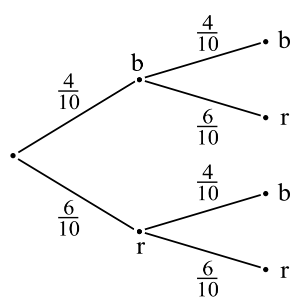
# 1 Baumdiagramme und Pfadregeln

*Tipps ab Seite 26, Lösungen ab Seite* 39

In diesem Kapitel geht es darum, mithilfe bereits bekannter Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen die Wahrscheinlichkeiten weiterer, oft «komplizierterer» Ereignisse zu bestimmen. Ein wichtiges Hilfsmittel sind *Baumdiagramme*. Sie sind insbesondere bei mehrstufigen Zufallsexperimenten hilfreich. Eine Verzweigung entspricht dabei den möglichen Versuchausgängen der jeweiligen Stufe; längs der «Äste» werden die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten notiert.
Bei der Erstellung des Baumdiagrammes muss man darauf achten, dass sich bei Stichproben ohne Zurücklegen die Wahrscheinlichkeiten bei jeder Stufe ändern.
Manchmal ist es auch geschickt oder hilfreich, mit dem Gegenereignis zu rechnen; dies ist vor allem (aber nicht immer) bei den Signalwörtern «mindestens» oder «höchstens» der Fall. Ist A ein Ereignis und $\overline{A}$ das zugehörige Gegenereignis, so gilt für die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A})$$

**1. Beispiel: Ziehen mit Zurücklegen**
Ein Gefäß enthält 4 blaue und 6 rote Kugeln. Es werden 2 Kugeln mit Zurücklegen gezogen.
Da 4 blaue und 6 rote, also insgesamt 10 Kugeln in der Urne sind, beträgt die Wahrscheinlichkeit bei jedem Ziehen für die Ergebnisse blau (b): $\frac{4}{10}$ und für rot (r): $\frac{6}{10}$.
Damit erhält man folgendes Baumdiagramm:




Wichtige Rechenregeln für Baumdiagramme sind die *1. Pfadregel* und die *2. Pfadregel*:
Die 1. Pfadregel (Produktregel) besagt, dass man die Wahrscheinlichkeit längs eines Pfades berechnet, indem man die Wahrscheinlichkeiten der zugehörigen Äste miteinander multipliziert.
Mit der 2. Pfadregel (Summenregel) kann man die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses berechnen, indem man die Wahrscheinlichkeiten aller zugehörigen Pfade addiert.

Will man beispielsweise die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass beide Kugeln rot sind, so ergibt sich mit Hilfe der 1. Pfadregel:

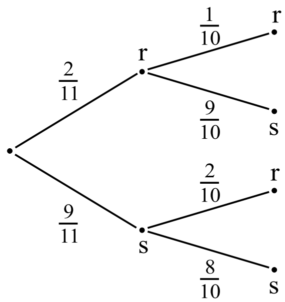
$$P(\text{«beide Kugeln rot»}) = P(rr) = \frac{6}{10} \cdot \frac{6}{10} = \frac{36}{100} = 0,36$$

Will man die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass beide Kugeln gleichfarbig sind, so ergibt sich mit Hilfe der 1. und 2. Pfadregel:

$$P(\text{«beide Kugeln gleichfarbig»}) = P(rr) + P(bb) = \frac{6}{10} \cdot \frac{6}{10} + \frac{4}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{36}{100} + \frac{16}{100} = \frac{52}{100} = 0,52$$

**2. Beispiel: Ziehen ohne Zurücklegen**

Eine Urne enthält 2 rote und 9 schwarze Kugeln. Es werden 2 Kugeln gleichzeitig gezogen.
Das gleichzeitige Ziehen entspricht dem Ziehen ohne Zurücklegen. Man erhält folgendes Baumdiagramm:




Da 2 rote und 9 schwarze, also insgesamt 11 Kugeln in der Urne sind, beträgt die Wahrscheinlichkeit beim 1. Ziehen für rot (r): $\frac{2}{11}$ und für schwarz (s): $\frac{9}{11}$.

Beim 2. Ziehen sind nur noch 10 Kugeln vorhanden und die Wahrscheinlichkeiten hängen davon ab, welche Farbe schon gezogen wurde.

