

Martin Meyer

Mehr Mathematikverständnis

© 2010 by InnoLearn UG

**Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.**

Die Rechte für dieses urheberrechtlich geschützte Buch und der beiliegenden CD liegen bei.

InnoLearn UG



[www.InnoLearn.de](http://www.InnoLearn.de)

Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Autors.

Hinweis zu § 52 a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung eingescannt und in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen.

1. Auflage 2010

© 2010 by InnoLearn UG (haftungsbeschränkt)

# Inhalt

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Inhalt .....</b>                          | <b>3</b>  |
| <b>Vorwort .....</b>                         | <b>7</b>  |
| <b>Lernen und Wissen .....</b>               | <b>11</b> |
| Implizites Lernen .....                      | 12        |
| Implizites Wissen .....                      | 13        |
| Verstehen - Auswendiglernen - Anwenden ..... | 16        |
| Lernen und Gefühle .....                     | 17        |
| Virtuelle Regler .....                       | 18        |
| Wissensnetz .....                            | 19        |
| Motivation .....                             | 20        |
| <b>Die MentalMath<sup>®</sup>-CD .....</b>   | <b>22</b> |
| <b>Zahlen .....</b>                          | <b>25</b> |
| Natürliche Zahlen .....                      | 25        |
| Ganze Zahlen .....                           | 25        |
| Rationale Zahlen .....                       | 26        |
| <i>Bruch</i> .....                           | 26        |
| <i>Echter Bruch</i> .....                    | 27        |
| <i>Unechter Bruch</i> .....                  | 27        |
| <i>Gemischte Zahl</i> .....                  | 27        |
| <i>Dezimalbruch</i> .....                    | 28        |

|   |           |
|---|-----------|
| Rechenregeln .....                      | 28        |
| <i>Erweitern und Kürzen</i> .....       | 28        |
| <i>Gleichnamig machen</i> .....         | 29        |
| <i>Addition und Subtraktion</i> .....   | 29        |
| <i>Multiplikation</i> .....             | 30        |
| <i>Division</i> .....                   | 30        |
| <b>Terme</b> .....                      | <b>31</b> |
| Grundlegendes .....                     | 31        |
| Rechengesetze .....                     | 32        |
| <i>Kommutativgesetz</i> .....           | 32        |
| <i>Assoziativgesetz</i> .....           | 32        |
| <i>Distributivgesetz</i> .....          | 33        |
| Klammern .....                          | 34        |
| <i>Minusklammern</i> .....              | 34        |
| <i>Geschachtelte Klammern</i> .....     | 35        |
| <i>Multiplizieren von Summen</i> .....  | 35        |
| Zusammenfassen gleicher Variablen ..... | 36        |
| Binomische Formeln .....                | 37        |
| 1. <i>Binomische Formel</i> .....       | 37        |
| 2. <i>Binomische Formel</i> .....       | 37        |
| 3. <i>Binomische Formel</i> .....       | 37        |

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Gleichungen</b> .....                                | <b>39</b> |
| Lösen von Gleichungen .....                             | 39        |
| <i>Additions- und Subtraktionsregel</i> .....           | 40        |
| <i>Multiplikationsregel</i> .....                       | 40        |
| <i>Divisionsregel</i> .....                             | 40        |
| <i>Strategie</i> .....                                  | 41        |
| <b>Gleichungssysteme</b> .....                          | <b>43</b> |
| Das Einsetzungsverfahren .....                          | 45        |
| Das Additions- bzw. Subtraktionsverfahren .....         | 47        |
| Gleichungssysteme ohne Lösung .....                     | 49        |
| Gleichungssysteme mit unendlich vielen Lösungen .....   | 50        |
| <b>Quadratische Gleichungen</b> .....                   | <b>53</b> |
| Quadratische Ergänzung .....                            | 54        |
| Lösungsformel (pq-Formel) .....                         | 57        |
| Quadratische Gleichungen mit nur einer Lösung .....     | 58        |
| Unlösbare quadratische Gleichungen .....                | 59        |
| <b>Funktionen</b> .....                                 | <b>61</b> |
| Darstellung .....                                       | 62        |
| <i>Funktionsgleichung</i> .....                         | 62        |
| <i>Wertetabelle</i> .....                               | 62        |
| <i>Funktionsgraph</i> .....                             | 62        |
| Charakteristische Punkte .....                          | 63        |
| <i>Schnittpunkt mit der y-Achse</i> .....               | 63        |
| <i>Schnittpunkt mit der x-Achse (Nullstellen)</i> ..... | 63        |

