

Becker | Brucker

Erfolg in Mathe 2016

Realschulabschluss
Baden-Württemberg
Pflichtteil

Übungsbuch mit
Tipps und Lösungen

Freiburger
Verlag

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Grundwissen und Übungsaufgaben 5

1 Algebra 5

1.1	Wichtige Grundlagen	5
1.1.1	Umgang mit Klammern	5
1.1.2	Ausmultiplizieren und Faktorisieren	7
1.1.3	Brüche	8
1.1.4	Potenzen und Wurzeln	13
1.1.5	Lineare Gleichungen	15
1.1.6	Quadratische Gleichungen	15
1.1.7	Bruchgleichungen	17
1.1.8	Lineare Gleichungssysteme	19
1.2	Aufgaben	22
1.2.1	Einfache Aufgaben	22
1.2.2	Aufgaben (Pflichtteil)	25

2 Lineare und quadratische Funktionen 27

2.1	Wichtige Grundlagen	27
2.1.1	Begriffe rund um die Funktion	27
2.1.2	Lineare Funktionen	28
2.1.3	Quadratische Funktionen	32
2.1.4	Schnittpunkte	34
2.2	Aufgaben	36
2.2.1	Einfache Aufgaben	36
2.2.2	Aufgaben (Pflichtteil)	39

3 Trigonometrie 41

3.1	Wichtige Grundlagen	41
3.1.1	Bezeichnungen im rechtwinkligen Dreieck	41
3.1.2	Wichtige Sätze und Zusammenhänge	41
3.1.3	Trigonometrische Funktionen (Sinus, Kosinus, Tangens)	42
3.2	Aufgaben	44
3.2.1	Einfache Aufgaben	44
3.2.2	Aufgaben (Pflichtteil)	45

4	Stereometrie	49
4.1	Die wichtigsten Flächen	49
4.2	Die wichtigsten Körper	50
4.3	Zusammenhänge und Rechenverfahren aus der Trigonometrie	50
4.4	Aufgaben	51
4.4.1	Einfache Aufgaben	51
4.4.2	Aufgaben (Pflichtteil)	54
5	Daten und Zufall	57
5.1	Wichtige Grundlagen	57
5.1.1	Daten	57
5.1.2	Zufall und Wahrscheinlichkeit	60
5.2	Aufgaben	64
5.2.1	Einfache Aufgaben	64
5.2.2	Aufgaben (Pflichtteil)	67
6	Sachrechnen	73
6.1	Wichtige Grundlagen	73
6.1.1	Prozentrechnung	73
6.1.2	Zinsrechnung	74
6.1.3	Zinseszinsrechnung	75
6.1.4	Zuwachssparen	76
6.1.5	Ratensparen	76
6.2	Aufgaben	77
6.2.1	Einfache Aufgaben	77
6.2.2	Aufgaben (Pflichtteil)	79
Tipps		83
1	Algebra	83
1.1	Einfache Aufgaben	83
1.2	Aufgaben (Pflichtteil)	85
2	Lineare und quadratische Funktionen	86
2.1	Einfache Aufgaben	86
2.2	Aufgaben (Pflichtteil)	87
3	Trigonometrie	88
3.1	Einfache Aufgaben	88
3.2	Aufgaben (Pflichtteil)	88
4	Stereometrie	90
4.1	Einfache Aufgaben	90
4.2	Aufgaben (Pflichtteil)	90
5	Daten und Zufall	92
5.1	Einfache Aufgaben	92
5.2	Aufgaben (Pflichtteil)	92
6	Sachrechnen	94
6.1	Einfache Aufgaben	94
6.2	Aufgaben (Pflichtteil)	94

Lösungen		97
1	Algebra	97
	1.1 Einfache Aufgaben	97
	1.2 Aufgaben (Pflichtteil)	103
2	Lineare und quadratische Funktionen	110
	2.1 Einfache Aufgaben	110
	2.2 Aufgaben (Pflichtteil)	116
3	Trigonometrie	122
	3.1 Einfache Aufgaben	122
	3.2 Aufgaben (Pflichtteil)	128
4	Stereometrie	134
	4.1 Einfache Aufgaben	134
	4.2 Aufgaben (Pflichtteil)	139
5	Daten und Zufall	147
	5.1 Einfache Aufgaben	147
	5.2 Aufgaben (Pflichtteil)	151
6	Sachrechnen	163
	6.1 Einfache Aufgaben	163
	6.2 Aufgaben (Pflichtteil)	165

Original-Prüfungsaufgaben		171
1	Allgemeine Hinweise	171
2	Pflichtteil 2013	173
	2.1 Tipps 2013	176
	2.2 Lösungen 2013	178
3	Pflichtteil 2014	187
	3.1 Tipps 2014	190
	3.2 Lösungen 2014	192
4	Pflichtteil 2015	199
	4.1 Tipps 2015	203
	4.2 Lösungen 2015	205

Stichwortverzeichnis		214
-----------------------------	--	------------

Vorwort

Erfolg von Anfang an

... ist das Geheimnis einer erfolgreichen Mathe-Prüfung.

