

Rosner

Mathe gut erklärt

Baden-Württemberg
Allgemeinbildende Gymnasien

1. Auflage 2015

Freiburger
Verlag

Inhaltsverzeichnis

I. Grundlagen Analysis	7
1 Funktionen	8
1.1 Ganzrationale Funktionen (Polynome)	8
1.2 Der Nullstellenansatz und die Vielfachheit von Nullstellen	10
1.3 Gebrochenrationale Funktionen	12
1.4 Exponentialfunktionen	14
1.5 Trigonometrische Funktionen	16
1.6 Funktionenscharen	18
1.7 Symmetrie zur y -Achse bzw. zum Ursprung	20
1.8 Abschnittsweise definierte Funktionen	21
1.9 Zusatz: Umgang mit Funktionen: Rechenansätze	21
2 Gleichungen	22
2.1 Gleichungstypen: Übersicht	22
2.2 Gleichungstypen: Konkretes Lösungsvorgehen	24
2.3 Goldene Regeln zum Lösen von Gleichungen	30
2.4 Lineare Gleichungssysteme	32
3 Differenzialrechnung	34
3.1 Ableitungsregeln	34
3.2 Tangente und Normale	37
3.3 Schnittpunkte (Berührungspunkt, senkrechter Schnitt, Schnittwinkel)	40
3.4 Monotonie	42
3.5 Krümmung	43
3.6 Extrempunkte (Hoch- und Tiefpunkte)	44
3.7 Wendepunkte	45
3.8 Sattelpunkte	46
3.9 Ortskurve	48
3.10 Zusammenhang zwischen den Schaubildern von Funktion und Ableitung	50
3.11 Ermittlung von Funktionsgleichungen	52
3.12 Extremwertaufgaben	54
3.13 Wachstum und Zerfall	56
4 Integralrechnung	58
4.1 Integrationsregeln („Aufleitungsregeln“)	58
4.2 Flächeninhaltsberechnung zwischen Schaubild und x -Achse	62
4.3 Flächeninhaltsberechnung zwischen zwei Schaubildern	64
4.4 Berechnung des Rotationsvolumens: Fläche zwischen Schaubild und x -Achse rotiert um die x -Achse	66
4.5 Berechnung des Rotationsvolumens: Fläche zwischen zwei Schaubildern	

	rotiert um die x -Achse	67
4.6	Mittelwert (durchschnittlicher y -Wert) einer Funktion	68
4.7	Flächen, die bis ins Unendliche reichen (Uneigentliche Integrale)	69
4.8	Zusatz: Wichtiges für Anwendungsorientierte Aufgaben	70
II.	Grundlagen Vektorgeometrie	73
1	Vorwissen	74
1.1	Punkte (im \mathbb{R}^3)	74
1.2	Vektoren (im \mathbb{R}^3)	74
1.3	Rechnen mit Vektoren (Addition, Subtraktion, Betrag, Skalare Multiplikation, Linearkombination, Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit, Skalarprodukt, Vektorprodukt)	75
2	Geraden	78
2.1	Geradengleichungen in Parameterform	78
2.2	Gegenseitige Lage von Geraden	80
3	Ebenen	82
3.1	Ebenengleichungen in Parameterform	82
3.2	Ebenengleichungen in Normalenform	84
3.3	Ebenengleichungen in Koordinatenform	86
3.4	Spurpunkte, Spurgeraden und die Lage im Koordinatensystem	87
3.5	Umwandlungen der Ebenenformen	88
4	Gegenseitige Lage	92
4.1	Ebene-Gerade	92
4.2	Ebene-Ebene	94
5	Schnittwinkel	97
6	Abstandsberechnungen	98
6.1	Abstände zu einem Punkt	99
6.2	Abstände zu einer Geraden	102
6.3	Abstände zu einer Ebene	103
7	Zusatz: Bewegungsaufgaben (Modellieren mit Vektoren)	104
8	Spiegelungen	106
III.	Grundlagen Stochastik	109
1	Baumdiagramm, Pfadregeln und Erwartungswert	110
1.1	Einführung	110
1.2	Aufgabentypen	113
1.3	Zufallsvariable und Erwartungswert	116
2	Binomialverteilung	120
2.1	Bernoulliformel	120