|  |           |
|--|-----------|
| Lineare Funktionen .....                               | 64        |
| <i>Zwei Punkte-Form</i> .....                          | 64        |
| <i>Funktionsgleichung aus Steigung und Punkt</i> ..... | 65        |
| Quadratische Funktionen .....                          | 66        |
| <i>Berechnung des Scheitelpunktes</i> .....            | 67        |
| <i>Steckbriefaufgabe</i> .....                         | 68        |
| <b>Potenzen und n-te Wurzeln .....</b>                 | <b>71</b> |
| Potenzen .....   | 71        |
| n-te Wurzeln .....                                     | 73        |
| <b>Index .....</b>                                     | <b>75</b> |

# Vorwort

Herzlichen Glückwunsch zu Ihrem Entschluss mithilfe der MentalMath<sup>®</sup>-Methode die bereits in Ihnen wohnenden, ganz persönlichen Fähigkeiten im Umgang mit Mathematik zu entdecken und weiter auszubauen.

Die einzigartige Kombination des Buches und der MentalMath<sup>®</sup>-CD, wird Ihnen dabei helfen mögliche Ängste in Bezug auf Mathematik abzubauen und Sie dazu motivieren, Mathematik mit einem guten Gefühl zu lernen. Weiterhin lassen sich beim Anhören der CD wichtige Begriffe der Schulmathematik unbewusst wahrnehmen, welche hierdurch ein mentales Begriffsnetz entstehen lassen, was später dann mit weiteren Informationen gefüllt werden kann.

In diesem Buch werden zunächst die Grundprinzipien des menschlichen Lernens erläutert und Hinweise dazu gegeben, wie die MentalMath<sup>®</sup>-Methode richtig angewandt werden kann.

Erst, wenn Sie diese Informationen erfahren haben, sollten Sie sich einen Ort suchen, an dem Sie ungestört eine gute halbe Stunde entspannt liegen und die Inhalte der CD auf sich einwirken lassen können.

Hierbei werden Sie merken, wie Sie sich immer mehr entspannen können und dass sich dieser Entspannungszustand beim weiteren Hören der CD immer mehr vertieft. Sie werden verschiedene Erzählungen durchleben und dabei in Ihrem Kopf unterschiedliche Sinnbilder entstehen lassen. Hierbei ist es absolut unwichtig, jedes einzelne Wort zu verstehen. Es genügt, wenn Sie sich einfach nur entspannen. Der Rest geschieht dann ganz automatisch.

Wenn Sie dann, nach dem Hören der CD, Lust haben, den einen oder anderen mathematischen Begriff nachzuschlagen, können Sie dies im mathematischen Teil dieses Buches (ab Seite 25) tun. Hier werden nämlich die wichtigsten Inhalte



der Schulmathematik für die Sekundarstufe I  
verständlich erklärt.

Nun wünsche ich Ihnen viel Erfolg und Freude  
mit diesem Buch und der beiliegenden CD.

Soest, im September 2010

Martin Meyer



# Lernen und Wissen

Viele Menschen, die das Wort „Lernen“ hören, *Lernen* denken dabei oft an dröges, langatmiges und monotones Pauken. Dabei ist diese Lernart, die von vielen als „normal“ angesehen wird gar nicht so alt und entspricht auch nicht der neurophysischen Struktur, die sich im Laufe von Millionen von Jahren entwickelt hat und die wir alle in uns tragen. Erinnern wir uns: Als das allgemeine Schulwesen im 19. Jahrhundert seine Gestalt annahm, ging es darum, eine große Masse von „ungebildeten“ Personen an die Anforderungen der sich gerade entwickelnden Industriegesellschaft anzupassen. Dazu wurden Methoden entwickelt, die es erlaubten, möglichst vielen Menschen gleichzeitig ein vorher festgelegtes Lernpensum „einzufließen“.