Mit diesem Übungsbuch erhältst du eine optimale Vorbereitung für deine Abschlussprüfung zur Mittleren Reife. Die Inhalte sind speziell auf die grundlegenden Anforderungen im Pflichtteil der Abschlussprüfung an Realschulen in Baden-Württemberg abgestimmt. Du findest zu jedem der sechs Themenschwerpunkte Algebra, Lineare und quadratische Funktionen, Trigonometrie, Stereometrie, Sachrechnen sowie Daten und Zufall einen kurzen Theorieteil und passende Aufgaben – und das alles in einem Buch!

Zum Aufbau dieses Übungsbuches

Dieses Übungsbuch untergliedert sich in vier Teile:

Im ersten Teil des Buches findest du zu allen prüfungsrelevanten Themenbereichen (Algebra, Funktionen, Trigonometrie, Stereometrie, Daten und Zufall, Sachrechnen) einen kurzen Theorieteil, in dem die wichtigsten Formeln und Zusammenhänge anhand von Beispielen erklärt werden sowie Aufgaben, anhand derer du die entsprechenden theoretischen Inhalte üben und weiter vertiefen kannst. Die Aufgaben sind nach wachsendem Schwierigkeitsgrad angeordnet: Es beginnt mit sehr einfachen Aufgaben zur Wiederholung, gefolgt von Aufgaben auf Niveau des Pflichtteils.

Der zweite Teil ist der blau hervorgehobene Tippenteil, den du aufschlägst, wenn du mit einer der Aufgaben nicht zurechtkommst. Hier findest du Vorschläge, wie du zur Lösung kommen kannst, ohne dass die eigentliche Lösung vorweggenommen wird. Bei den einfachen Aufgaben sind die Tipps meistens ausführlicher gestaltet. Bei den schwierigeren Aufgaben gibt es Hinweise, mit welchen Tricks sie auf einfachere Aufgaben zurückgeführt werden können und wie du am besten anfängst.

Im dritten Teil, dem Lösungsteil, findest du ausführliche Lösungen aller Aufgaben. Bei den Lösungen der Aufgaben wurden Zwischenergebnisse und Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen gerundet. Wenn du mit genaueren Werten und ohne Verwendung von Zwischenergebnissen rechnest, weichen deine Endergebnisse eventuell etwas von den hier angegebenen ab.

Schließlich erwarten dich im letzten Teil des Buches die Original-Pflichtteile der letzten drei Jahre mit Tipps und ausführlichen Lösungen.

Wie arbeitest du mit diesem Buch?

Die einzelnen Kapitel bauen zwar aufeinander auf, es ist jedoch nicht zwingend notwendig, die Kapitel der Reihe nach durchzuarbeiten.

Du kannst die Grundwissenteile entweder lesen und dich anschließend an die Aufgaben machen oder aber du versuchst dich an den Aufgaben und schlägst im Grundwissenteil nach, wenn du eine konkrete Formel wissen möchtest.

Du solltest immer prüfen, ob du die einfacheren Aufgaben problemlos lösen kannst, denn die schwierigeren Aufgaben lassen sich fast immer auf solche einfachen Teilaufgaben zurückführen. Sind Aufgaben oder Themen mit einem Sternsymbol \star gekennzeichnet, so handelt es sich um Themen zur Vertiefung oder um Aufgaben mit „Knobelcharakter“.

Die Aufgaben auf Niveau des Pflichtbereiches sind jeweils mit einem Quadrat \square markiert. Hake sie ab, wenn du sie erledigt hast \checkmark .

Aufbau der schriftlichen Realschul-Abschlussprüfung in Mathematik

Arbeitszeit

Die Arbeitszeit beträgt 180 Minuten (3 Zeitstunden).

Hilfsmittel

Die Benutzung einer in der Schule eingeführten Formelsammlung, eines nicht programmierbaren elektronischen Taschenrechners sowie die Verwendung von Parabelschablone und Zeichengeräten sind erlaubt.