Will man beispielsweise die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass genau eine Kugel schwarz ist, ergibt sich mit Hilfe der 1. und 2. Pfadregel (Produkt- und Summenregel):

$$\mathrm{P}(\text{«genau eine schwarze Kugel»}) = \mathrm{P}(\mathrm{rs}) + \mathrm{P}(\mathrm{sr}) = \frac{2}{11} \cdot \frac{9}{10} + \frac{9}{11} \cdot \frac{2}{10} = \frac{9}{55} + \frac{9}{55} = \frac{18}{55}$$

Will man die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass mindestens eine der beiden Kugeln schwarz ist, ist es geschickt, das Gegenereignis zu benutzen. Man erhält mit Hilfe des Gegenereignisses:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\text{«mindestens eine schwarze Kugel»}) &= 1 - \mathrm{P}(\text{«keine schwarze Kugel»}) \\
&= 1 - \mathrm{P}(\mathrm{rr}) \\
&= 1 - \frac{2}{11} \cdot \frac{1}{10} \\
&= 1 - \frac{1}{55} \\
&= \frac{54}{55}
\end{aligned}$$

## Baumdiagramme

1. Eine Urne enthält n blaue und 6 rote Kugeln.

   a) Es werden 2 Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Wie viele blaue Kugeln müssen sich in der Urne befinden, damit die Wahrscheinlichkeit, höchstens eine blaue Kugel zu ziehen, 0,64 beträgt?

   b) Es werden 3 Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Bestimmen Sie die Anzahl der blauen Kugeln, wenn die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine blaue Kugel zu ziehen, $\frac{19}{27}$ betragen soll.

2. Bei der Produktion von Überraschungseiern treten die folgenden beiden Fehler auf:
   $F_1$ : falsches Gewicht der Schokoladenhülle
   $F_2$ : fehlerhafte Verpackung

   $F_1$ und $F_2$ treten unabhängig voneinander auf. Ein Ei ist einwandfrei, wenn es keinen der beiden Fehler aufweist, was erfahrungsgemäß bei 90 % der Eier der Fall ist. Erfahrungsgemäß haben 7,5 % der Schokohüllen ein falsches Gewicht.
   Veranschaulichen Sie die Zusammenhänge mit einem Baumdiagramm und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der Fehler $F_2$ auftritt.

3. In einer Urne sind 3 rote und 3 blaue Kugeln. Es werden 2 Kugeln gezogen.

   a) Prüfen Sie, ob die Wahrscheinlichkeit, dass zwei verschiedenfarbige Kugeln gezogen werden, beim Ziehen mit oder ohne Zurücklegen größer als 50% ist.

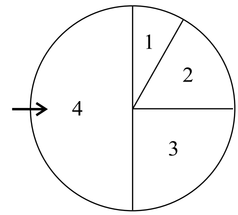
   b) Wie viele rote Kugeln müsste man in die Urne dazulegen, dass die Wahrscheinlichkeit, dass beim zweimaligen Ziehen ohne Zurücklegen die Wahrscheinlichkeit für zwei verschiedenfarbige Kugeln 50% beträgt?

4. Das Büro einer Firma ist durch eine Türsicherung und einen Bewegungsmelder gegen Einbruch gesichert. Nach Werksangaben versagt die Türsicherung in $0,4\,\%$, der Bewegungsmelder in $1,5\,\%$ aller Einbruchsversuche.

   a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit funktionieren beide Sicherungen gleichzeitig ?
   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Einbrecher ungehindert in das Büro eindringen kann ?

   b) Dieses Risiko ist der Firma zu hoch.
   Auf welchen Wert müsste die Wahrscheinlichkeit für das Versagen des Bewegungsmelders verringert werden, damit die Wahrscheinlichkeit für ein ungehindertes Eindringen bei höchstens 1 : 100 000 liegt ?

5. Ein Glücksrad besteht aus vier Kreissektoren, die mit den Zahlen 1, 2, 3 und 4 versehen sind.
Die Mittelpunktswinkel der verschiedenen Sektoren haben die Weiten 30°, 60°, 90° und 180° (siehe Abbildung).
Nach jeder Drehung gilt diejenige Zahl als gezogen, auf deren Kreissektor der feststehende Pfeil zeigt.




   a) Wie oft müsste man das Glücksrad drehen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 97 % mindestens einmal die Zahl 4 gezogen wird?
   b) Wie groß müsste der zur Zahl 1 gehörende Mittelpunktswinkel sein, damit bei dreimaligem Drehen mit 99,9 %-iger Wahrscheinlichkeit höchstens zweimal die Zahl 1 gezogen wird?

6. In einer Urne sind 4 weiße und eine unbekannte Anzahl roter Kugeln.

   a) Es werden 2 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Wie viele rote Kugeln waren vorhanden, wenn die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kugeln weiß sind, $\frac{1}{6}$ beträgt?
   b) Es werden 3 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Wie viele rote Kugeln waren vorhanden, wenn die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine Kugel weiß ist, $\frac{17}{28}$ beträgt?

7. In einem Gefäß sind 6 rote und n blaue Kugeln. Es werden 3 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.

   a) Wie viele blaue Kugeln waren vorhanden, wenn die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine Kugel rot ist, $\frac{11}{14}$ beträgt?
   b) Für welche Werte von n beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei Kugeln blau sind, wenigstens 90%?