Dieses Modell hat seine Zeit überlebt und durch moderne neurowissenschaftliche und psychologische Forschung sind wir heute in der Lage,

Lernmethoden anzubieten, die es erlauben, auf eine natürliche, dem Gehirn angepasste Art und Weise zu lernen, nämlich implizit.

## Implizites Lernen

*implizites  
Lernen*

Das Phänomen des unbewussten, also impliziten Lernens ist vielen Menschen aus ihrem Alltag bekannt. So können die meisten, die Deutsch als Muttersprache gelernt haben, die Regeln der deutschen Grammatik in der Praxis korrekt anwenden, obwohl sie viele der Regeln, die im „Duden“ stehen, nicht explizit, d. h. bewusst kennen.

So *wissen* viele Menschen, die die Sekundarstufe I besucht haben, dass beispielsweise

$7 + 9 = 9 + 7$  ist.

Oder, dass gilt:  $3 + (5 + 4) = (3 + 5) + 4$ .

Formal gesehen *können* diese Menschen sowohl das Kommutativgesetz ( $a + b = b + a$ ) und auch das Assoziativgesetz ( $a + (b + c) = (a + b) + c$ )

bezüglich der Addition *anwenden*. Und darum geht es letztendlich!

Im Rahmen einer wissenschaftlichen Arbeit<sup>1</sup> wurde analysiert, dass zum Lösen einer relativ einfachen Anwendungsaufgabe ca. 60 - 80 Prozent implizites Wissen erforderlich ist. Und um dieses implizite Wissen zu erhalten, bieten sich generell zwei Möglichkeiten an.

## Implizites Wissen

Implizites Wissen kann explizit erworben werden. Beispielsweise haben viele von Ihnen einmal gelernt, wie man zwei Zahlen addiert. Beispielsweise  $4 + 3 = 7$ .

Dieses ehemals explizite Wissen ist bei vielen Menschen zu einem „Automatismus“ geworden, sodass diese, wenn sie  $4 + 3$  *sehen*, gleich an  $7$  *denken*. Sie sind hierbei „intuitiv“ richtig vorgegan-

*implizites  
Wissen*

*Intuition*

---

1. Meyer, Martin: Priming und Lernen. Zum Einfluss von Primingeffekten auf implizite und explizite Lernprozesse. Dissertation an der Fernuniversität in Hagen 2010.

*unbewusstes  
Lernen*

gen und sind sich vielfach noch nicht einmal bewusst, was sie dort gerade gemacht haben.

Implizites Wissen kann aber auch implizit, d. h. unbewusst erworben werden. Wenn ich Ihnen beispielsweise hinreichend oft zeige, wie man einfache Gleichungen nach  $x$  auflöst, werden Sie eine ähnliche Aufgabe richtig lösen können. Und hierzu ist *Verständnis* zwar *nützlich*, aber *nicht unbedingt erforderlich*.

Machen wir einmal einen Test:

*Beispiel 1:*

$$3x + 1 = 16 \quad | -1$$

$$3x = 15 \quad | :3$$

$$x = 5$$

*Beispiel 2:*

$$2x + 3 = 17 \quad | -3$$

$$2x = 14 \quad | :2$$

$$x = 7$$

*Beispiel 3:*

$$4x + 3 = 15 \quad | -3$$

$$4x = 12 \quad | :4$$

$$x = 3$$

Und nun fordere ich Sie auf, das  $x$  der folgenden Gleichung zu bestimmen:

$$4x + 2 = 22$$

Wenn Sie die richtige Antwort („5“) herausgefunden haben, haben Sie soeben implizit gelernt, wie man aus einer vorgegebenen Gleichung eine Variable isoliert, um diese dann zu bestimmen.

Wenn ich Ihnen das explizit *erklärt* hätte, wären wir möglicherweise jetzt noch nicht fertig ...

Sie haben gerade anhand von Beispielen gelernt. Sie haben also die Beispiele bewusst verarbeitet, das dahinter stehende *Prinzip* aber *unbewusst* gelernt, denn von dem dahinterliegenden Prinzip der *Äquivalenzumformung* habe ich nichts geschrieben!

