Rosner

Mathe gut erklärt

Baden-Württemberg
Allgemeinbildende Gymnasien

1. Auflage 2015

Freiburger Verlag

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Liebe Schülerinnen und Schüler,

dieses Buch soll Sie dabei unterstützen,

- sich in den letzten beiden Schuljahren optimal auf Klausuren und auf das Abitur in Mathematik vorzubereiten.
- sich alle Lehrplaninhalte anhand verständlicher und übersichtlicher Stoffzusammenfassungen anzueignen.
- Ihr gewonnenes Wissen anhand von Basisübungen mit ausführlichen Lösungen schnell und prüfungsbezogen zu vertiefen.
- die Abitursaufgaben der vergangenen Jahrgänge zu bearbeiten, da Sie hiermit ein Nachschlagewerk zur Verfügung haben.

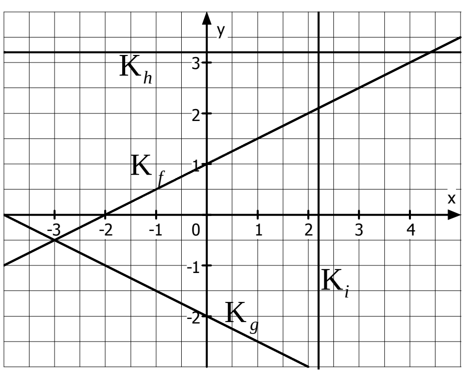
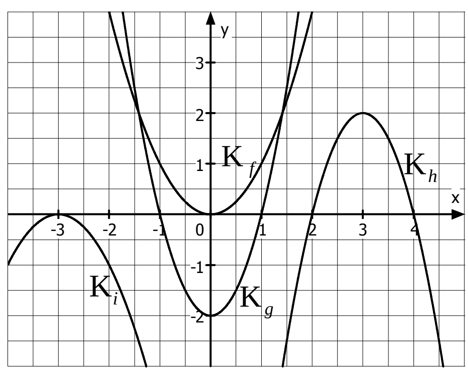
Liebe Fachkolleginnen und Fachkollegen,

dieses Buch soll Sie dabei unterstützen,

- die zeitintensive Stoffwiederholung, Klausur- und Abiturvorbereitung teilweise aus dem Unterricht auslagern zu können.
- auf diese Weise mehr Zeit für verständnisorientierten Unterricht zu gewinnen.
- sicherzustellen, dass Ihre Schülerinnen und Schüler über ausreichendes Basiswissen verfügen.

1. Funktionen

1.1 Ganzrationale Funktionen (Polynome)

1. Grades (Geraden)	**2. Grades (Parabeln)**
Allg. Ansatz : $\boldsymbol{y = mx + b}$	**Allg. Ansatz:** $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$
Steigung aus 2 Punkten: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	Scheitelpunkt-Ansatz: $f(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$ mit $S(x_s \mid y_s)$
Punkt-Steigungs-Form (PSF): $y = m \cdot (x - x_1) + y_1$	$a > 0$: nach oben geöffnet bzw. Verlauf von II nach I
Steigungswinkel aus Steigung bestimmen: $m = \tan(\alpha)$	$a < 0$: nach unten geöffnet bzw. Verlauf von III nach IV
Parallele Geraden: $m_1 = m_2$ (gleiche Steigung)	Bei Symmetrie zur y-Achse: $f(x) = ax^2 + c$ (nur gerade Hochzahlen)
Senkrechte (orthogonale) Geraden: $m_2 = -1/m_1$ (Steigungen sind negative Kehrwerte voneinander) bzw. $m_1 \cdot m_2 = -1$	
1. Winkelhalbierende: $y = x$ 2. Winkelhalbierende: $y = -x$	
	
K_f: $y = 0,5x + 1$ K_g: $y = -0,5x - 2$ K_h: $y = 3,2$ K_i: $x = 2,2$	K_f: $f(x) = x^2$ K_g: $g(x) = 2x^2 - 2$ K_h: $h(x) = -2(x-3)^2 + 2$ K_i: $i(x) = -(x+3)^2$