Themen

Die Aufgaben werden in den Bereichen Algebra, Funktionen, Trigonometrie, Stereometrie, Sachrechnen sowie Daten und Zufall gestellt.

Pflichtteil

Der Pflichtteil umfasst sechs bis acht Aufgaben. Es sind alle Aufgaben zu bearbeiten. Im Pflichtbereich werden Grundkenntnisse und Grundfertigkeiten sowie grundlegende Lösungsstrategien geprüft.

Wahlteil

Die Lehrperson erhält vier Aufgaben und wählt drei davon aus, welche die Schülerinnen und Schüler zur Bearbeitung erhalten. Jede Schülerin und jeder Schüler bearbeitet zwei der drei bereitgestellten Aufgaben. Bearbeiten die Schülerinnen und Schüler mehr als zwei Aufgaben, werden die beiden besten gewertet. Die Aufgaben des Wahlteils stellen erhöhte Ansprüche bezüglich der Lösungsstrategien und Begründungen.

Punktzahl

Insgesamt können 50 Punkte erreicht werden; dabei entfallen 30 Punkte auf den Pflichtteil und 20 Punkte auf den Wahlteil.

Wir möchten uns an dieser Stelle bei den vielen Schülerinnen und Schülern, welche uns bei der Erstellung der Lösungen tatkräftig unterstützt haben, ganz herzlich bedanken und wünschen allen, die sich auf die Abschlussprüfung vorbereiten, viel Erfolg!

Wolfgang Becker und Katharina Brucker

1 Algebra

Gleichungen umformen oder Werte für Variablen bestimmen, Algebra begegnet dir in der Mathematik in nahezu allen Themenbereichen. Wundere dich deshalb nicht, dass dieses Kapitel einige Seiten mehr umfasst als die restlichen Kapitel in diesem Buch. Lasse dich auch von der Anzahl der Aufgaben zu diesem Thema nicht abschrecken, sondern betrachte es als Angebot, dich durch Übung zum Meister auszubilden. Übe so lange, bis du denkst: „Jetzt bin ich gut vorbereitet!“.

1.1 Wichtige Grundlagen

1.1.1 Umgang mit Klammern

1. Das Auflösen von Klammern bereitet dir wahrscheinlich selten Schwierigkeiten. Du weißt:

- Steht vor einer Klammer kein Zeichen oder ein „+“-Zeichen, so kannst du die Klammer einfach weglassen.

Beispiel:

$$+(3x - 4y + 6) = (3x - 4y + 6) = 3x - 4y + 6$$

- Steht vor einer Klammer ein „-“-Zeichen, so kann man die Klammer weglassen (auflösen), indem man bei sämtlichen Termen in der Klammer (auch beim ersten!) das Vorzeichen umkehrt.

Beispiel:

$$-(3x - 4y + 6) = -3x + 4y - 6$$

- Sind mehrere Klammern ineinander verschachtelt, so musst du die Klammern „von Innen nach Außen“ auflösen, d.h. die innerste Klammer zuerst!

Beispiel:

$$-(3x + y - (2a - b) + c) = -(3x + y - 2a + b + c) = -3x - y + 2a - b - c$$

- ☞ Manchmal kann man zwischendurch auch Terme zusammenfassen und dadurch die Rechnung abkürzen.

2. Schwierigkeiten entstehen häufig durch die in der Mathematik üblichen „**Klammer-Einsparungsregeln**“, die bei vielen Termen die Schreibweise einfacher und übersichtlicher machen. So wird z.B.

- bei Brüchen im Zähler und Nenner die Außenklammer weggelassen.

Beispiel:

$$\frac{(3x-4y)}{(2x+8z)} = \frac{3x-4y}{2x+8z}$$

☞ Beim Multiplizieren, Dividieren, Erweitern und Kürzen müssen die Klammern aber wieder gesetzt werden!

- beim Term unter einer Wurzel die Außenklammer weggelassen.

Beispiel:

$$\sqrt{(3x-5)} = \sqrt{3x-5}$$

☞ Will man aber z.B. einen vor der Wurzel stehenden Faktor unter die Wurzel schreiben, so muss die Klammer wieder gesetzt werden!

Beispiel:

$$2 \cdot \sqrt{2x+5} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2x+5} = \sqrt{4 \cdot (2x+5)}$$

- bei Gleichungen in den Termen links und rechts vom Gleichheitszeichen die Außenklammer weggelassen.