*unbewusstes  
Lernen*

Nun ist es auch möglich, Inhalte unbewusst wahrzunehmen, wobei der eben demonstrierte

*unbewusste  
Wahrnehmung*

Effekt erhalten bleibt! So können Sie beispielsweise, während Sie sich auf einer Party angeregt mit jemandem unterhalten, und ca. 5 Meter weiter Ihr Namen genannt wird, sofort auf diese Informationsquelle umschalten, denn Sie nehmen unbewusst viel mehr wahr, als Sie bewusst meinen.

## **Verstehen - Auswendiglernen - Anwenden**

*Verstehen*

Sie haben eben gemerkt, dass Sie Gleichungen lösen können, obwohl Sie die dahinter liegenden Prinzipien möglicherweise nicht komplett verstanden haben. Sie sehen: Das *Verstehen* aller Einzelheiten ist für ein erfolgreiches Anwenden nicht unbedingt erforderlich. Und das ist es, was

*Verständnis*

man allgemein unter einem „*Verständnis für etwas*“ versteht, nämlich die Fähigkeit, in einem gewissen Bereich erfolgreich Handeln zu können. Das Verstehen aller Einzelheiten ist also bei



einem Verständnis *für* irgendetwas nicht unbedingt erforderlich.

Und wie steht es mit dem Auswendiglernen?

Formales Auswendiglernen ist nicht nötig, wenn Sie in der Lage sind, (unbewusst wirkende)

*Auswendig-  
lernen*

Lösungsstrategien erfolgreich anzuwenden, denn Sie üben bei jeder Anwendung.

*Anwenden*

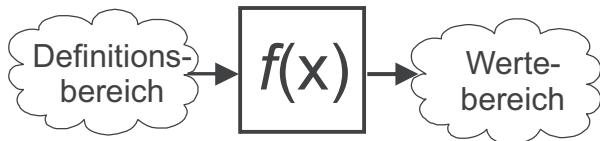
Ja und das muss (natürlich) auch gesagt werden: Anwenden sollten Sie das, was Sie lernen möchten schon, denn der natürliche Lernmechanismus, der auch in Ihrem Gehirn eingebaut ist, funktioniert so, dass nur die Dinge automatisch gelernt werden, die nötig sind.

## **Lernen und Gefühle**

Weil unbewusstes Lernen funktioniert und eben ALLES, auch unbewusste Einflüsse, immer ganz automatisch mitgelernt werden, ist es von Vorteil, wenn Sie beim Lernen gute Gefühle haben. Sie können natürlich auch in Stress- oder Angst-

*automatisches  
Lernen aller  
Einflüsse*

# Funktionen



Eine Funktion ist eine Zuordnung, bei der jedem Element aus dem Definitionsbereich genau ein Element aus dem Wertebereich zugeordnet wird.

*Funktion*

Der Definitionsbereich einer Funktion enthält alle Elemente auf die eine Zuordnungsvorschrift angewandt werden darf.

*Definitionsbereich*

Der Wertebereich einer Funktion enthält alle Elemente, die bei der Anwendung der Funktionsvorschrift herauskommen können.

*Wertebereich*

## Darstellung

Eine Funktion kann auf drei Arten dargestellt werden.

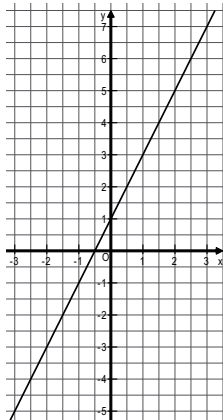
### Funktionsgleichung

$$f(x) = 2x + 1$$

### Wertetabelle

|                 |    |    |    |   |   |   |   |
|-----------------|----|----|----|---|---|---|---|
| x               | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $f(x) = 2x + 1$ | -5 | -3 | -1 | 0 | 3 | 5 | 7 |

### Funktionsgraph



## Charakteristische Punkte

Bei allen Funktionstypen sind zwei charakteristische Punkte interessant.

### Schnittpunkt mit der y-Achse

Diesen erhält man, wenn man für  $x$  den Wert 0 einsetzt, denn alle Punkte auf der y-Achse haben die Eigenschaft, an jeder Stelle den  $x$ -Wert 0 zu besitzen.

