Gruber I Neumann

Erfolg im Mathe-Abi 2013

Schleswig-Holstein

Übungsbuch Prüfungsaufgaben mit Tipps und Lösungen

Freiburger Verlag

Inhaltsverzeichnis

1. Aufgabensatz 7
2. Aufgabensatz 12
3. Aufgabensatz 17
4. Aufgabensatz 21
5. Aufgabensatz 26
6. Aufgabensatz 29

Tipps 33

Lösungen 47

Abitur 2011 111

Abitur 2012 156

Stichwortverzeichnis 208

Erfolg von Anfang an

Dieses Übungsbuch ist speziell auf die Anforderungen des Mathematik-Abiturs in Schleswig-Holstein abgestimmt. Es umfasst die Themenbereiche Analysis, Analytische Geometrie und Stochastik und enthält Übungsaufgaben, die in Umfang und Niveau dem Stil des Matnematik-Abiturs in Schleswig-Holstein entsprechen.

Das Übungsbuch ist eine Hilfe zum Selbstlernen (learning by doing) und bietet die Möglichkeit, sich intensiv auf die Prüfung vorzubereiten und gezielt Themen zu vertiefen. Hat man dabei Erfolg, machen Mathematik und Lernen wieder mehr Spaß.

Der blaue Tippteil

Hat man keine Idee, wie man eine Aufgabe angehen soll, hilft der blaue Tippteil weiter: Zu jeder Aufgabe gibt es dort Tipps, die helfen, einen Ansatz zu finden, ohne die Lösung vorwegzunehmen.

Wie arbeiten Sie mit diesem Buch

Das Buch enthält mehrere Aufgabensätze. Jeder Aufgabensatz enthält eine komplette Abituraufgabe, d.h. Aufgaben aus der Analysis, der Analytischen Geometrie und aus der Stochastik, die in Umfang und Schwierigkeitsgrad den Abituraufgaben entsprechen. So können Sie das Abitur realitätsnah trainieren. Die ersten Aufgabensätze sind dabei etwas einfacher, um einen guten Einstieg zu ermöglichen.

Nach den Aufgaben befindet sich der blaue Tippteil mit Denk- und Lösungshilfen. Diesen sollten Sie möglichst benutzen, wenn Sie nicht weiter wissen.

Die Lösungen mit ausführlichen und verständlichen Lösungswegen bilden den dritten Teil des Buchs. Hier finden Sie die notwendigen Formeln, Rechenverfahren und Denkschritte sowie alternative Lösungswege. Die Original-Abituraufgaben ab 2011 runden das Buch ab.

Allen Schülerinnen und Schülern, die sich auf das Abitur vorbereiten, wünschen wir viel Erfolg.

Helmut Gruber und Robert Neumann

Der Ablauf der Abiturprüfung

Die Schule erhält sechs Aufgaben. Die Abiturprüfungskommission wählt aus diesen sechs zur Verfügung gestellten Aufgaben je eine zur Bearbeitung aus:

Analysis

Analysis Aufgabe 1	oder	Analysis Aufgabe 2

Analytische Geometrie

Analytische Geometrie Aufgabe 3	oder	Analytische Geometrie Aufgabe 4

Stochastik

Stochastik Aufgabe 5	oder	Stochastik Aufgabe 6

Die Abiturprüfung besteht also aus **drei Teilaufgaben**: Einer Analysisaufgabe, einer Aufgabe der Analytischen Geometrie und einer Stochastikaufgabe. Die Prüfungszeit beträgt 300 Minuten.

Die Bewertung der Prüfungsleistung

Insgesamt können in der Prüfung 90 sog. «Gewichtungseinheiten» erreicht werden. Aus diesen errechnet sich die Mathematiknote nach dem folgenden Schlüssel:

Prozentualer Anteil der erreichten Gewichtungseinheiten bezogen auf die erreichbaren Gewichtungseinheiten	Notenpunkte	Note
bis 19	0	ungenügend
über 19 bis 26	1	mangelhaft
über 26 bis 33	2	mangelhaft
über 33 bis 40	3	mangelhaft
über 40 bis 45	4	ausreichend
über 45 bis 50	5	ausreichend
über 50 bis 55	6	ausreichend
über 55 bis 60	7	befriedigend
über 60 bis 65	8	befriedigend
über 65 bis 70	9	befriedigend
über 70 bis 75	10	gut
über 75 bis 80	11	gut
über 80 bis 85	12	gut
über 85 bis 90	13	sehr gut
über 90 bis 95	14	sehr gut
über 95 bis 100	15	sehr gut

Sie müssen also zuerst ausrechnen, wieviel Prozent der Gewichtungseinheiten Sie erreicht haben und können dann Ihre Note an der Tabelle ablesen.

1. Aufgabensatz

Tipps auf Seite 33, Lösungen ab Seite 47

Analysis

a) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - 2x^2 + 6x$. Bestimmen Sie rechnerisch die Schnittpunkte des Graphen von f mit der x-Achse sowie dessen Extrem- und Wendepunkte. Zeichnen Sie diese Punkte in Abbildung 1 ein, nachdem Sie die Achsen mit einer geeigneten Skala beschriftet haben.

b) A_1 sei der Inhalt der Fläche des in Abb. 1 eingezeichneten Dreiecks, A_2 der Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse im Intervall $[0; k]$. Entnehmen Sie den Wert für k aus der skalierten Abbildung 1.
Bestimmen Sie das Verhältnis von A_1 zu A_2.

c) Über den Flug eines bemannten Heißluftballons erfährt man folgendes:
Er startet zur Zeit $t = 0$ auf Meereshöhe. Die Höhe h des Ballons (über Meereshöhe) in Abhängigkeit von der Zeit t (in Minuten) wird annähernd durch die Funktion h beschrieben, deren Graph in Abb. 2 zu sehen ist. Für die Ableitung von h gilt

$$h'(t) = 3,75 \cdot t^2 - 60 \cdot t + 180$$

Bestimmen Sie den Term von h. (Zur Kontrolle: $h(t) = 1,25t^3 - 30t^2 + 180t$, $t \in [0;\ 12]$)
Erklären Sie, welche Bedeutung die 1. Ableitung h' für den Ballonflug hat.
Ermitteln Sie den Zeitpunkt, zu dem der Ballon am schnellsten sinkt.

d) Die Ballonfahrer erfahren, dass ein Gewittersturm droht. Sie wollen daher schneller als geplant sinken, aber doch sanft landen.
Nach 4 Minuten sinken sie, wie es durch die quadratische Parabel p in Abbildung 2 dargestellt ist. Nach 8 Minuten landen sie mit einer Sinkgeschwindigkeit von 0.
Bestimmen Sie den Term $p(t)$ der Parabel.