2.2	Binomialverteilung und kumulierte Binomialverteilung	122
2.3	Aufgabentypen	124
3	Der einseitige Hypothesentest	128
3.1	Ausführliche Erklärung	128
3.2	Vorgehen und Beispiele	129
IV. Basisübungen zur Analysis		135
1	Funktionen	136
2	Gleichungen	143
3	Differenzialrechnung	145
4	Integralrechnung	155
V. Ausführliche Lösungen		163

Vorwort

Liebe Schülerinnen und Schüler,

dieses Buch soll Sie dabei unterstützen,

- sich in den letzten beiden Schuljahren optimal auf Klausuren und auf das Abitur in Mathematik vorzubereiten.
- sich alle Lehrplaninhalte anhand verständlicher und übersichtlicher Stoffzusammenfassungen anzueignen.
- Ihr gewonnenes Wissen anhand von Basisübungen mit ausführlichen Lösungen schnell und prüfungsbezogen zu vertiefen.
- die Abituraufgaben der vergangenen Jahrgänge zu bearbeiten, da Sie hiermit ein Nachschlagewerk zur Verfügung haben.

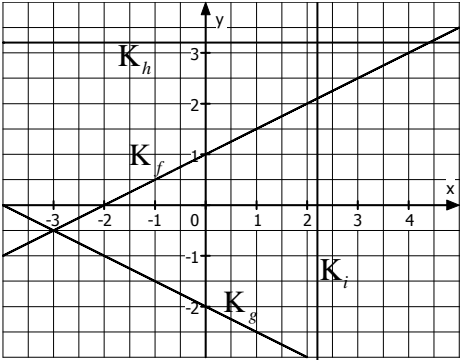
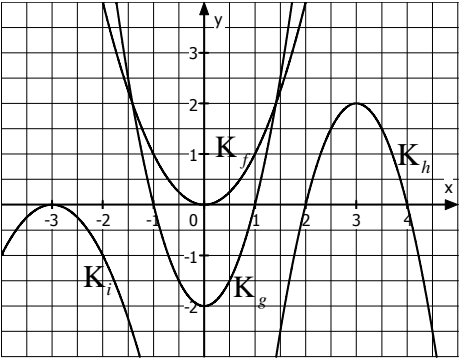
Liebe Fachkolleginnen und Fachkollegen,

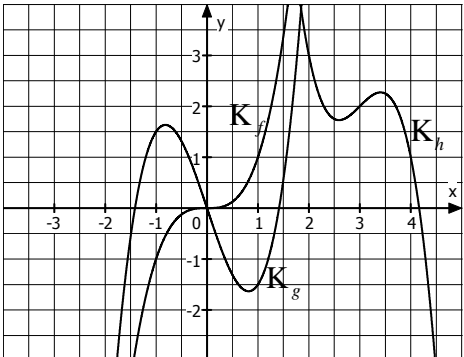
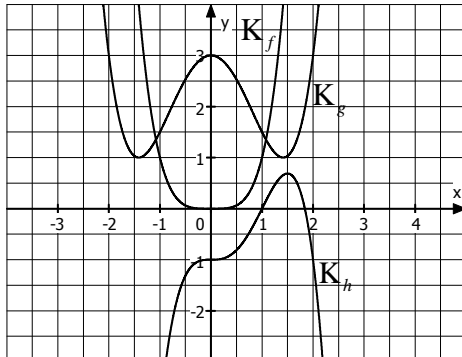
dieses Buch soll Sie dabei unterstützen,

- die zeitintensive Stoffwiederholung, Klausur- und Abiturvorbereitung teilweise aus dem Unterricht auslagern zu können.
- auf diese Weise mehr Zeit für verständnisorientierten Unterricht zu gewinnen.
- sicherzustellen, dass Ihre Schülerinnen und Schüler über ausreichendes Basiswissen verfügen.

