Ergänzungsheft Erfolg im Mathe-Abi

Hessen Prüfungsaufgaben Leistungskurs 2012

Grafikfähiger Taschenrechner (GTR),
Computeralgebrasystem (CAS)

Dieses Heft enthält Übungsaufgaben für GTR und CAS sowie die GTR- und CAS-Abituraufgaben der Jahre 2008 bis 2011. Es ergänzt das Buch «Erfolg im Mathe Abi 2012 Hessen, Prüfungsaufgaben Leistungskurs»

Inhaltsverzeichnis

Analysis

1 Exponentialfunktion – Medikament (GTR)

Tipps ab Seite 8, Lösungen ab Seite 11

Durch $f(t) = 20t \cdot e^{-0,5t}$ wird die Konzentration eines Medikaments im Blut eines Patienten beschrieben. Dabei wird t in Stunden seit der Einnahme und $f(t)$ in $\frac{mg}{l}$ gemessen.
Die folgenden Betrachtungen sind nur für die Zeitspanne der ersten 12 Stunden nach der Einnahme des Medikaments durchzuführen.

a) Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf der Konzentration.
Nach welcher Zeit erreicht die Konzentration ihren höchsten Wert?
Wie groß ist dieser höchste Wert?
Das Medikament ist nur wirksam, wenn seine Konzentration im Blut mindestens $4\,\frac{mg}{l}$ beträgt.
Berechnen Sie die Zeitspanne, in der das Medikament wirksam ist.
Wie hoch ist die mittlere Konzentration innerhalb der ersten 12 Stunden?

b) Zu welchem Zeitpunkt wird das Medikament am stärksten abgebaut?
Wie groß ist zum Zeitpunkt $t = 4$ die momentane Änderungsrate der Konzentration?
Ab diesem Zeitpunkt wird die Konzentration des Medikaments nun näherungsweise durch die Tangente an das Schaubild von f an der Stelle $t = 4$ beschrieben.
Bestimmen Sie damit den Zeitpunkt, zu dem das Medikament vollständig abgebaut ist.

c) Anstelle der Näherung aus Teilaufgabe b) wird nun wieder die Beschreibung der Konzentration durch f verwendet.
Vier Stunden nach der ersten Einnahme wird das Medikament in der gleichen Dosierung erneut eingenommen. Es wird angenommen, dass sich dabei die Konzentrationen im Blut des Patienten addieren.
Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf der Gesamtkonzentration für $0 \leqslant t \leqslant 12$.
Die Konzentration des Medikaments im Blut darf $20\,\frac{mg}{l}$ nicht übersteigen.
Wird diese Vorgabe in diesem Fall eingehalten?

d) Das Medikament wird nun in seiner Zusammensetzung verändert.
Die Konzentration des Medikaments im Blut wird durch
$g(t) = at \cdot e^{-bt}$ mit $a > 0$ und $b > 0$ beschrieben.
Dabei wird t in Stunden seit der Einnahme und $g(t)$ in $\frac{mg}{l}$ gemessen.
Bestimmen Sie die Konstanten a und b, wenn die Konzentration vier Stunden nach der Einnahme ihren größten Wert $10\,\frac{mg}{l}$ erreicht.

Tipps

Analysis

1 Exponentialfunktion – Medikament (GTR)

a) Für die Skizze verwenden Sie den GTR; beachten Sie dabei die richtige Einstellung für den Zeichenbereich.
Bestimmen Sie das Maximum mit dem GTR.
Für die wirksame Zeitspanne schneiden Sie das Schaubild von f mit der Geraden $y = 4$ (GTR). Geben Sie die beiden Schnittstellen an und berechnen Sie deren Differenz.
Die mittlere Konzentration $\overline{\mathrm{K}}$ erhalten Sie durch Integration: $\overline{\mathrm{K}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$ (GTR).

b) Um den Zeitpunkt, zu dem das Medikament am stärksten abgebaut wird, zu erhalten, berechnen Sie das Minimum von f' (GTR).
Die momentane Änderungsrate erhalten Sie mit $f'(t)$.
Für die Tangentengleichung setzen Sie den Punkt $(4 \mid f(4))$ und $m = f'(4)$ in die Punkt-Steigungsform $y - y_1 = m(t - t_1)$ ein; schneiden Sie die Tangente mit der x-Achse.