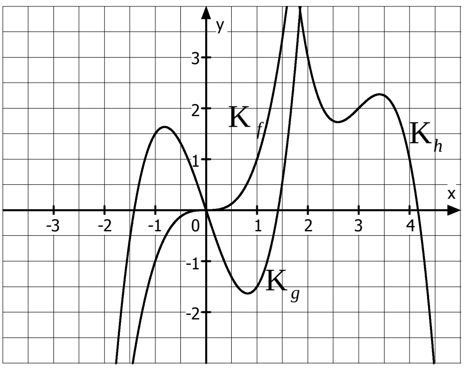
<table>
<tr><th>3. Grades</th><th>4. Grades</th></tr>
<tr><td>

Allg. Ansatz: $\boldsymbol{f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d}$

$a > 0$: Verlauf von III nach I

$a < 0$: Verlauf von II nach IV

Ansatz bei Symmetrie zum Ursprung:
$f(x) = ax^3 + cx$ (nur ungerade Hochzahlen)



K_f: $f(x) = x^3$

K_g: $g(x) = 1{,}5x^3 - 3x$

K_h: $h(x) = -2x^3 + 18x^2 - 53x + 53$

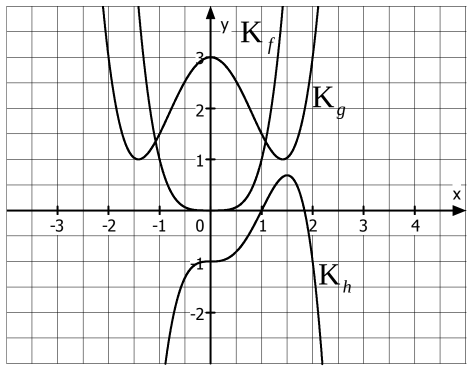
</td><td>

Allg. Ansatz: $\boldsymbol{f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e}$

$a > 0$: Verlauf von II nach I

$a < 0$: Verlauf von III nach IV

Ansatz bei Symmetrie zur y-Achse:
$f(x) = ax^4 + cx^2 + e$ (nur gerade Hochzahlen)



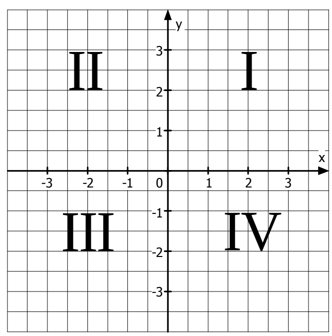
K_f: $f(x) = x^4$

K_g: $g(x) = 0{,}5x^4 - 2x^2 + 3$

K_h: $h(x) = -x^4 + 2x^3 - 1$

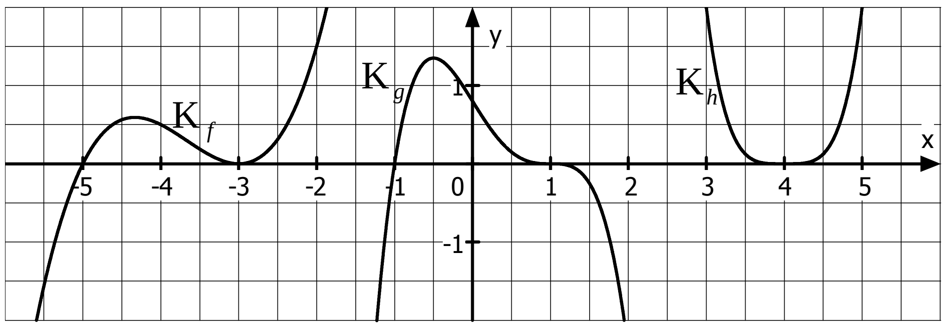
</td></tr>
</table>

Die Quadranten



1.2 Der Nullstellenansatz und die Vielfachheit von Nullstellen

Beispiele



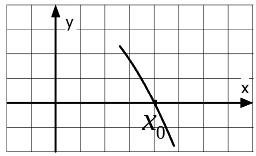
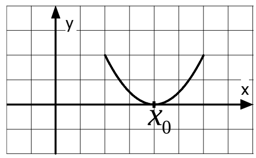
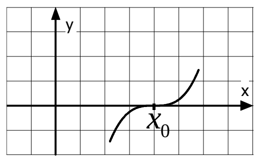
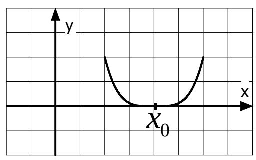
$K_f: f(x) = 0{,}5 \cdot (x+5) \cdot (x+3)^2$ $K_g: g(x) = -0{,}8 \cdot (x+1) \cdot (x-1)^3$ $K_h: h(x) = 2 \cdot (x-4)^4$