8. Eine Urne enthält sechs rote und eine blaue Kugel. Für ein Glücksspiel wird folgende Regel vereinbart:
Es wird genau eine Kugel gezogen. Ist die gezogene Kugel blau, so wird sie in die Urne zurückgelegt, ist sie dagegen rot, so wird sie beiseite gelegt und in der Urne durch eine blaue ersetzt.

   a) Das Glücksspiel wird dreimal durchgeführt und jeweils die Farbe der gezogenen Kugel festgestellt.
   Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine der Kugeln blau ist.
   b) Ein Glücksspieler behauptet, dass man mindestens zwei Ziehungen durchführen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% mindestens eine rote Kugel zu ziehen. Hat er recht?

# Tipps

## 1 Baumdiagramme und Pfadregeln

1. a) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm mit den Ästen blau (b) und rot (r). Beachten Sie, dass die Wahrscheinlichkeiten bei jedem Ziehen gleich bleiben. Rechnen Sie mit dem Gegenereignis $\overline{A}$, indem Sie $P(A) = 1 - P(\bar{A})$ verwenden. Stellen Sie eine Gleichung auf und lösen Sie diese mit Hilfe des GTR/CAS. Beachten Sie, dass $n > 0$ ist.

   b) Rechnen Sie mit dem Gegenereignis $\overline{A}$, indem Sie $P(A) = 1 - P(\bar{A})$ verwenden. Stellen Sie eine Gleichung auf und lösen Sie diese mit Hilfe des GTR/CAS. Beachten Sie, dass $n > 0$ ist.

2. Um die Zusammenhänge in einem Baumdiagramm darstellen zu können, überlegen Sie, welche Fälle auftreten können. Bezeichnen Sie mit $\overline{F_1}$ bzw. $\overline{F_2}$ den Fall, dass Fehler $F_1$ bzw. $F_2$ nicht auftreten («Gegenereignis») und ermitteln Sie die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten, indem Sie die Pfadregeln verwenden.

3. a) Zeichnen Sie für die verschiedenen Ziehungsarten jeweils ein Baumdiagramm mit den Ästen blau (b) und rot (r). Beachten Sie, dass sich die Wahrscheinlichkeiten beim Ziehen ohne Zurücklegen bei jedem Ziehen ändern. Verwenden Sie die Pfadregeln.

   b) Wählen Sie die Variable n als Anzahl der zusätzlichen roten Kugeln und zeichnen Sie ein Baumdiagramm. Verwenden Sie die Pfadregeln und stellen Sie eine Gleichung auf, die Sie mit Hilfe des GTR/CAS lösen. Beachten Sie, dass $n > 0$ ist.

4. a) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm mit Türsicherung funktioniert (T) und Türsicherung funktioniert nicht ($\overline{T}$) bzw. Bewegungsmelder funktioniert (B) und Bewegungsmelder funktioniert nicht ($\overline{B}$). Verwenden Sie jeweils die 1. Pfadregel.

   b) Wählen Sie $P\left(\overline{B}\right) = p$, stellen Sie mit Hilfe der 1. Pfadregel eine Gleichung auf und lösen Sie diese.

5. a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Zahlen, indem Sie den zugehörigen Mittelpunktswinkel durch 360° teilen. Verwenden Sie für das gesuchte Ereignis bei n Drehungen das Gegenereignis, stellen Sie eine Gleichung auf und lösen Sie diese mit Hilfe des GTR/CAS.

   b) Beachten Sie, dass für die Wahrscheinlichkeit der Zahl 1 gilt: $P(1) = \frac{\alpha}{360°}$.
   Verwenden Sie für das gesuchte Ereignis bei 3 Drehungen das Gegenereignis, stellen Sie eine Gleichung auf und lösen Sie diese mit Hilfe des GTR/CAS.

6. a) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm mit den Ästen weiß (w) und rot (r). Beachten Sie, dass sich die Wahrscheinlichkeiten bei jedem Ziehen ändern. Verwenden Sie die 1.

Pfadregel, stellen Sie eine Gleichung auf und lösen Sie diese mit Hilfe des GTR/CAS. Beachten Sie, dass $n > 0$ ist.

b) Rechnen Sie mit dem Gegenereignis $\overline{A}$, indem Sie $P(A) = 1 - P(\bar{A})$ verwenden. Stellen Sie eine Gleichung auf und lösen Sie diese mit Hilfe des GTR/CAS. Beachten Sie, dass $n > 0$ ist.