Beispiel:

$$\text{Statt } (6x-23) = (2x-4) \text{ schreibt man einfach } 6x-23 = 2x-4.$$

☞ Willst du aber die Gleichung auf beiden Seiten mit einem Term multiplizieren, dividieren oder beide Seiten quadrieren, so musst du die Klammern wieder setzen!

- bei Potenzen im Exponenten die Außenklammer weggelassen.

Beispiel:

$$x^{(2n+1)} = x^{2n+1}$$

☞ Beim Anwenden des Potenzgesetzes für das Potenzieren von Potenzen (siehe S. 14) musst du die Klammer aber wieder schreiben!

Du siehst also: Wenn du mit Termen, in denen Klammern eingespart wurden, rechnen willst, musst du häufig die Klammern wieder einfügen. Anderenfalls wird die gesamte Rechnung falsch. Um das zu trainieren und die dadurch bedingten, sehr häufig auftretenden Fehler zu vermeiden, findest du geeignete Übungsaufgaben im Aufgabenteil ab Seite 22.

1.2 Aufgaben

1.2.1 Einfache Aufgaben

Tipps im blauen Tippteil ab Seite 83; Lösungen im Lösungsteil ab Seite 97

Umgang mit Klammern

1. Löse alle Klammern auf und vereinfache so weit wie möglich.

a) $3x + 4 - (7x - 6)$

c) $-(5x + 8) + (3x + 2)$

b) $-(-2x + 3) - (3x - 2)$

d) $3x - (6 - (3 + 5x) - 1)$

2. Erweitere den Bruch wie angegeben.

a) $\frac{x-2}{x+5}$ mit 3

b) $\frac{x}{x-1}$ mit $x+1$

3. Schreibe alles unter eine Wurzel.

a) $x \cdot \sqrt{2x+1}$

b) $2 \cdot \sqrt{3x-2}$

4. Löse die Gleichung, indem du zunächst mit dem Hauptnenner multiplizierst.

a) $\frac{x-1}{2} = \frac{x+1}{3}$

b) $\frac{x+2}{5} = x-3$

5. Vereinfache nach dem 5. Potenzgesetz $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

a) $(x^{2n+1})^2$

b) $(a^{4n-1})^3$

Ausmultiplizieren und Faktorisieren

1. Verwandle die folgenden Produkte durch Ausmultiplizieren in Summen.

a) $3x \cdot (2x^2 - 7)$

e) $(6x - 8)^2$

b) $-4 \cdot (3 - x^2)$

f)* $(-3 + x)^2$

c) $(2x + 1) \cdot (x - 3)$

g) $(3x - 6) \cdot (3x + 6)$

d) $(3x + 4)^2$

h)* $(-x + 5) \cdot (5 + x)$

Tipps

1 Algebra

1.1 Einfache Aufgaben

Umgang mit Klammern

1. a) - c) Bei „Minusklammern“ werden alle Vorzeichen in der Klammer umgekehrt, auch das erste!
d) Innere Klammer zuerst auflösen!
2. Beim Erweitern werden Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl multipliziert. Dabei die Klammern nicht vergessen!
3. Der Term vor der Wurzel muss quadriert werden, der Term unter der Wurzel muss in Klammern gesetzt werden.
4. In diesen einfachen Fällen ist der Hauptnenner das Produkt der Einzelnenner.
5. Basis beibehalten, Exponenten miteinander multiplizieren!

Ausmultiplizieren und Faktorisieren

1. a) - c) Das kannst du natürlich.
d) - g) Wende die entsprechende Binomische Formel an.
h) Ersetze $(-x + 5)$ durch $(5 - x)$.
2. a), b) Suche einen gemeinsamen Faktor in beiden Summanden und klammere ihn aus.
c) - e) Wende eine geeignete Binomische Formel an.
f) - h) Klammere erst einen gemeinsamen Faktor aus und wende anschließend auf den restlichen Term in der Klammer eine geeignete Binomische Formel an.

Rechnen mit Brüchen

1. Erweitern und Kürzen
 - a), b) Beim Erweitern werden Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl multipliziert. Dabei die Klammern nicht vergessen!
 - c) Die Erweiterungszahl ist $24 : 6 = 4$.
 - d) Du musst mit $\sqrt{5}$ erweitern!