Aufbau des Nullstellenansatzes (am Beispiel)

$$g(x) = -0{,}8 \cdot \left(x+1\right) \cdot \left(x-1\right)^3$$

Verlauf von III nach IV	$x_0 = -1$ ist einfache Nullstelle	$x_{1/2/3} = +1$ ist dreifache Nullstelle

Übersicht (für ganzrationale Funktionen)

Vielfachheit Nullstelle	**Faktor im Nullstellenansatz**	**Skizze**	**Beschreibung**
Einfache Nullstelle: x_0	$f(x) = \ldots \cdot (x - x_0) \cdot \ldots$		Schaubild **schneidet** *x*-Achse (mit Vorzeichen-wechsel VZW)
Doppelte Nullstelle: x_0	$f(x) = \ldots \cdot (x - x_0)^2 \cdot \ldots$		Schaubild **berührt** *x*-Achse (ohne VZW)
Dreifache Nullstelle: x_0	$f(x) = \ldots \cdot (x - x_0)^3 \cdot \ldots$		Schaubild **schneidet** und **berührt** *x*-Achse (mit VZW)
Vierfache Nullstelle: x_0	$f(x) = \ldots \cdot (x - x_0)^4 \cdot \ldots$		Schaubild **berührt** *x*-Achse (ohne VZW) („breiter“ geformt als doppelte Nullstelle)

1.3 Gebrochenrationale Funktionen

Allg. $f(x) = \dfrac{\text{Zähler: } \textbf{\textit{(ganzrationale) Funktion}}}{\text{Nenner: } \textbf{\textit{(ganzrationale) Funktion}}}$ Beispiel: $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ $\left(\text{mit } D = \mathbb{R} \setminus 1\right)$

1. Untersuchung auf senkrechte Asymptoten

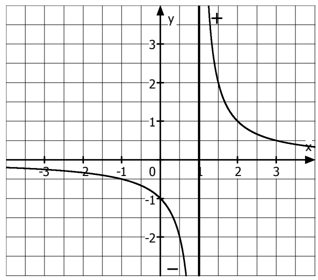
x-Werte, die im **Nenner** zum **Wert 0** führen, nennt man **Definitionslücken**. Solche *x*-Werte sind nicht in der Definitionsmenge der Funktion enthalten.
An einer Definitionslücke kann das Schaubild eine **senkrechte Asymptote** aufweisen.

Fall 1: Polstelle mit Vorzeichenwechel (einfache Nullstelle des Nenners)

Beispiel: $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

Senkrechte Asymptote: $\boldsymbol{x = 1}$

Für $x \to 1 \ (x < 1)$ gilt: $f(x) \to -\infty$
Für $x \to 1 \ (x > 1)$ gilt: $f(x) \to +\infty$

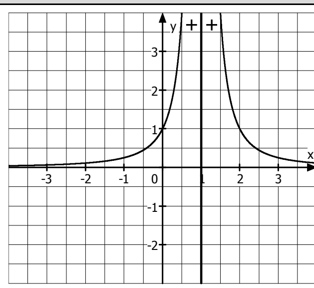


Fall 2: Polstelle ohne Vorzeichenwechel (doppelte Nullstelle des Nenners)

Beispiel: $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$

Senkrechte Asymptote: $\boldsymbol{x = 1}$

Für $x \to 1 \ (x < 1)$ gilt: $f(x) \to +\infty$
Für $x \to 1 \ (x > 1)$ gilt: $f(x) \to +\infty$



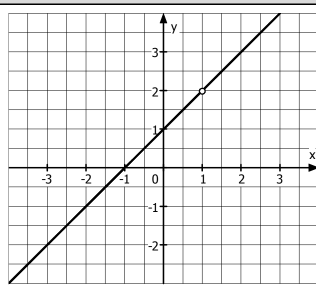
Fall 3 (Ausnahme)**: Keine Polstelle (auch** Nullstelle des **Zählers**)

Beispiel: $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$

Keine senkrechte Asymptote (trotz Definitionslücke)

Grund: $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1} = \dfrac{\cancel{(x-1)} \cdot (x+1)}{\cancel{(x-1)}} = x+1$

Die Definitionslücke ist nach dem Kürzen „verschwunden“. Sie ist also (be-)**hebbar**.
(Wobei die Ausgangsfunktion diese noch immer aufweist, siehe Schaubild.)