7. a) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm mit den Ästen blau (b) und rot (r). Beachten Sie, dass sich die Wahrscheinlichkeiten bei jedem Ziehen ändern. Rechnen Sie mit dem Gegenereignis $\overline{A}$, indem Sie $P(A) = 1 - P(\bar{A})$ verwenden. Stellen Sie eine Gleichung auf und lösen Sie diese mit Hilfe des GTR/CAS. Beachten Sie, dass $n > 0$ ist.

   b) Überlegen Sie, welche Ergebnisse zum gesuchten Ereignis gehören und verwenden Sie die Pfadregeln. Stellen Sie eine Ungleichung auf und lösen Sie diese mit Hilfe des GTR/CAS. Beachten Sie, dass $n > 0$ ist.

8. a) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm mit blau (b) und rot (r). Beachten Sie, dass sich nach Ziehung einer roten Kugel die Verhältnisse in der Urne ändern. Rechnen Sie mit dem Gegenereignis $\overline{A}$, indem Sie $P(A) = 1 - P(\bar{A})$ verwenden.

   b) Bestimmen Sie zuerst die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A: «mindestens eine Kugel ist rot» bei n Ziehungen: Verwenden Sie hierzu das Gegenereignis $\overline{A}$ : «Alle n Kugeln sind blau» sowie $P(A) = 1 - P(\bar{A})$. Stellen Sie eine Ungleichung auf und lösen Sie diese mit Hilfe des GTR/CAS.

# 2 Binomialverteilung

1. Verwenden Sie den GTR/ CAS. Beachten Sie, dass gilt:

$$P(X < k) = P(X \leqslant k-1)$$
$$P(X > k) = 1 - P(X \leqslant k)$$
$$P(X \geqslant k) = 1 - P(X \leqslant k-1)$$

2. Verwenden Sie den GTR/ CAS. Beachten Sie, dass gilt:

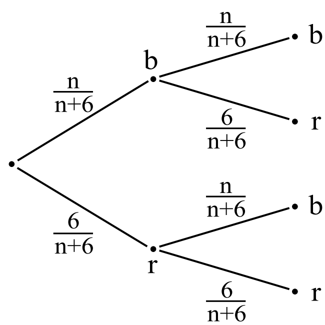
$$P(X < k) = P(X \leqslant k-1)$$
$$P(X > k) = 1 - P(X \leqslant k)$$
$$P(X \geqslant k) = 1 - P(X \leqslant k-1)$$

3. - 5. Verwenden Sie die Verteilungsfunktion des GTR/ CAS. Bei manchen Geräten können gibt es eine «Umkehrfunktion» der kumulierten Binomialverteilung, die Sie benutzten können.

# Lösungen

## 1 Baumdiagramme und Pfadregeln

1. a)




Wenn im Behälter 6 rote und n blaue Kugeln sind, gibt es insgesamt $n+6$ Kugeln. Damit beträgt die Wahrscheinlichkeit bei jedem Ziehen für blau (b): $\frac{n}{n+6}$ und für rot (r): $\frac{6}{n+6}$.

Da die Wahrscheinlichkeit, höchstens eine blaue Kugel zu ziehen, 0,64 betragen soll, erhält man (am geschicktesten) mit Hilfe des Gegenereignisses folgende Gleichung:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(\text{«höchstens eine blaue Kugel»}) &= 1-\mathrm{P}(\text{«zwei blaue Kugeln»})\\
0{,}64 &= 1-\mathrm{P}(\mathrm{bb})\\
0{,}64 &= 1-\frac{n}{n+6}\cdot\frac{n}{n+6}\\
\frac{n}{n+6}\cdot\frac{n}{n+6} &= 0{,}36
\end{aligned}
$$

Mit Hilfe des GTR/CAS erhält man: $n_1 = 9$ und $n_2 = -\frac{9}{4}$.
Wegen $n > 0$ kommt nur $n_1 = 9$ als Lösung in Frage.
Also müssen sich im Behälter 9 blaue Kugeln befinden.

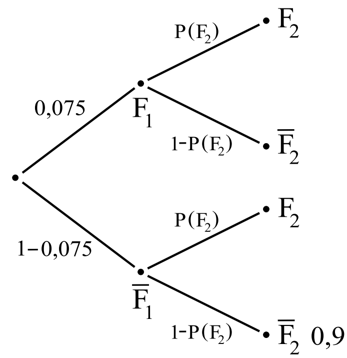
b) Da die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine blaue Kugel zu ziehen, $\frac{19}{27}$ betragen soll, erhält man (am geschicktesten) mit Hilfe des Gegenereignisses folgende Gleichung:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(\text{«mindestens eine blaue Kugel»}) &= 1-\mathrm{P}(\text{«keine blaue Kugel»})\\
\frac{19}{27} &= 1-\mathrm{P}(\mathrm{rrr})\\
\frac{19}{27} &= 1-\frac{6}{n+6}\cdot\frac{6}{n+6}\cdot\frac{6}{n+6}\\
\frac{6}{n+6}\cdot\frac{6}{n+6}\cdot\frac{6}{n+6} &= \frac{8}{27}
\end{aligned}
$$

Man erhält mit Hilfe des GTR/CAS: $n = 3$
Also müssen sich im Behälter 3 blaue Kugeln befinden.