Abbildung 1

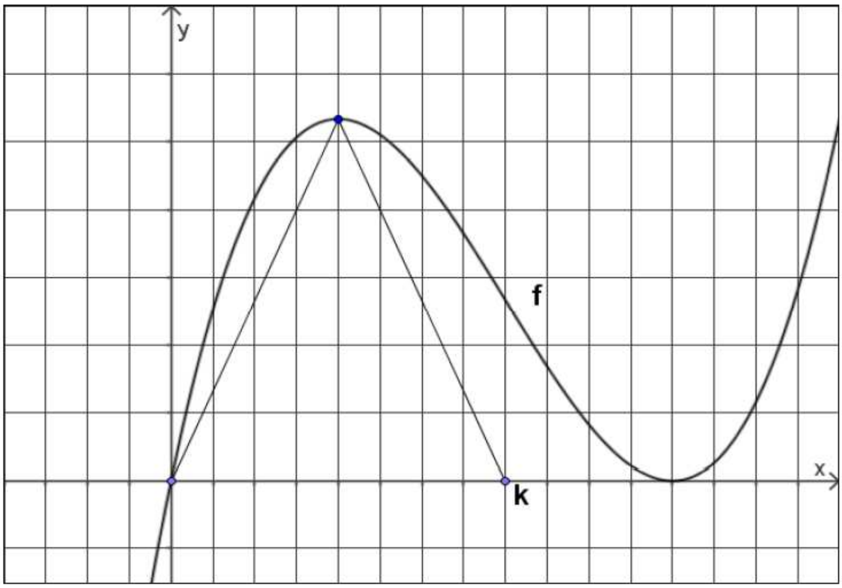
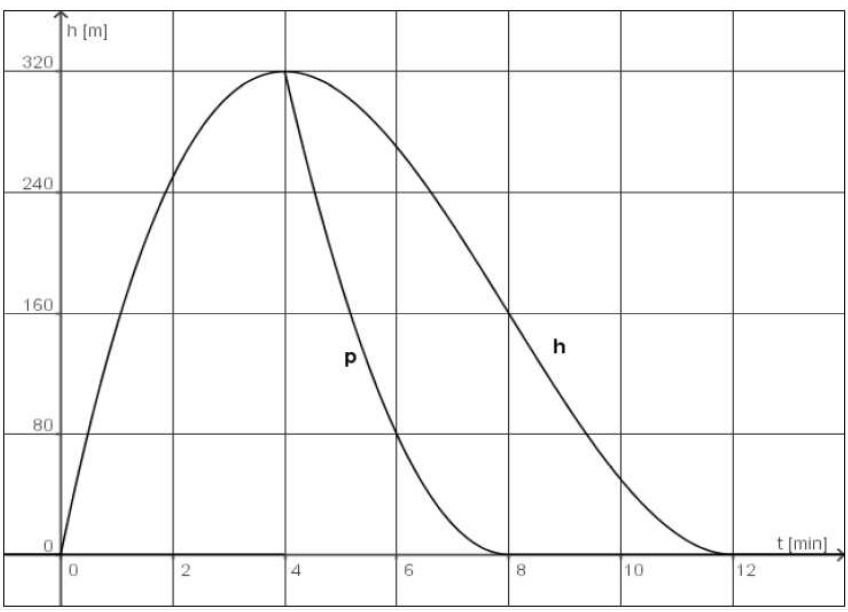


Abbildung 2



Analytische Geometrie

Gegeben sind eine Pyramide ABCDS mit den Eckpunkten A $(0 \mid 0 \mid 0)$, B $(8 \mid 0 \mid 0)$, C $(8 \mid 8 \mid 0)$, D $(0 \mid 8 \mid 0)$ und S $(4 \mid 4 \mid 8)$ sowie für jedes $r \in \mathbb{R}$ eine Ebene $E_r: \; rx_1 + 3x_3 = 8r$.

a) Stellen Sie die Pyramide in einem Koordinatensystem dar.
Die Ebene E_2 enthält die Pyramidenkante BC und schneidet die Kante DS in F und die Kante AS in G.
Geben Sie die Koordinaten der Punkte F und G an.
Zeichnen Sie das Viereck BCFG ein.
Zeigen Sie, dass dieses Viereck ein gleichschenkliges Trapez ist.
Wie groß sind die Innenwinkel dieses Trapezes?

b) Bestimmen Sie r^* so, dass die Pyramidenspitze S von der Ebene E_{r^*} den Abstand 4 hat.
Geben Sie die Koordinaten desjenigen Punktes in dieser Ebene E_{r^*} an, der von S den Abstand 4 hat.

c) Weisen Sie nach, dass die Gerade durch B und C in jeder Ebene E_r liegt.
Beim Schnitt der Ebene E_r mit der Pyramide entsteht eine Schnittfigur.
Welche Schnittfiguren sind möglich?
Geben Sie die jeweiligen Werte von r an.

d) In die Pyramide ABCDS wird eine Kugel K so einbeschrieben, dass Sie die quadratische Grundfläche und alle Seitenflächen der Pyramide berührt.
Bestimmen Sie den Mittelpunkt und den Radius von K.