Lösungen

1 Algebra

1.1 Einfache Aufgaben

Umgang mit Klammern

1. a) $3x + 4 - (7x - 6) = 3x + 4 - 7x + 6 = -4x + 10$
- b) $-(-2x + 3) - (3x - 2) = 2x - 3 - 3x + 2 = -x - 1$
- c) $-(5x + 8) + (3x + 2) = -5x - 8 + 3x + 2 = -2x - 6$
- d) $3x - (6 - (3 + 5x) - 1) = 3x - (6 - 3 - 5x - 1) = 3x - (2 - 5x) = 3x - 2 + 5x = 8x - 2$

2. a) $\frac{x-2}{x+5} = \frac{(x-2) \cdot 3}{(x+5) \cdot 3} = \frac{3x-6}{3x+15}$

b) $\frac{x}{x-1} = \frac{x \cdot (x+1)}{(x-1) \cdot (x+1)} = \frac{x^2+x}{x^2-1}$ (3. Binomische Formel im Nenner)

3. a) $x\sqrt{(2x+1)} = \sqrt{x^2 \cdot (2x+1)} = \sqrt{2x^3+x^2}$

b) $2\sqrt{3x-2} = \sqrt{4 \cdot (3x-2)} = \sqrt{12x-8}$

4. a) Hauptnenner: 6

$$\frac{x-1}{2} = \frac{x+1}{3} \Leftrightarrow \frac{6 \cdot (x-1)}{2} = \frac{6 \cdot (x+1)}{3} \Leftrightarrow 3(x-1) = 2(x+1)$$
$$\Leftrightarrow 3x - 3 = 2x + 2 \Leftrightarrow x = 5$$

b) Hauptnenner: 5

$$\frac{x+2}{5} = x-3 \Leftrightarrow \frac{5 \cdot (x+2)}{5} = 5 \cdot (x-3) \Leftrightarrow x+2 = 5x-15 \Leftrightarrow -4x = -17 \Leftrightarrow x = \frac{17}{4}$$

5. a) $(x^{2n+1})^2 = x^{(2n+1) \cdot 2} = x^{4n+2}$

b) $(a^{4n-1})^3 = a^{(4n-1) \cdot 3} = a^{12n-3}$

Ausmultiplizieren und Faktorisieren

1. a) $3x \cdot (2x^2 - 7) = 6x^3 - 21x$
 b) $-4(3 - x^2) = -12 + 4x^2$
 c) $(2x + 1)(x - 3) = 2x^2 + x - 6x - 3 = 2x^2 - 5x - 3$
 d) $(3x + 4)^2 = 9x^2 + 24x + 16$
 e) $(6x - 8)^2 = 36x^2 - 96x + 64$
 f) $(-3 + x)^2 = 9 - 6x + x^2 = x^2 - 6x + 9$
 g) $(3x - 6)(3x + 6) = 9x^2 - 36$
 h) $(-x + 5)(5 + x) = (5 - x)(5 + x) = 25 - x^2$
2. a) $6x^2 + 9 = 3(2x^2 + 3)$
 b) $5x^2 - 8x = x(5x - 8)$
 c) $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$
 d) $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$
 e) $x^2 - 36 = (x + 6)(x - 6)$
 f) $2x^2 - 20x + 50 = 2(x^2 - 10x + 25) = 2(x - 5)^2$
 g) $3x^3 + 6x^2 + 3x = 3x(x^2 + 2x + 1) = 3x(x + 1)^2$
 h) $36x^2 - 36 = 36(x^2 - 1) = 36(x + 1)(x - 1)$

Rechnen mit Brüchen

1. Erweitern

- a) $\frac{a+3}{a-4} = \frac{(a+3) \cdot 5}{(a-4) \cdot 5} = \frac{5a+15}{5a-20}$
- b) $\frac{x-2}{x+2} = \frac{(x-2)(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x^2-4x+4}{x^2-4}$ (Binomische Formeln!)
- c) Erweiterungszahl ist $24 : 6 = 4 \Rightarrow \frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 4}{6 \cdot 4} = \frac{20}{24}$
- d) Du musst mit $\sqrt{5}$ erweitern: $\Rightarrow \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{3 \cdot \sqrt{5}}{5}$

2. Multiplizieren und Dividieren

- a) $2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{4} = \frac{\cancel{2}_1 \cdot 3}{1 \cdot \cancel{4}_2} = \frac{3}{2}$
- b) $24 \cdot \frac{7}{12} = \frac{24}{1} \cdot \frac{7}{12} = \frac{\cancel{24}_2 \cdot 7}{1 \cdot \cancel{12}_1} = 14$
- c) $\frac{8}{9} : 4 = \frac{8}{9} : \frac{4}{1} = \frac{\cancel{8}_2}{9} \cdot \frac{1}{\cancel{4}_1} = \frac{2}{9}$