c) Um die Gesamtkonzentration zu skizzieren, können Sie entweder eine Wertetabelle aufstellen oder eine Funktionsgleichung für die Gesamtkonzentration angeben; dabei berücksichtigen Sie, dass bei der Addition ab $t = 4$ die ursprüngliche Funktion um vier Einheiten nach rechts verschoben hinzukommt.
Prüfen Sie, ob in der Wertetabelle der Wert von 20 überschritten wird oder berechnen Sie das Maximum der Funktion der Gesamtkonzentration mit dem GTR.

d) Stellen Sie mit Hilfe von $g(t)$ und deren Ableitung sowie den gegebenen Daten zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten auf und lösen Sie diese; beachten Sie, dass das Maximum gegeben ist.

2 Trigonometrische Funktion – Rechteck (GTR)

a) Beachten Sie beim Skizzieren des Graphen für den Zeichenbereich des GTR die Intervallgrenzen des Definitionsbereichs.
Überlegen Sie, wie die Gerade $y = mx$ verlaufen kann. Berechnen Sie als «Grenzfall» die Steigung im Ursprung mit Hilfe von f'.

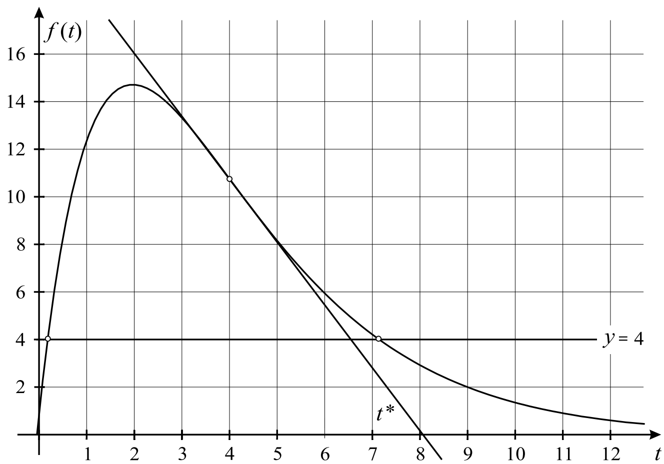
b) Skizzieren Sie die Problemstellung.
Überlegen Sie sich die Koordinaten der vier Eckpunkte des Rechtecks in Abhängigkeit

Lösungen

Analysis

1 Exponentialfunktion – Medikament (GTR)

a) Es ist $f(t) = 20t \cdot e^{-0,5t}$; $0 \leqslant t \leqslant 12$.



Das Maximum von f erhält man mit dem GTR: $t = 2$ und $f(2) = 14,7$.
Nach zwei Stunden wird die maximale Konzentration von etwa $14,7\,\frac{mg}{l}$ erreicht.
Schneidet man das Schaubild von f mit der Geraden $y = 4$, so erhält man mit dem GTR: $t_1 = 0,22$ und $t_2 = 7,15$. Damit ist $t_2 - t_1 = 7,15 - 0,22 = 6,93$.
Somit beträgt die Zeitspanne, in der das Medikament wirksam ist, etwa 7 Stunden.
Die mittlere Konzentration $\overline{\mathrm{K}}$ des Medikaments erhält man mit Hilfe des Integrals:
$\overline{\mathrm{K}} = \frac{1}{12-0}\int_0^{12} f(t)dt = 6,55$ (GTR)
Die mittlere Konzentration des Medikaments innerhalb der ersten 12 Stunden beträgt also etwa $6,6\,\frac{mg}{l}$.

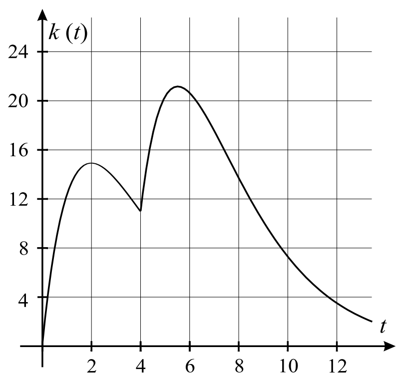
b) Der Zeitpunkt, an dem das Medikanment am stärksten abgebaut wird, ist der Zeitpunkt mit der größten negativen zeitlichen Änderung der Konzentration, also das Minimum von f':
$f'(t) = 20e^{-0,5t} + 20t \cdot e^{-0,5t} \cdot (-0,5) = (20 - 10t)e^{-0,5t}$