Stochastik

Todesursache Rauchen bei Frauen auf dem Vormarsch
Wiesbaden – Zum Weltnichtrauchertag am 31. Mai 2007 gab das Statistische Bundesamt folgende Daten bekannt:
Im Jahr 2005 starben in Deutschland 42 217 Personen an Lungen-, Kehlkopf- oder Luftröhrenkrebs, die alle in Zusammenhang mit dem Komsum von Tabakprodukten gebracht werden können (raucherspezifische Erkrankungen).
Insbesondere Lungenkrebs mit einem Anteil von ca. 5 % unter allen Todesfällen war damit die vierthäufigste Todesursache.
Während bei den weiblichen Todesfällen 2,7 % auf raucherspezifische Todesursachen zurückzuführen sind, sind es bei den männlichen Todesfällen sogar 7,8 % – der Anteil der Männer unter allen verstorbenen 2005 betrug 46,8 %.
Im Vergleich zum Jahr 1985 ist jedoch gerade bei Frauen ein Anstieg dieser Todesursachen festzustellen. Damals starben an den oben genannten Krebsarten 33 967 Personen, davon waren 28 274 Männer und 5 693 Frauen.
(Quelle: Statistisches Bundesamt Deutschland)

a) In einer für Deutschland repräsentativen Kleinstadt sind im Jahr 2005 bis Ende April 37 Personen verstorben, bis Ende Dezember waren es genau 100.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit,

- dass unter den 37 Verstorbenen bis Ende April genau 2 Personen dabei waren, deren Todesursache Lungenkrebs war,
- dass unter den 37 Verstorbenen bis Ende April mindestens 2 Personen dabei waren, deren Todesursache Lungenkrebs war und
- dass unter den 100 Verstorbenen bis Ende Dezember mehr als 5, aber weniger als 8 Personen dabei waren, deren Todesursache Lungenkrebs war.
  Geben Sie Ihren mathematischen Ansatz zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten an und begründen Sie diesen.

b) Entwickeln Sie aus den gegebenen Daten des Statistischen Bundesamts ein geeignetes Baumdiagramm oder eine Vierfeldertafel,

1. um den Anteil der Todesfälle mit raucherspezifischer Ursache (Lungen-, Kehlkopf- und Luftröhrenkrebs) unter allen Todesfällen im Jahre 2005 in Deutschland zu ermitteln, sowie
2. um zu zeigen, dass die Wahrscheinlichkeit ca. 28 % beträgt, dass es sich bei einem Sterbefall aus 2005 mit bekannter raucherspezifischer Todesursache um eine Frau

handelt.

Bestimmen Sie außerdem die Anzahl aller Todesfälle in Deutschland im Jahr 2005.

c) Beurteilen Sie nach Überprüfung der Zahlenangaben folgende Zeitungsnotiz, die kurze Zeit nach dem Weltnichtrauchertag im Jahr 2007 erschien. Beziehen Sie auch die absoluten Zahlen in Ihre Überlegungen ein.

> Männer beim Rauchen vernünftiger!
> Während der Anteil der Männer unter den verstorbenen Personen mit raucherspezifischen Todesursachen (Lungen- , Kehlkopf- und Luftröhrenkrebs) erfreulicherweise von 83 % im Jahre 1985 auf 72 % im Jahr 2005 zurückging, hat sich gleichzeitig der Anteil der Frauen um ca. 50 % erhöht.

1. Aufgabensatz

Analysis

a) Zur Berechnung des Schnittpunkts mit der x-Achse setzen Sie $f(x)$ gleich Null und lösen die entstehende Gleichung nach x auf (klammern Sie x aus und verwenden Sie die pq- bzw. abc-Formel zur Lösung der quadratischen Gleichung).
Zur Bestimmung der relativen Extrempunkte berechnen Sie zunächst die ersten beiden Ableitungen der Funktion f. Setzen Sie dann $f'(x)$ gleich Null und lösen Sie die Gleichung. Setzen Sie die so errechneten x-Werte in die zweite Ableitung von f ein. Ist das Ergebnis kleiner als Null, liegt ein Hochpunkt vor; ist es größer als Null, liegt ein Tiefpunkt vor. Berechnen Sie die y-Werte der Extrempunkte durch Einsetzen der x-Werte in $f(x)$.
Die Wendepunkte erhalten Sie, indem Sie die 2. Ableitung von f gleich Null setzen; prüfen Sie mit Hilfe der 3. Ableitung, ob ein Wendepunkt vorliegt.

b) Bestimmen Sie anhand der Zeichnung den Wert für k.
Den Flächeninhalt A_1 des Dreiecks erhalten Sie mit der Formel $A_1 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$.
Den Flächeninhalt A_2 erhalten Sie mit Hilfe eines Integrals.
Teilen Sie A_1 durch A_2.

c) Bestimmen Sie eine allgemeine Stammfunktion von $h'(t)$ und verwenden Sie die Anfangsbedingung, um $h(t)$ zu erhalten.
Berechnen Sie die Extremstelle von $h'(t)$, indem Sie die 1. Ableitung von $h'(t)$, also $h''(t)$ gleich Null setzen. Prüfen Sie mit $h'''(t)$, ob ein Minimum von $h'(t)$ vorliegt.

d) Verwenden Sie als Ansatz für den Term der Parabel $p(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$ sowie deren 1. Ableitung.
Entnehmen Sie der Abbildung 2 die Koordinaten zweier Punkte sowie die Steigung für $t = 8$.
Formulieren Sie hiermit drei Bedingungen und stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf, welches Sie mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens lösen.