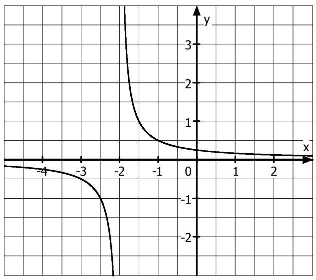


2. Untersuchung auf waagrechte Asymptoten (Verhalten für $x \to \pm\infty$)

Fall 1: Zählergrad < Nennergrad: ***x*-Achse** ist waagrechte **Asymptote**

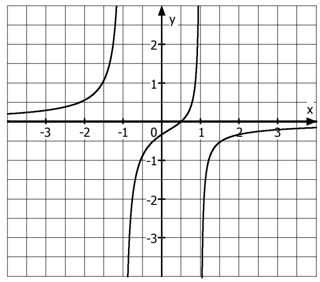
$$f(x) = \frac{1}{2x+4} \quad \left(\frac{\text{Grad } 0}{\text{Grad } 1}\right)$$

waagrechte Asymptote: $\boldsymbol{y = 0}$ (x-Achse)



$$f(x) = \frac{-2x+1}{3x^2-3} \quad \left(\frac{\text{Grad } 1}{\text{Grad } 2}\right)$$

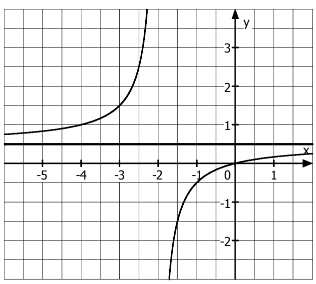
waagrechte Asymptote: $\boldsymbol{y = 0}$ (x-Achse)



Fall 2: Zählergrad = Nennergrad: Waagerechte Asymptote

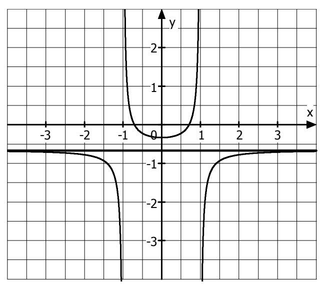
$$f(x) = \frac{\mathbf{1}x}{\mathbf{2}x+4} \quad \left(\frac{\text{Grad } 1}{\text{Grad } 1}\right)$$

waagrechte Asymptote: $\boldsymbol{y = \frac{1}{2}}$



$$f(x) = \frac{\mathbf{-2}x^2+1}{\mathbf{3}x^2-3} \quad \left(\frac{\text{Grad } 2}{\text{Grad } 2}\right)$$

waagrechte Asymptote: $\boldsymbol{y = -\frac{2}{3}}$

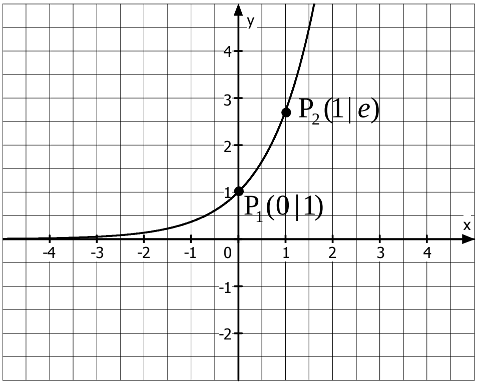


Fall 3: Zählergrad > Nennergrad: Keine waagrechte Asymptote.

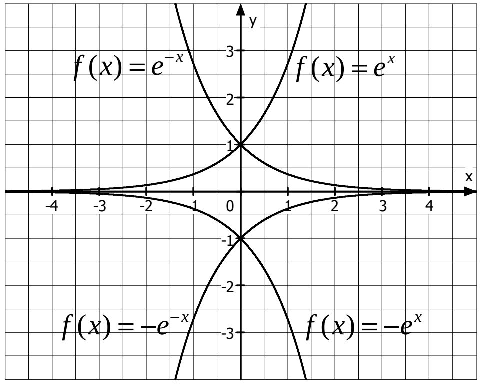
(Keine Beispiele, da nicht relevant für das Abitur.)