Das Minimum von f' erhält man mit dem GTR: $t = 4$.
Etwa 4 Stunden nach Einnahme des Medikaments wird es am stärksten abgebaut.
Die momentane Änderungsrate zum Zeitpunkt $t = 4$ erhält man mit f':
$f'(4) = (20 - 10 \cdot 4)e^{-0,5 \cdot 4} = -20e^{-2} = -2,71$.
Nach 4 Stunden beträgt die momentane Änderungsrate etwa $-2,7$.
Um die Tangentengleichung von t^* zu bestimmen, setzt man $t_1 = 4$, $y = f(4) = 80e^{-2}$ und

$m = f'(4) = -20e^{-2}$ in die Punkt-Steigungsform $y - y_1 = m(t - t_1)$ ein:
t^*: $y - 80e^{-2} = -20e^{-2} \cdot (t-4) \Rightarrow t^*$: $y = -20e^{-2}t + 160e^{-2}$.
Schneidet man die Tangente t^* mit der x-Achse, so erhält man:
$0 = -20e^{-2}t + 160e^{-2} \Rightarrow t = 8$.
8 Stunden nach der Einnahme ist das Medikament vollständig abgebaut.

c) Für $0 \leqslant t < 4$ wird die Gesamtkonzentration beschrieben durch $f(t)$, für $4 \leqslant t \leqslant 12$ wird sie beschrieben durch $k(t) = f(t) + f(t-4)$, da ab $t = 4$ die ursprüngliche Funktion $f(t)$ um 4 LE nach rechts verschoben und $(f(t-4))$ noch zu $f(t)$ hinzu addiert wird.
Um den zeitlichen Verlauf der Gesamtkonzentration $k(t)$ zu skizzieren, kann man eine Wertetabelle aufstellen:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(t)$	0	12,1	14,7	13,4	10,8	8,2	6,0	4,2	2,9	2,0	1,3	0,9	0,6
$f(t-4)$					0	12,1	14,7	13,4	10,8	8,2	6,0	4,2	2,9
$k(t)$	0	12,1	14,7	13,4	10,8	20,3	20,7	17,6	13,7	10,2	7,3	5,1	3,5



Schon in der Wertetabelle sieht man, dass die Gesamtkonzentration den Wert von 20 $\frac{mg}{l}$ übersteigt.
Berechnet man das Maximum von $k(t) = f(t) + f(t-4) = 20t \cdot e^{-0,5t} + 20(t-4) \cdot e^{-0,5(t-4)}$, mit $t \geqslant 4$ so erhält man:
$t = 5,52$ und $k(5,52) = 21,2$.
Somit wird die Vorgabe, dass die Konzentration im Blut 20 $\frac{mg}{l}$ nicht übersteigen darf, nicht eingehalten.

d) Es ist $g(t) = at \cdot e^{-bt}$; $a > 0$, $b > 0$.
Die Ableitung erhält man mit der Produkt- und Kettenregel:
$g'(t) = a \cdot e^{-bt} + ate^{-bt} \cdot (-b) = (a - abt) \cdot e^{-bt}$
Da die Konzentration $g(t)$ nach 4 Stunden ihren größten Wert 10 $\frac{mg}{l}$ annimmt, gelten fol-

gende Bedingungen:

$$\begin{array}{llcccrcl} \text{I} & g(4) & = & 10 & \Rightarrow & 4a \cdot e^{-4b} & = & 10 \\ \text{II} & g'(4) & = & 0 & \Rightarrow & (a-4ab) \cdot e^{-4b} & = & 0 \end{array}$$

Löst man Gleichung II, so ergibt sich: $a - 4ab = 0$ bzw. $a \cdot (1-4b) = 0 \Rightarrow b = 0,25$.
Setzt man $b = 0,25$ in Gleichung I ein, so ergibt sich: $4a \cdot e^{-4 \cdot 0,25} = 10 \Rightarrow a = 2,5e$.
Die Konzentration erreicht 4 Stunden nach der Einnahme ihren größten Wert $10\,\frac{mg}{l}$, wenn die Konstanten $a = 2,5e$ und $b = 0,25$ gewählt werden.