Analytische Geometrie

a) Setzen Sie $r = 2$ in E_r ein, stellen Sie die Geradengleichungen durch die gegebenen Punkte auf und schneiden Sie E_2 mit diesen Geraden.
Überlegen Sie, welche Eigenschaften ein Trapez besitzt und wie man diese und die Gleichschenkligkeit nachweisen könnte.
Sie erhalten einen Innenwinkel mit Hilfe der Formel: $\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$, wobei $\vec{a}$ und $\vec{b}$ Verbindungsvektoren zweier Punkte sind. Da es sich um ein gleichschenkliges Trapez handelt, können Sie die übrigen Winkel durch Symmetriebetrachtung und die Winkelsumme eines Vierecks bestimmen.

b) Berechnen Sie mit Hilfe der Hesseschen Normalenform von E_{r^*} den Abstand von S zu E_{r^*}, setzen Sie diesen gleich 4 und lösen Sie die entstandene Gleichung durch Quadrieren nach r^* auf.
Um den Punkt in E_{r^*} mit Abstand 4 LE zu S zu erhalten, machen Sie eine Skizze, setzen das berechnete r^* in E_{r^*} ein, stellen eine Lotgerade durch S mit einem Normalenvektor der Ebene E_{r^*} als Richtungsvektor auf und schneiden die Lotgerade mit E_{r^*}.

c) Machen Sie zwei Punktproben.
Überlegen Sie anhand Ihrer Zeichnung, welche Schnittfiguren möglich sind, wenn sich die Ebene E_r um die Gerade BC dreht. Berechnen Sie jeweils das dazugehörige r für die Grenzfälle durch Einsetzen der «Grenzpunkte» in E_r.

d) Überlegen Sie, auf welcher Geraden g der Mittelpunkt M der Kugel K liegt; beachten Sie, dass die Pyramide symmetrisch ist. Berechen Sie mit Hilfe der HNF den Abstand von M zur Seitenfläche BCS und zur Grundfläche und setzen Sie diese Abstände gleich; lösen Sie die entstehende Betragsgleichung.

Stochastik

a) Interpretieren Sie den «Zufallsversuch» bei der Stichprobe von $n = 37$ und $n = 100$ Verstorbenen als Bernoullikette der Länge n.
Definieren Sie X als Zufallsvariable für die «Anzahl der Verstorbenen mit Todesursache Lungenkrebs»; X ist dann binomialverteilt. Überlegen Sie, welchen Ereignissen die zu bestimmenden Wahrscheinlichkeiten entsprechen und verwenden Sie für die Berechnung der zweiten gesuchten Wahrscheinlichkeit das Gegenereignis $X \leqslant 1$.

b) Legen Sie die beiden Merkmale «Todesursache» und «Geschlecht» sowie die zugehörigen Ausprägungen fest, um ein Baumdiagramm zu zeichnen. Die längs der einzelnen Pfade aufzutragenden Wahrscheinlichkeiten entnehmen Sie der Zeitungsmeldung.
Den Anteil der Todesfälle mit raucherspezifischen Ursachen unter allen Todesfällen in Deutschland im Jahre 2005 erhalten Sie als Summe zweier Zahlen aus der Vierfeldertafel (bzw. mit der Produkt- und der Pfadregel aus dem Baumdiagramm). Für die Berechnung der Gesamtanzahl aller 2005 in Deutschland verstorbenen Personen verwenden Sie einen Dreisatz. Für die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei einem Sterbefall mit bekannter raucherspezifischer Todesursache um eine Frau handelt, überlegen Sie, wie man eine sogenannte bedingte Wahrscheinlichkeit bestimmt, benutzen Sie die Merkhilfe.

c) Überlegen Sie, welchen absoluten Zahlen die jeweiligen Anteile unter den Männern entsprechen und prüfen Sie, ob auch ein absoluter Rückgang vorliegt. Verwenden Sie außerdem das letzte Ergebnis aus Aufgabenteil b) und bestimmen Sie für die Jahre 1985 und 2005 die absoluten Zahlen der raucherbedingt verstorbenen Frauen.

1 . Aufgabensatz

Analysis

Es ist $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - 2x^2 + 6x$

a) Zur Berechung der Schnittpunkte des Graphen von f mit der x-Achse setzt man den Funktionsterm von f gleich Null:
$f(x) = 0$ führt zu:

$$\frac{1}{6}x^3 - 2x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x \cdot \left(\frac{1}{6}x^2 - 2x + 6\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

Um weitere Nullstellen zu berechnen, muss die Gleichung $\frac{1}{6}x^2 - 2x + 6 = 0$ gelöst werden. Mit der pq- oder abc-Formel erhält man als Lösung der quadratischen Gleichung: $x_2 = 6$. Damit sind die Schnittpunkte mit der x-Achse: $N_1(0 \mid 0)$ und $N_2(6 \mid 0)$.

Zur Berechung der relativen Extrempunkte des Graphen von f benötigt man die 1. und 2. Ableitung von f :

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6$$
$$f''(x) = x - 4$$

Die notwendige Bedingung $f'(x) = 0$ führt zu:

$$\frac{1}{2}x^2 - 4x + 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 2 \text{ und } x_2 = 6$$

Die zugehörigen Funktionswerte sind $f(2) = \frac{16}{3}$ und $f(6) = 0$.
Setzt man $x_1 = 2$ und $x_2 = 6$ in $f''(x)$ ein, so erhält man:

$$f''(2) = 2 - 4 = -2 < 0 \Rightarrow \text{ relatives Maximum}$$
$$f''(2) = 6 - 4 = 2 > 0 \Rightarrow \text{ relatives Minimum}$$

Somit haben die Extrempunkte folgende Koordinaten:
Hochpunkt $H\left(2 \mid \frac{16}{3}\right)$ und Tiefpunkt $T(6 \mid 0)$.

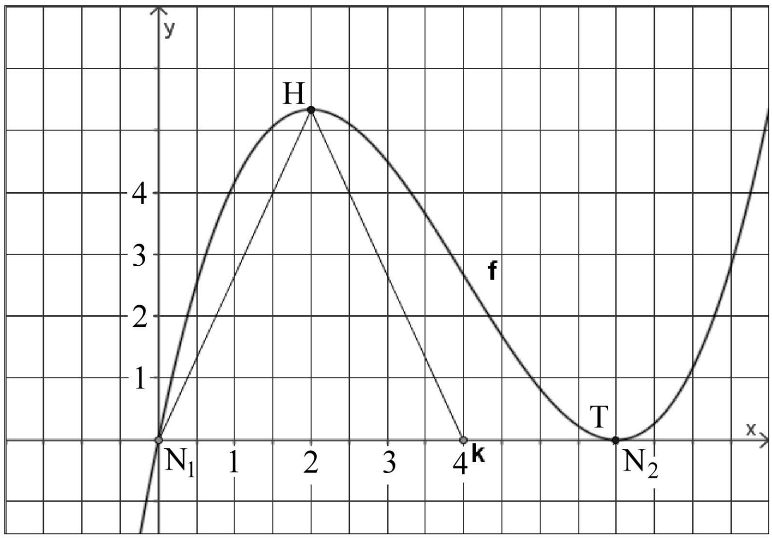
Zur Bestimmung der Wendepunkte von f benötigt man die 2. und 3. Ableitung von f :

$$f''(x) = x - 4$$
$$f'''(x) = 1$$

Die notwendige Bedingung $f''(x) = 0$ führt zu $x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$
Der zugehörige Funktionswert ist $f(4) = \frac{8}{3}$.
Wegen $f'''(4) = 1 \neq 0$ hat der Wendepunkt die Koordinaten $W\left(4 \mid \frac{8}{3}\right)$.