2. Um die Zusammenhänge in einem Baumdiagramm darstellen zu können, überlegt man sich zunächst, welche Fälle auftreten können. Man kann insgesamt vier Fälle unterscheiden:
   1. $F_1$ tritt auf und $F_2$ tritt auf.
   2. $F_1$ tritt auf und $F_2$ tritt nicht auf.
   3. $F_1$ tritt nicht auf und $F_2$ tritt auf.
   4. $F_1$ tritt nicht auf und $F_2$ tritt nicht auf.

Im Folgenden bezeichnet $\overline{F_1}$ bzw. $\overline{F_2}$ den Fall, dass Fehler $F_1$ bzw. $F_2$ nicht auftritt («Gegenereignis»). Außerdem ist $P(F_1) = 0,075$ und $P\left(\overline{F_1 F_2}\right) = 0,9$ (laut Aufgabenstellung).
In einem Baumdiagramm lässt sich dieser Zusammenhang wie nebenstehend gezeichnet darstellen.




Die Fehler treten unabhängig voneinander auf, also kann die Produktregel angewendet werden:

$$P(\text{«Ei ist einwandfrei»}) = P\left(\overline{F_1 F_2}\right) = P\left(\overline{F_1}\right) \cdot P\left(\overline{F_2}\right) = 0,9$$

und es gilt: $P(F_1) = 0,075$.
Mit

$$P\left(\overline{F_1}\right) = 1 - P(F_1) = 1 - 0,075 = 0,925$$

bzw.

$$P\left(\overline{F_2}\right) = 1 - P(F_2)$$

folgt:

$$P\left(\overline{F_1}\right) \cdot P\left(\overline{F_2}\right) = 0,925 \cdot (1 - P(F_2)) = 0,9$$

und daraus:

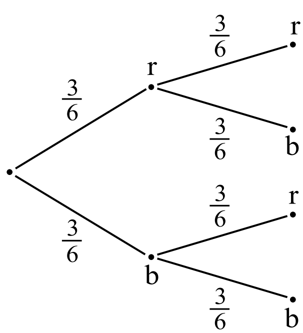
$$1 - P(F_2) = \frac{0,9}{0,925} = \frac{36}{37}$$

beziehungsweise:

$$P(F_2) = 1 - \frac{36}{37} \approx 0,027$$

Der Fehler $F_2$ tritt also mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa $2,7\,\%$ auf.

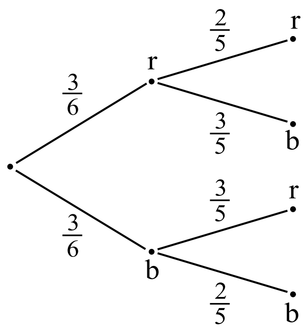
3. a)




Da 3 rote und 3 blaue, also insgesamt 6 Kugeln in der Urne sind, betragen die Wahrscheinlichkeiten beim Ziehen *mit* Zurücklegen bei jedem Ziehen für rot (r): $\frac{3}{6}$ und für blau (b) ebenfalls $\frac{3}{6}$.

Die Wahrscheinlichkeit, zwei verschiedenfarbige Kugeln zu ziehen, erhält man mit Hilfe der 1. und 2. Pfadregel:

$$\begin{aligned} P(\text{«Kugeln sind verschiedenfarbig»}) &= P(rb) + P(br) \\ &= \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} = 50\% \end{aligned}$$




Da 3 rote und 3 blaue, also insgesamt 6 Kugeln in der Urne sind, beträgt beim Ziehen *ohne* Zurücklegen die Wahrscheinlichkeit beim 1. Ziehen für rot (r): $\frac{3}{6}$ und für blau (b): $\frac{3}{6}$.

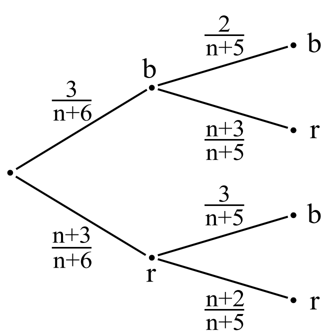
Beim 2. Ziehen sind nur noch 5 Kugeln vorhanden und die Wahrscheinlichkeiten hängen davon ab, welche Farbe schon gezogen wurde.