1.4 Exponentialfunktionen

1. Verlauf : $f(x) = e^x$



2. Spiegelungen



3. Koeffizienten in : $f(x) = a \cdot e^{b\cdot(x-c)} + d$

a **- Streckung / Stauchung in *y*-Richtung**	$a > 1$:	„steiler“
	$0 < a < 1$:	„flacher“
	($a < 0$:	an der x-Achse gespiegelt)
b **- ansteigendes oder fallendes Schaubild**	$b > 0$:	ansteigendes Schaubild
	$b < 0$:	fallendes Schaubild (bzw. an der y-Achse gespiegelt)
c **- Verschiebung in *x*-Richtung**	$c > 0$:	nach rechts
	$c < 0$:	nach links
d **- Verschiebung in *y*-Richtung**	$d > 0$:	nach oben
	$d < 0$:	nach unten

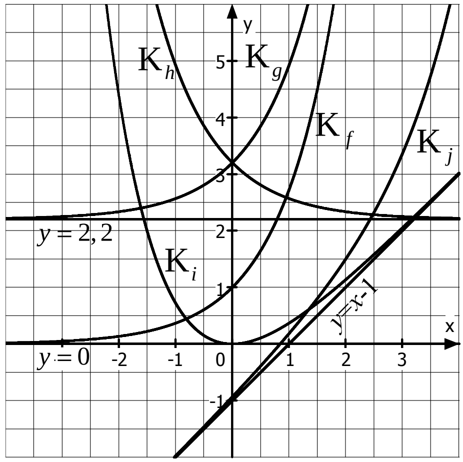
Vorsicht beim Koeffizienten *c*

Das Schaubild zu $f(x) = e^{x-3}$ wurde um 3 Einheiten nach *rechts* verschoben!
Der Koeffizient c hat hier den Wert $+3$, das Minuszeichen kommt vom allgemeinen Ansatz der Funktion.

Entsprechend $f(x) = e^{x+2}$: Verschiebung um 2 nach *links*!

4. Asymptoten (Näherungsgeraden)

Begriffserklärung : Eine Asymptote ist eine Gerade, an welche sich das Schaubild einer gegebenen Exponentialfunktion unendlich nah annähert, ohne sie jedoch zu „erreichen“. Beispielsweise nähert sich das Schaubild der Funktion $f(x)=e^x$ bei negativen x-Werten ($x \to -\infty$) der x-Achse (Asymptotengleichung: $y=0$) von oben an.

Beispielfunktion	Asymptote	Schaubilder
$f(x)=e^x$	$y=0$ ($x-$Achse) für $x \to -\infty$	
$g(x)=e^x+2,2$	$y=2,2$ für $x \to -\infty$	
$h(x)=e^{-x}+2,2$	$y=2,2$ für $x \to +\infty$	
$i(x)=e^{-x}+x-1$	$y=x-1$ für $x \to +\infty$	
$j(x)=0,5e^{x-2}+x-1$	$y=x-1$ für $x \to -\infty$	

Ausgehend von einer gegebenen Exponentialfunktion kann die zugehörige Asymptotengleichung und die Richtung, in welcher die Annäherung stattfindet, schnell durch die folgenden beiden Regeln bestimmt werden.

1. Regel (Asymptotengleichung) : $y =$„Exponentialgleichung ohne $e^{\dots x}$“
Man erhält die Asymptotengleichung, indem man die Gleichung der Exponentialfunktion schlicht übernimmt, jedoch hierbei auf den Summanden im Funktionsterm, der $e^{\dots x}$ enthält (dieser strebt gegen 0), verzichtet.

2. Regel (Annäherungsrichtung) : Bei $e^{„+x“}$ für $x \to -\infty$ bzw. **bei $e^{„-x“}$ für $x \to +\infty$**
Die Annäherungsrichtung wird durch den Summanden im Funktionsterm, der $e^{\dots x}$ enthält, festgelegt: Steht vor dem x im Exponenten ein Pluszeichen, so nähert sich die Asymptote für große negative x-Werte („links“ im Koordinatensystem) dem Schaubild an.
Steht hier hingegen ein Minuszeichen, so findet die Annäherung bei großen positiven x-Werten („rechts“ im Koordinatensystem) statt.

5. Anwendungen

Wachstumsvorgänge werden oft mit dem Typ $f(x)=e^{„+x“}$ modelliert, Zerfallsvorgänge hingegen mit $f(x)=e^{„-x“}$.