Die Koordinatenachsen werden folgendermaßen skaliert:

2 Teilstriche auf der x-Achse entsprechen 1 LE
1 Teilstrich auf der y-Achse entspricht 1 LE



b) Der Zeichnung entnimmt man $k = 4$.
Damit gilt für den Flächeninhalt A_1 des Dreiecks:

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{16}{3} = \frac{32}{3}\,\text{FE}$$

Den Flächeninhalt A_2 der Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse im Intervall $[0;4]$ erhält man mit Hilfe eines Integrals:

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_0^4 \left(\frac{1}{6}x^3 - 2x^2 + 6x\right) \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{24}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 3x^2\right]_0^4 \\ &= \frac{1}{24} \cdot 4^4 - \frac{2}{3} \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 - \left(\frac{1}{24} \cdot 0^4 - \frac{2}{3} \cdot 0^3 + 3 \cdot 0^2\right) \\ &= 16\,\text{FE} \end{aligned}$$

Damit gilt für das Verhältnis von A_1 zu A_2 :

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\frac{32}{3}}{16} = \frac{2}{3}$$

Das Verhältnis von A_1 zu A_2 beträgt 2 : 3.

c) $h(t)$ ist eine Stammfunktion von $h'(t) = 3{,}75 \cdot t^2 - 60 \cdot t + 180$. Damit gilt:

$$h(t) = 1{,}25 \cdot t^3 - 30 \cdot t^2 + 180 \cdot t + c$$

Mit Hilfe der Anfangsbedingung $h(0) = 0$ erhält man:

$$0 = 1,25 \cdot 0^3 - 30 \cdot 0^2 + 180 \cdot 0 + c \;\Rightarrow\; c = 0$$

Damit gilt:

$$h(t) = 1,25 \cdot t^3 - 30 \cdot t^2 + 180 \cdot t$$

Die 1. Ableitung h' beschreibt die momentane Änderungsrate der Funktion h, also die Veränderung der Höhe in Abhängigkeit von der Zeit, was der momentanen Steig- bzw. Sinkgeschwindigkeit entspricht.
Die Sinkgeschwindigkeit ist am größten, wenn $h'(t)$ einen Extremwert annimmt. Folglich muss die 1. Ableitung von $h'(t)$, also $h''(t)$, gleich Null gesetzt werden:
$h''(t) = 0$ führt zu:

$$7,5t - 60 = 0 \;\Rightarrow\; t = 8$$

Wegen $h'''(t) = 7,5 > 0$ handelt es sich um ein Minimum von $h'(t)$.
Also ist die Sinkgeschwindigkeit nach 8 Minuten am größten.

d) Für die Parabel p kann man folgenden Ansatz verwenden:
$p(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$ sowie $p'(t) = 2a \cdot t + b$
Anhand der Abbildung 2 kann man folgende Werte ablesen:
$p(4) = 320$, $p(8) = 0$ und $p'(8) = 0$
Damit erhält man folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrcrcrcr} \text{I} & a \cdot 4^2 & + & b \cdot 4 & + & c & = & 320 \\ \text{II} & a \cdot 8^2 & + & b \cdot 8 & + & c & = & 0 \\ \text{III} & 2a \cdot 8 & + & b & & & = & 0 \end{array}$$

bzw.

$$\begin{array}{rrcrcrcr} \text{I} & 16a & + & 4b & + & c & = & 320 \\ \text{II} & 64a & + & 8b & + & c & = & 0 \\ \text{III} & 16a & + & b & & & = & 0 \end{array}$$

Subtrahiert man Gleichung II von Gleichung I, erhält man:

$$\begin{array}{rrcrcrcr} \text{I} & 16a & + & 4b & + & c & = & 320 \\ \text{IIa} & -48a & - & 4b & & & = & 320 \\ \text{III} & 16a & + & b & & & = & 0 \end{array}$$

Addiert man das 4-fache von Gleichung III zu Gleichung IIa, erhält man:

$$\begin{array}{rrcrcrcr} \text{I} & 16a & + & 4b & + & c & = & 320 \\ \text{IIa} & -48a & - & 4b & & & = & 320 \\ \text{IIIa} & 16a & & & & & = & 320 \end{array}$$

Aus Gleichung IIIa folgt: $a = 20$.
Setzt man $a = 20$ in Gleichung IIa ein, erhält man:

$$-48 \cdot 20 - 4b = 320 \ \Rightarrow \ b = -320$$

Setzt man $a = 20$ und $b = -320$ in Gleichung I ein, erhält man:

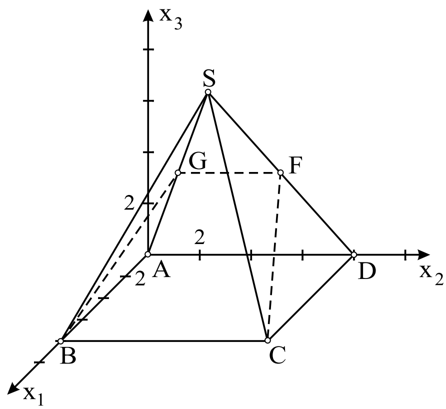
$$16 \cdot 20 + 4 \cdot (-320) + c = 320 \ \Rightarrow \ c = 1280$$

Damit gilt für den Term $p(t)$ der Parabel:

$$p(t) = 20 \cdot t^2 - 320 \cdot t + 1280$$

Analytische Geometrie

a) Die Eckpunkte der Pyramide sind $A(0 \mid 0 \mid 0)$, $B(8 \mid 0 \mid 0)$, $C(8 \mid 8 \mid 0)$, $D(0 \mid 8 \mid 0)$ und $S(4 \mid 4 \mid 8)$; die Ebene E_r hat die Gleichung $E_r:\ rx_1 + 3x_3 = 8r$.