Die Wahrscheinlichkeit, zwei verschiedenfarbige Kugeln zu ziehen, erhält man ebenfalls mit Hilfe der 1. und 2. Pfadregel:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\text{«Kugeln sind verschiedenfarbig»}) &= \mathrm{P}(\mathrm{rb}) + \mathrm{P}(\mathrm{br}) \\ &= \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} \\ &= \frac{9}{30} + \frac{9}{30} \\ &= \frac{9}{15} > 50\% \end{aligned}$$

Damit beträgt die Wahrscheinlichkeit, zwei verschiedenfarbige Kugeln zu ziehen, beim Ziehen ohne Zurücklegen mehr als 50%.

b)




Legt man n weitere rote Kugeln in die Urne, so gibt es 3 blaue und $3+\mathrm{n}$ rote Kugeln, also insgesamt $\mathrm{n}+6$ Kugeln. Damit beträgt die Wahrscheinlichkeit beim 1. Ziehen für rot (r): $\frac{n+3}{n+6}$ und für blau (b): $\frac{3}{n+6}$. Beim 2. Ziehen sind nur noch 5 Kugeln vorhanden, so dass die Wahrscheinlichkeiten davon abhängen, welche Farbe zuerst gezogen wurde.

Da die Wahrscheinlichkeit, zwei verschiedenfarbige Kugeln zu ziehen, $50\% = 0{,}50$ betragen soll, erhält man mit Hilfe der 1. und 2. Pfadregel folgende Gleichung:

$$\mathrm{P}(\text{«Kugeln sind verschiedenfarbig»}) = \mathrm{P}(\mathrm{rb}) + \mathrm{P}(\mathrm{br})$$

$$\begin{aligned} 0{,}5 &= \frac{n+3}{n+6} \cdot \frac{3}{n+5} + \frac{3}{n+6} \cdot \frac{n+3}{n+5} \\ 0{,}5 &= \frac{3 \cdot (n+3)}{(n+6) \cdot (n+5)} + \frac{3 \cdot (n+3)}{(n+6) \cdot (n+5)} \\ 0{,}5 &= \frac{6 \cdot (n+3)}{(n+6) \cdot (n+5)} \end{aligned}$$

Mit Hilfe des GTR/CAS erhält man: $n_1 = 3$ und $n_2 = -2$.
Wegen $n > 0$ kommt nur $n_1 = 3$ als Lösung in Frage.
Also müsste man 3 weitere rote Kugeln in die Urne dazulegen.

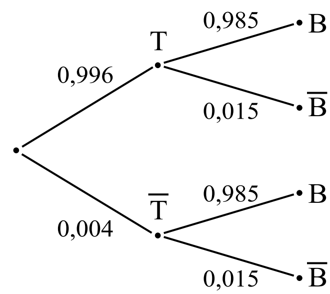
4. a) Die Wahrscheinlichkeit, dass die Türsicherung funktioniert, beträgt:

$$P(T) = 1 - 0{,}004 = 0{,}996$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Bewegungsmelder funktioniert, beträgt:

$$P(B) = 1 - 0{,}015 = 0{,}985$$

Um sich die Situation zu veranschaulichen, kann man ein Baumdiagramm zeichnen.




Damit erhält man die Wahrscheinlichkeit, dass beide Sicherungen funktionieren, mit Hilfe der 1. Pfadregel (Produktregel):

$$P(\text{«beide Sicherungen funktionieren»}) = P(TB) = 0{,}996 \cdot 0{,}985 = 0{,}98106$$

Beide Sicherungen funktionieren also mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa $98{,}1\,\%$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass man ungehindert in das Büro eindringen kann, erhält man ebenfalls mit Hilfe der der 1. Pfadregel (Produktregel):

$$P\left(\text{«beide Sicherungen funktionieren nicht»}\right) = P\left(\overline{TB}\right) = 0{,}004 \cdot 0{,}015 = 0{,}00006$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von $0{,}006\,\%$ kann man ungehindert ins Büro eindringen.

b) Damit dieses Risiko auf 1 : 100 000 verringert werden kann, müsste mit $P\left(\overline{B}\right) = p$ gelten:

$$\begin{aligned} P\left(\overline{TB}\right) &= \frac{1}{100\,000} \\ 0{,}004 \cdot p &= \frac{1}{100\,000} \\ p &= 0{,}0025 \end{aligned}$$

Also dürfte die Wahrscheinlichkeit für das Versagen des Bewegungsmelders höchstens $0{,}25\,\%$ betragen.

5. a) Die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Zahlen erhält man, indem man den zugehörigen Mittelpunktswinkel durch 360° teilt:

$$\begin{aligned} P(1) &= \frac{30^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{12} \\ P(2) &= \frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{6} \\ P(3) &= \frac{90^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{4} \\ P(4) &= \frac{180^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit, dass bei n Drehungen des Glücksrads mindestens einmal die Zahl 4 erscheint, verwendet man das Gegenereignis «keine 4 erscheint»:

$$P(\text{«mindestens einmal 4»}) = 1 - P(\text{«keine 4»}) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Damit diese Wahrscheinlichkeit etwa 97 % beträgt, muss gelten:

$$\begin{aligned} 0{,}97 &= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n &= 0{,}03 \end{aligned}$$