Also für das Beispiel von eben:

$$f(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$$

### Schnittpunkt mit der x-Achse

Diese erhält man, wenn man die Funktionsterm gleich Null setzt, denn es werden die Punkte gesucht, an denen die Funktionswerte gleich Null sind.

Die Aufgabe, die dann zu rechnen ist, ist identisch mit dem Lösen von Gleichungen, die für lineare Gleichungen ab Seite 39 und für quadratische Gleichungen ab Seite 53 erklärt wurde.

Für unser Beispiel von eben also:

$$2x + 1 = 0 \quad | -1$$

$$2x = -1 \quad | :2$$

$$x = -0,5$$

Und wenn Sie sich den Funktionsgraphen auf Seite 62 anschauen, werden Sie sehen, dass die y-Achse genau bei 1 und die x-Achse genau bei -0,5 geschnitten wird. Die Rechnungen stimmen also.

## Lineare Funktionen

*lineare Funktionen*

Lineare Funktionen haben eine Funktionsgleichung der Form:

$$f(x) = mx + b$$

wobei m die Steigung und b der y-Achsenabschnitt, also die Schnittstelle mit der y-Achse ist. Der Funktionsgraph hat die Gestalt einer Geraden.

### Zwei Punkte-Form

Sind zwei Punkte einer Geraden gegeben, so kann man die Steigung m mittels der Zwei

Punkte-Form bestimmen:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Sind also die beiden Punkte  $P_1 (-2 \mid -3)$  und  $P_2 (1 \mid 3)$  bekannt, so ist die Steigung

$$m = \frac{3 - (-3)}{1 - (-2)} = \frac{6}{3} = 2.$$

### **Funktionsgleichung aus Steigung und Punkt**

Wenn nun die Steigung 2 und ein Punkt  $P (-2 \mid -3)$  gegeben ist, kann daraus die Funktionsvorschrift ermittelt werden. Diese ist aufgrund der Definition von eben und der Information, dass  $m = 2$  ist:

$$f(x) = 2x + b$$

Nun gilt es, das  $b$  zu berechnen. Hierzu wird die Information über den Punkt  $P$  benötigt.

Die (grafische) Information, dass dieser Punkt die Koordinaten  $-2$  und  $-3$  hat, besagt nämlich bezüglich der Funktionsvorschrift, dass

$f(-2) = -3$  ist.

Nun ist nichts einfacher, als dies in die noch nicht ganz komplette Funktionsgleichung von eben einzusetzen und es ist:

$$f(-2) = 2 \cdot (-2) + b = -3$$

also

$$-4 + b = -3 \quad | +4$$

$$b = 1$$

Die Funktionsgleichung lautet also:

$$f(x) = 2x + 1$$

Es ist also die Gleiche wie eben.

## Quadratische Funktionen

*quadratische  
Funktionen*

Quadratische Funktionen haben eine Funktionsgleichung der Form:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Der Funktionsgraph hat die Gestalt einer Parabel.

*Das Berechnen des Schnittpunktes mit der y-Achse und der Nullstellen erfolgt ähnlich, wie gerade für die*

# Index

## A

|  |        |
|--|--------|
| Additions- und Subtraktionsverfahren ..... | 47     |
| Äquivalenzumformung .....                  | 39     |
| Assoziativgesetz .....                     | 12, 32 |
| Auswendiglernen .....                      | 17     |

## B

|                           |    |
|---------------------------|----|
| Begriffsnetz .....        | 7  |
| binomischen Formeln ..... | 37 |
| Brüche .....              | 26 |

## D

|                          |    |
|--------------------------|----|
| Definitionsbereich ..... | 61 |
| Distributivgesetz .....  | 33 |

## E

|                            |    |
|----------------------------|----|
| Einsetzungsverfahren ..... | 45 |
| erweitern .....            | 28 |

## F

|                          |    |
|--------------------------|----|
| Funktionen .....         | 61 |
| Funktionsgleichung ..... | 62 |
| Funktionsgraph .....     | 62 |