Um die Schnittpunkte von E_2 mit den Pyramidenkanten DS und AS zu bestimmen, setzt man $r = 2$ in E_r ein, stellt die Geraden duch D und S sowie durch A und S auf und schneidet E_2 mit diesen:

Die Gerade DS hat die Gleichung $g_1:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}$,

die Gerade AS hat die Gleichung $g_2:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix};\ s \in \mathbb{R}$

und die Ebene E_2 hat die Gleichung $E_2:\ 2x_1 + 3x_3 = 16$.

Schneidet man E_2 mit g_1, so erhält man $2 \cdot 4t + 3 \cdot 8t = 16 \ \Rightarrow\ t = \frac{1}{2} \ \Rightarrow\ F(2 \mid 6 \mid 4)$.

Schneidet man E_2 mit g_2, so erhält man $2 \cdot 4s + 3 \cdot 8s = 16 \ \Rightarrow\ s = \frac{1}{2} \ \Rightarrow\ G(2 \mid 2 \mid 4)$.

Um zu zeigen, dass das Viereck BCFG ein gleichschenkliges Trapez ist, muss man nachweisen, dass die Seite BC parallel zur Seite GF ist und dass die Seite BG gleich lang ist wie die Seite CF:

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC}$$

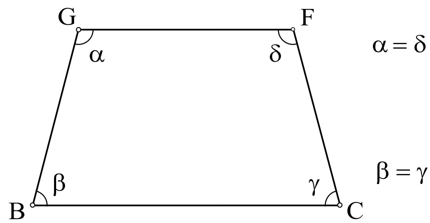
also ist die Seite BC parallel zur Seite FG, somit ist das Viereck BCFG ein Trapez.

$$\overline{BG} = |\overrightarrow{BG}| = \left| \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{36 + 4 + 16} = \sqrt{56}$$

und

$$\overline{\text{CF}} = |\overrightarrow{\text{CF}}| = \left| \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{36+4+16} = \sqrt{56}$$

also sind die Seiten BG und CF gleich lang; somit ist das Viereck BCFG ein gleichschenkliges Trapez.
Da ein gleichschenkliges Trapez nur zwei verschiedene Innenwinkel hat, genügt es, diese zu berechnen:



$$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{\text{BG}} \cdot \overrightarrow{\text{BC}}}{|\overrightarrow{\text{BG}}| \cdot |\overrightarrow{\text{BC}}|} = \frac{\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \right|} = \frac{16}{\sqrt{56} \cdot 8} = \frac{2}{\sqrt{56}} \Rightarrow \beta \approx 74{,}5^\circ = \gamma$$

Die Winkelsumme eines Vierecks beträgt 360°, also gilt:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360 \Rightarrow \alpha + \delta = 360 - (\beta + \gamma) = 360 - (74{,}5 + 74{,}5) = 211$$

Mit $\alpha = \delta$ gilt: $\alpha = \frac{211}{2} = 105{,}5 = \delta$.
Die Innenwinkel sind somit: $\alpha = \delta = 105{,}5^\circ$ und $\beta = \gamma = 74{,}5^\circ$.

b) Den Abstand d von S zur Ebene E_{r^*} bestimmt man mit Hilfe der Hesseschen Normalenform von E_{r^*} :

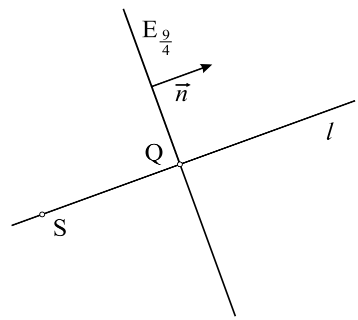
$$d = \frac{|r^* \cdot 4 + 3 \cdot 8 - 8r^*|}{\left| \begin{pmatrix} r^* \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|24 - 4r^*|}{\sqrt{r^{*2} + 9}}$$

Da dieser Abstand 4 LE betragen soll, ist folgende Gleichung zu lösen:

$$\frac{|24 - 4r^*|}{\sqrt{r^{*2} + 9}} = 4$$

bzw. nach Quadrieren beider Seiten:

$$\frac{(24 - 4r^*)^2}{r^{*2} + 9} = 16 \Leftrightarrow 576 - 192r^* + 16r^{*2} = 16r^{*2} + 144 \Rightarrow r^* = \frac{9}{4}$$



Um die Koordinaten des Punktes Q in $E_{\frac{9}{4}}: \frac{9}{4}x_1 + 3x_3 = 18$ mit Abstand 4 LE zu S zu erhalten, stellt man eine Lotgerade l durch S mit einem Normalenvektor von $E_{\frac{9}{4}}$ als Richtungsvektor auf und schneidet diese mit $E_{\frac{9}{4}}$:

$$l: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} \frac{9}{4} \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$$

geschnitten mit $E_{\frac{9}{4}}$ ergibt

$$\frac{9}{4} \cdot \left(4 + t \cdot \frac{9}{4}\right) + 3 \cdot (8 + 3t) = 18 \Rightarrow t = -\frac{16}{15}$$

Setzt man $t = -\frac{16}{15}$ in l ein, so erhält man den Punkt Q in der Ebene $E_{\frac{9}{4}}$, der von S den Abstand 4 LE hat: $Q\left(\frac{8}{5} \mid 4 \mid \frac{24}{5}\right)$.

c) Um nachzuweisen, dass die Gerade durch B und C in jeder Ebene E_r liegt, genügt es zu zeigen, dass die Punkte $B(8 \mid 0 \mid 0)$ und $C(8 \mid 8 \mid 0)$ in E_r liegen:

B in E_r eingesetzt ergibt $r \cdot 8 + 3 \cdot 0 = 8r$ bzw. $8r = 8r \Rightarrow B \in E_r$.