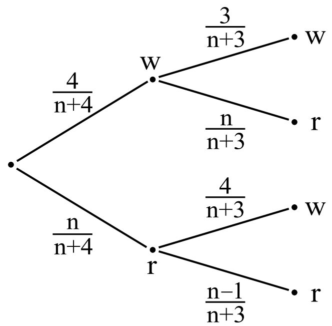
Mit Hilfe des GTR/CAS erhält man: $n \approx 5{,}06$.
Also muss man etwa fünfmal drehen, damit mit etwa 97 %-iger Wahrscheinlichkeit mindestens einmal die Zahl 4 erscheint.

b) Allgemein gilt für die Zahl 1 die Wahrscheinlichkeit $P(1) = \frac{\alpha}{360^\circ}$.
Das Gegenereignis von höchstens zweimal die Zahl 1 ziehen ist genau dreimal die Zahl 1 ziehen; dieses hat die Wahrscheinlichkeit $P(111) = \left(\frac{\alpha}{360^\circ}\right)^3$.
Damit gilt für die Wahrscheinlichkeit, höchstens zweimal die Zahl 1 ziehen:

$$\begin{aligned} P(\text{«höchstens zweimal 1»}) &= 0{,}999 \\ 1 - P(111) &= 0{,}999 \\ 1 - \left(\frac{\alpha}{360^\circ}\right)^3 &= 0{,}999 \\ 0{,}001 &= \left(\frac{\alpha}{360^\circ}\right)^3 \end{aligned}$$

Mit Hilfe des GTR/CAS erhält man: $\alpha = 36^\circ$.
Der Mittelpunktswinkel für die Zahl 1 muss also 36° betragen.

6. a)




Wenn in der Urne 4 weiße und n rote Kugeln sind, gibt es insgesamt $n+4$ Kugeln. Damit beträgt die Wahrscheinlichkeit beim 1. Ziehen Ziehen für weiß (w): $\frac{4}{n+4}$ und für rot (r): $\frac{n}{n+4}$. Beim 2. Ziehen sind nur noch $n+3$ Kugeln vorhanden und die Wahrscheinlichkeiten hängen davon ab, welche Farbe schon gezogen wurde.

Da die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kugeln weiß sind, $\frac{1}{6}$ betragen soll, erhält man mit Hilfe der 1. Pfadregel folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} P(\text{«beide Kugeln weiß»}) &= P(ww) \\ \frac{1}{6} &= \frac{4}{n+4} \cdot \frac{3}{n+3} \\ (n+4)\cdot(n+3) &= 72 \\ n^2+7n-60 &= 0 \end{aligned}$$

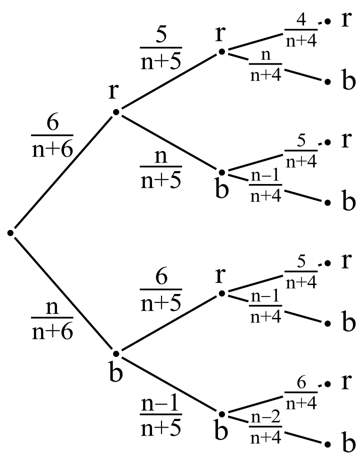
Mit Hilfe des GTR/CAS erhält man: $n_1 = 5$ und $n_2 = -12$.
Wegen $n > 0$ kommt nur $n_1 = 5$ als Lösung in Frage.
Also waren in der Urne 5 rote Kugeln vorhanden.

b) Da die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine weiße Kugel zu ziehen, $\frac{17}{28}$ betragen soll, erhält man (am geschicktesten) mit Hilfe des Gegenereignisses folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} P(\text{«mindestens eine weiße Kugel»}) &= 1 - P(\text{«keine weiße Kugel»}) \\ \frac{17}{28} &= 1 - P(rrr) \\ \frac{17}{28} &= 1 - \frac{n}{n+4} \cdot \frac{n-1}{n+3} \cdot \frac{n-2}{n+2} \\ \frac{n}{n+4} \cdot \frac{n-1}{n+3} \cdot \frac{n-2}{n+2} &= \frac{11}{28} \end{aligned}$$

Wegen $n > 0$ erhält man mit Hilfe des GTR/CAS: $n = 12$.
Also waren in der Urne 12 rote Kugeln vorhanden.

7. a)




Wenn im Gefäß 6 rote und $n$ blaue Kugeln sind, gibt es insgesamt $n+6$ Kugeln. Damit beträgt die Wahrscheinlichkeit beim 1. Ziehen Ziehen für blau (b): $\frac{n}{n+6}$ und für rot (r): $\frac{6}{n+6}$. Beim jedem weiteren Ziehen sind weniger Kugeln vorhanden und die Wahrscheinlichkeiten hängen davon ab, welche Farbe schon gezogen wurde.