## G

|                         |    |
|-------------------------|----|
| ganze Zahlen .....      | 25 |
| Gefühle .....           | 17 |
| Gleichungen .....       | 39 |
| Gleichungssysteme ..... | 43 |

## I

|                         |    |
|-------------------------|----|
| implizites Lernen ..... | 12 |
| implizites Wissen ..... | 13 |

## K

|                        |        |
|------------------------|--------|
| Klammern .....         | 34     |
| Kommutativgesetz ..... | 12, 32 |
| kürzen .....           | 28     |

## L

|                          |    |
|--------------------------|----|
| Lineare Funktionen ..... | 64 |
|--------------------------|----|

## M

|                             |       |
|-----------------------------|-------|
| Mathematikverständnis ..... | 18    |
| MentalMath®-CD .....        | 22    |
| MentalMath®-Methode .....   | 7, 18 |
| Motivation .....            | 20    |

## **N**

|                                |    |
|--------------------------------|----|
| natürliche Zahlen .....        | 25 |
| neurophysischen Struktur ..... | 11 |
| n-te Wurzeln .....             | 73 |
| Nullstelle .....               | 63 |

## **P**

|                 |    |
|-----------------|----|
| Pauken .....    | 11 |
| Potenzen .....  | 71 |
| pq-Formel ..... | 57 |

## **Q**

|                                |    |
|--------------------------------|----|
| quadratische Ergänzung .....   | 54 |
| quadratische Funktionen .....  | 66 |
| Quadratische Gleichungen ..... | 53 |

## **R**

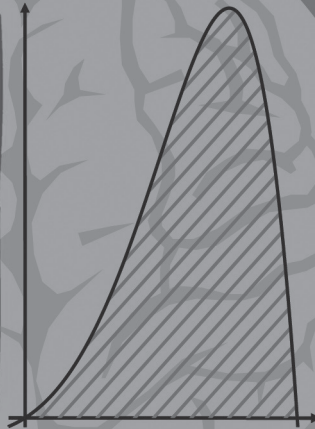
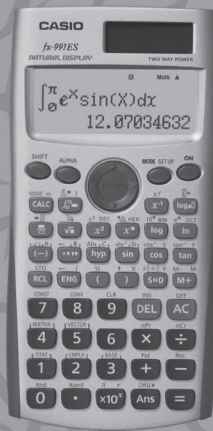
|                        |    |
|------------------------|----|
| rationale Zahlen ..... | 26 |
|------------------------|----|

## **S**

|                     |    |
|---------------------|----|
| Scheitelpunkt ..... | 67 |
| Steigung .....      | 65 |

|                              |        |
|------------------------------|--------|
| <b>T</b>                     |        |
| Terme .....                  | 31     |
| <b>U</b>                     |        |
| unbewusste Wahrnehmung ..... | 15     |
| unbewusstes Lernen .....     | 15     |
| <b>V</b>                     |        |
| Variablen .....              | 31     |
| Verständnis .....            | 16     |
| Verstehen .....              | 16     |
| <b>W</b>                     |        |
| Wertebereich .....           | 61     |
| Wissensnetz .....            | 18, 19 |

Mathematik: Lernen durch Anwenden



Martin Meyer

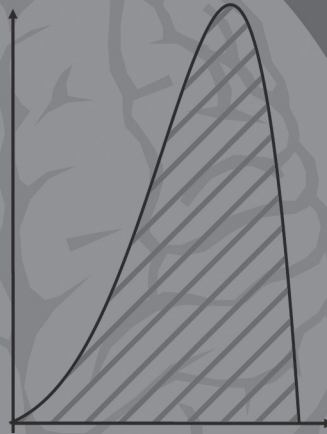
## Mit dem CASIO fx-991 ES zum Abitur

Prüfungsrelevante Anwendungsaufgaben  
Schritt für Schritt gelöst

3. erweiterte Auflage

[www.taschenrechnerbuch.de](http://www.taschenrechnerbuch.de)

# Mathematik: Lernen durch Anwenden



Martin Meyer

Mit dem  
TI-30X Pro MultiView™  
zum Abitur

Prüfungsrelevante Anwendungsaufgaben  
Schritt für Schritt gelöst

[www.taschenrechnerbuch.de](http://www.taschenrechnerbuch.de)