C in E_r eingesetzt ergibt $r \cdot 8 + 3 \cdot 0 = 8r$ bzw. $8r = 8r \Rightarrow C \in E_r$.

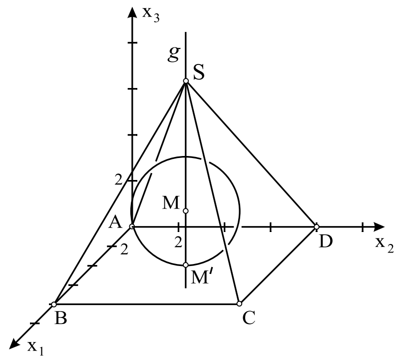
Da B und C in jeder Ebene E_r liegen, liegt auch die Gerade durch B und C in jeder Ebene E_r.

Alle Ebenen der Ebenenschar drehen sich um die Gerade durch B und C.
Anhand der Zeichnung kann man nun erkennen, dass sich als Schnittfiguren ein Trapez (gezeichnet für $r = 2$) oder als Grenzfälle ein Quadrat oder ein Dreieck ergeben.
Es entsteht ein Quadrat, wenn die Ebene E_r die x_1x_2-Ebene $(x_3 = 0)$ ist, also für $r = 0$.
Es entsteht ein Dreieck, wenn der Punkt S in der Ebene E_r enthalten ist:

$$r \cdot 4 + 3 \cdot 8 = 8r \Rightarrow r = 6$$

Es entsteht ein Trapez, wenn $0 < r < 6$.
Für $r > 6$ oder $r < 0$ ergibt sich als «Schnittfigur» die Strecke BC.

d)



Damit die Kugel K die Grundfläche und alle Seitenflächen der Pyramide berührt, muss aus Symmetriegründen ihr Mittelpunkt M auf einer Geraden g liegen, die durch den Mittelpunkt $M'(4 \mid 4 \mid 0)$ des Quadrats ABCD und durch die Spitze S geht und der Abstand von M zur x_1x_2-Ebene ($x_3 = 0$), in der das Quadrat ABCD liegt, muss gleich groß sein wie der Abstand von M zur Ebene $E_6\colon\ 6x_1 + 3x_3 = 48$, in der die Seitenfläche BCS liegt (siehe Aufgabenteil c)). Die Gerade g durch $M'(4 \mid 4 \mid 0)$ und $S(4 \mid 4 \mid 8)$ hat die Gleichung:

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}$$

Somit hat der Mittelpunkt M der Kugel K die Koordinaten $M(4 \mid 4 \mid 8t)$.
Der Abstand d_1 von M zur x_1x_2-Ebene ($x_3 = 0$) beträgt: $d_1 = 8t\,;\ t > 0$
Den Abstand d_2 von M zur Ebene $E_6\colon\ 6x_1 + 3x_3 = 48$ erhält man mit Hilfe der Hesseschen Normalenform:

$$d_2 = \frac{|6 \cdot 4 + 3 \cdot 8t - 48|}{\left|\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|24t - 24|}{\sqrt{6^2 + 0^2 + 3^3}} = \frac{|24t - 24|}{\sqrt{45}}$$

Wegen $d_1 = d_2$ folgt daraus: $8t = \dfrac{|24t - 24|}{\sqrt{45}}$ bzw. $8 \cdot \sqrt{45}t = |24t - 24|$

Löst man die Betragsgleichung, ergeben sich zwei verschiedene Fälle:

Fall I:
$$24t - 24 = 8 \cdot \sqrt{45}t \ \Rightarrow\ t_1 = \frac{24}{24 - 8 \cdot \sqrt{45}} \approx -0{,}81$$

Fall II:
$$24t - 24 = -8 \cdot \sqrt{45}t \ \Rightarrow\ t_2 = \frac{24}{24 + 8 \cdot \sqrt{45}} \approx 0{,}31$$

Wegen $t > 0$ erhält man als einzige Lösung $t_2 \approx 0{,}31$.
Setzt man $t_2 = 0{,}31$ in M ein, so erhält man die Koordinaten des Mittelpunkts M der Kugel: $M(4 \mid 4 \mid 2{,}48)$. Der Radius r der Kugel K ergibt sich als Abstand d_1 von M zur x_1x_2-Ebene:

$$r = d_1 = 8 \cdot t_2 \approx 2{,}48\,\mathrm{LE}$$

Stochastik

a) Der «Zufallsversuch» bei der Stichprobe von $n = 37$ und $n = 100$ Verstorbenen kann als n-stufiger Versuch interpretiert werden. Auf jeder Stufe liegt ein Bernoulliversuch mit genau zwei möglichen Ausgängen vor («Todesursache Lungenkrebs» oder «andere Todesursache»). Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten der Ausgänge ist auf allen Stufen jeweils gleich, so dass man von einer Bernoullikette der Länge n sprechen kann. Die Grundgesamtheit ist groß genug, da es sich nach der Aussage um eine «repräsentative Kleinstadt» handelt.
Man definiert X als Zufallsvariable für die «Anzahl der Verstorbenen mit Todesursache Lungenkrebs». Dann ist X binomialverteilt mit $p = 0{,}05$ (der Zeitungsmeldung ist zu entnehmen, dass Lungenkrebs mit einem Anteil von $5\,\% = 0{,}05$ unter allen Todesfällen vertreten ist) sowie $n = 37$ (bei Berücksichtigung der Monate bis inkl. April) beziehungsweise $n = 100$ (bei Berücksichtigung aller Monate des Jahres 2005). Die zu bestimmenden Wahrscheinlichkeiten entsprechen dann gerade den Ereignissen $X = 2$ («genau 2 Personen») beziehungsweise $X > 1$ («mindestens 2 Personen») und $5 < X < 8$ («mehr als 5, aber weniger als 8 Personen»). Man erhält:

$$P(X=2) = \binom{37}{2} \cdot 0{,}05^2 \cdot 0{,}95^{35} \approx 0{,}2765 \approx 27{,}7\,\%$$