Da die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine rote Kugel zu ziehen, $\frac{11}{14}$ betragen soll, erhält man (am geschicktesten) mit Hilfe des Gegenereignisses folgende Gleichung:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(\text{«mindestens eine rote Kugel»}) &= 1 - \mathrm{P}(\text{«keine rote Kugel»}) \\
\frac{11}{14} &= 1 - \mathrm{P}(\mathrm{bbb}) \\
\frac{11}{14} &= 1 - \frac{n}{n+6} \cdot \frac{n-1}{n+5} \cdot \frac{n-2}{n+4} \\
\frac{n}{n+6} \cdot \frac{n-1}{n+5} \cdot \frac{n-2}{n+4} &= \frac{3}{14}
\end{aligned}
$$

Wegen $n > 0$ erhält man mit Hilfe des GTR/ CAS: $n = 10$

Also waren im Gefäß 10 blaue Kugeln vorhanden.

b) Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei der Kugeln blau sind, soll wenigstens $90\% = 0{,}9$ betragen. Man erhält daher mit Hilfe der 1. und 2. Pfadregel folgende Ungleichung:

$$
\begin{aligned}
0{,}9 &< \mathrm{P}(\text{«mindestens zwei blaue Kugeln»}) \\
0{,}9 &< \mathrm{P}(\mathrm{bbr}) + \mathrm{P}(\mathrm{brb}) + \mathrm{P}(\mathrm{rbb}) + \mathrm{P}(\mathrm{bbb}) \\
0{,}9 &< \frac{n}{n+6} \cdot \frac{n-1}{n+5} \cdot \frac{6}{n+4} + \frac{n}{n+6} \cdot \frac{6}{n+5} \cdot \frac{n-1}{n+4} + \frac{6}{n+6} \cdot \frac{n}{n+5} \cdot \frac{n-1}{n+4} \\
&\quad + \frac{n}{n+6} \cdot \frac{n-1}{n+5} \cdot \frac{n-2}{n+4} \\
0{,}9 &< \frac{(18n + n \cdot (n-2)) \cdot (n-1)}{(n+6) \cdot (n+5) \cdot (n+4)}
\end{aligned}
$$

Wegen $n > 0$ erhält man mit Hilfe des GTR/CAS: $n > 22{,}98$

Also müssen im Gefäß mindestens 23 blaue Kugeln vorhanden sein.

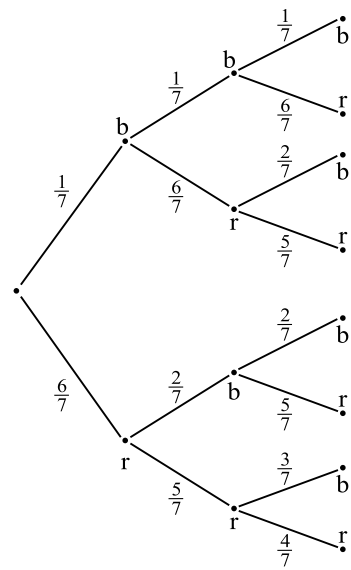
8. a) Um eine Übersicht über alle möglichen Ausgänge des Spiels und deren Wahrscheinlichkeiten zu erhalten, bietet es sich an, ein Baumdiagramm zu zeichnen. Dabei ist darauf zu achten, dass sich nach Ziehung einer roten Kugel die Verhältnisse in der Urne ändern. Es ist b: blau und r: rot.

Die einzelnen Ziehungen sind nicht unabhängig voneinander, da die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Ziehung vom Ausgang der vorherigen Ziehung abhängt. Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine Kugel blau ist, erhält man mit Hilfe des Gegenereignisses:

P(«mindestens eine blaue Kugel)

$= 1 - P(\text{«alle Kugeln rot}) = 1 - P(\text{rrr})$

$= 1 - \frac{6}{7} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{7} = \frac{223}{343} \approx 0{,}650 = 65{,}0\,\%$




b) Zuerst bestimmt man die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A: mindestens eine rote Kugel bei n Ziehungen:
Hierzu verwendet man das Gegenereignis $\overline{A}$ : «Alle n Kugeln sind blau.»
Es gilt:

$$P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right) = 1 - \left(\frac{1}{7}\right)^n$$

Der Spieler behauptet, dass $P(A) \geqslant 0{,}99$ für alle $n \geqslant 2$.
Nun berechnet man, für welche n die Wahrscheinlichkeit $P(A) \geqslant 0{,}99$ gilt:

$$1 - \left(\frac{1}{7}\right)^n \geqslant 0{,}99$$

$$0{,}01 \geqslant \left(\frac{1}{7}\right)^n$$

Mit Hilfe des GTR/CAS erhält man: $n \geqslant 2{,}37$.
Die Behauptung des Spielers ist falsch, da $P(A) \geqslant 0{,}99$ erst für $n \geqslant 3$ gilt.