Für die Berechnung der nächsten Wahrscheinlichkeit verwendet man das Gegenereignis $X \leqslant 1$. Es gilt dann: $P(X > 1) = 1 - P(X \leqslant 1)$ und somit:

$$P(X>1) = 1 - P(X \leqslant 1) = 1 - \left[0{,}95^{37} + \binom{37}{1} \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95^{36}\right] \approx 0{,}5582 \approx 55{,}8\,\%$$

Für die Wahrscheinlichkeit, dass unter allen Verstorbenen des Jahres 2005 mehr als 5, aber weniger als 8 an Lungenkrebs gestorben sind, erhält man:

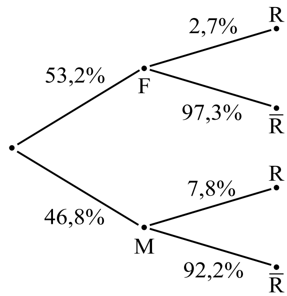
$$\begin{aligned} P(5<X<8) &= P(X=6) + P(X=7) \\ &= \binom{100}{6} \cdot 0{,}05^6 \cdot 0{,}95^{94} + \binom{100}{7} \cdot 0{,}05^7 \cdot 0{,}95^{93} \\ &\approx 0{,}2560 \mathrel{\widehat{=}} 25{,}6\,\% \end{aligned}$$

b) Mit den beiden Merkmalen «Todesursache» und «Geschlecht» sowie den zugehörigen Ausprägungen R: «raucherspezifische Todesursache», $\overline{R}$: «andere Todesursache», F: «Frau» und M: «Mann» erhält man das folgende Baumdiagramm. Dabei sind die längs der einzelnen Pfade aufgetragenen Wahrscheinlichkeiten allesamt der Zeitungsmeldung zu entnehmen.
Für die Vierfeldertafel sind einige weitere Berechnungen anzustellen: Für das linke obere Feld beispielsweise ist die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass ein gewisser Todesfall sowohl die Merkmale «F» als auch «R» erfüllt. $2{,}7\,\%$ aller weiblichen Todesfälle (welche

wiederum 53,2 % aller Todesfälle ausmachen) gehen laut Artikel auf raucherspezifische Ursachen zurück, also bestimmt man die gesuchte Wahrscheinlichkeit als:

$$0,027 \cdot 0,532 \approx 0,0144 = 1,44\,\%$$

Ähnlich geht man für die anderen eingetragenen Werte vor.



	R	$\overline{R}$	gesamt
F	1,44 %	51,76 %	53,2 %
M	3,65 %	43,15 %	46,8 %
	5,09 %	94,91 %	100 %

1. Man erhält damit den Anteil der Todesfälle mit raucherspezifischen Ursachen unter allen Todesfällen in Deutschland im Jahre 2005:

$$\begin{aligned} P(R) &= P(F \cap R) + P(M \cap R) \\ &= 0,532 \cdot 0,027 + 0,468 \cdot 0,078 \\ &\approx 0,050868 \approx 5,1\,\% \end{aligned}$$

Mit dem eben berechneten Anteil $P(R)$ sowie der Angabe, dass 42 217 Personen im Jahre 2005 an einer raucherspezifischen Ursache starben, kann man die Gesamtanzahl n aller 2005 in Deutschland verstorbenen Personen mit Hilfe eines Dreisatzes angeben:

$$\begin{aligned} 5,0868\,\% &\mathrel{\widehat{=}} 42\,217 \\ 1\,\% &\mathrel{\widehat{=}} 8\,299,32 \\ 100\,\% &\mathrel{\widehat{=}} 829\,932 \end{aligned}$$

Im Jahre 2005 waren in Deutschland insgesamt knapp 830 000 raucherspezifische Todesfälle zu verzeichnen.

2. Die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei einem Sterbefall mit bekannter raucherspezifischer Todesursache um eine Frau handelt, ist eine bedingte Wahrscheinlichkeit. Die Bedingung «raucherspezifische Todesursache» ist vorgegeben. Man berechnet $P_R(F)$ unter Zuhilfenahme obiger Ergebnisse folgendermaßen:

$$P_R(F) = \frac{P(R \cap F)}{P(R)} = \frac{0,532 \cdot 0,027}{0,050868} \approx 0,2824 \approx 28,2\,\%$$

c) Der verkündete Rückgang ist ein trügerischer. Zwar ist der *Anteil* der an raucherspezifischen Erkrankungen verstorbenen Männer tatsächlich von 83 % im Jahre 1985 auf 72 % im Jahre 2005 zurückgegangen – es ist aber zu beachten, dass dies in *absoluten Zahlen* 28 274 (im Jahre 1985) beziehungsweise $0,72 \cdot 42\,217 \approx 30\,396$ (im Jahre 2005) Todesfällen entspricht. Absolut gesehen liegt also ein Zuwachs vor; von einer erfreulichen Entwicklung kann demzufolge nicht die Rede sein.

Im Jahre 2005 waren rund 28 % der 42 217 Sterbefälle mit raucherspezifischer Ursache Frauen (dies wurde in Aufgabenteil b) bestimmt), das heißt ca. $0,28 \cdot 42\,217 \approx 11\,821$. Vergleicht man diese absolute Zahl mit 1985 (5 693), so ist festzustellen, dass sich diese Zahl mehr als verdoppelt hat.

Vergleicht man nun die zugehörigen Anteile («Frauen anteilig an raucherspezifischen Todesfällen»), so erhält man für das Jahr 1985:

$$\frac{5\,693}{33\,967} \approx 0,1676 \approx 16,8\,\%$$

Für das Jahr 2005 liegt dieser Wert bei ca. 28,2 %, das heißt, der Anteil hat sich, wie in der Meldung erwähnt, um ca. 50 % erhöht (denn $0,168 \cdot 1,5 \approx 0,252 \mathrel{\widehat{=}} 25,2\,\%$; hier wurde stark gerundet. Tatsächlich liegt die Erhöhung weit über 50 %).