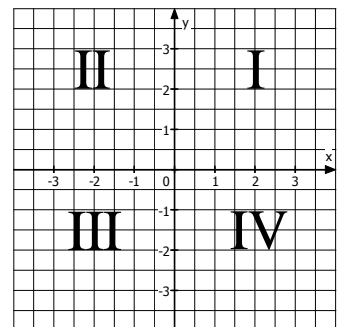
1. Funktionen

1.1 Ganzrationale Funktionen (Polynome)

1. Grades (Geraden)	2. Grades (Parabeln)
<p>Allg. Ansatz : $y = mx + b$</p> <p>Steigung aus 2 Punkten: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$</p> <p>Punkt-Steigungs-Form (PSF): $y = m \cdot (x - x_1) + y_1$</p> <p>Steigungswinkel aus Steigung bestimmen: $m = \tan(\alpha)$</p> <p>Parallele Geraden: $m_1 = m_2$ (gleiche Steigung)</p> <p>Senkrechte (orthogonale) Geraden: $m_2 = -1/m_1$ (Steigungen sind negative Kehrwerte voneinander) bzw. $m_1 \cdot m_2 = -1$</p> <p>1. Winkelhalbierende: $y = x$ 2. Winkelhalbierende: $y = -x$</p>  <p> $K_f: y = 0,5x + 1$ $K_g: y = -0,5x - 2$ $K_h: y = 3,2$ $K_i: x = 2,2$ </p>	<p>Allg. Ansatz: $f(x) = ax^2 + bx + c$</p> <p>Scheitelpunkt-Ansatz: $f(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$ mit $S(x_s y_s)$</p> <p>$a > 0$: nach oben geöffnet bzw. Verlauf von II nach I</p> <p>$a < 0$: nach unten geöffnet bzw. Verlauf von III nach IV</p> <p>Bei Symmetrie zur y-Achse: $f(x) = ax^2 + c$ (nur gerade Hochzahlen)</p>  <p> $K_f: f(x) = x^2$ $K_g: g(x) = 2x^2 - 2$ $K_h: h(x) = -2(x-3)^2 + 2$ $K_i: i(x) = -(x+3)^2$ </p>

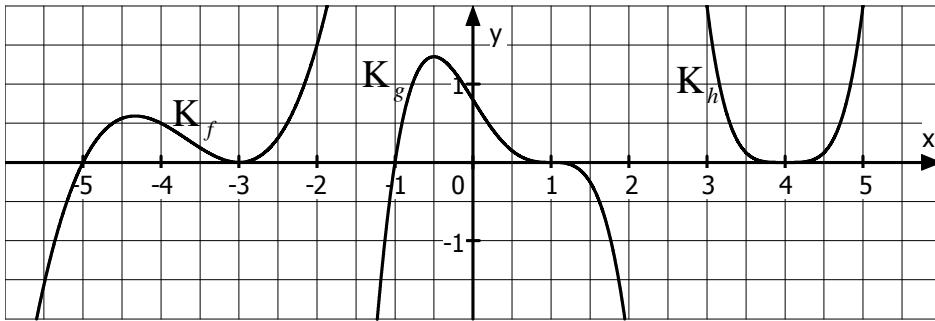
3. Grades	4. Grades
<p>Allg. Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$</p> <p>$a > 0$: Verlauf von III nach I</p> <p>$a < 0$: Verlauf von II nach IV</p> <p>Ansatz bei Symmetrie zum Ursprung: $f(x) = ax^3 + cx$ (nur ungerade Hochzahlen)</p>  <p>$K_f: f(x) = x^3$ $K_g: g(x) = 1,5x^3 - 3x$ $K_h: h(x) = -2x^3 + 18x^2 - 53x + 53$</p>	<p>Allg. Ansatz: $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$</p> <p>$a > 0$: Verlauf von II nach I</p> <p>$a < 0$: Verlauf von III nach IV</p> <p>Ansatz bei Symmetrie zur y-Achse: $f(x) = ax^4 + cx^2 + e$ (nur gerade Hochzahlen)</p>  <p>$K_f: f(x) = x^4$ $K_g: g(x) = 0,5x^4 - 2x^2 + 3$ $K_h: h(x) = -x^4 + 2x^3 - 1$</p>

Die Quadranten



1.2 Der Nullstellenansatz und die Vielfachheit von Nullstellen

Beispiele



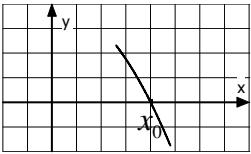
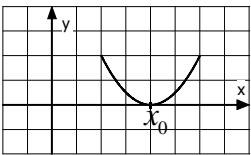
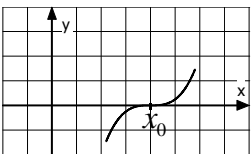
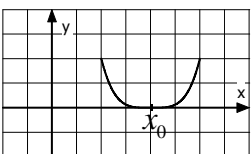
$K_f: f(x) = 0,5 \cdot (x+5) \cdot (x+3)^2$
 $K_g: g(x) = -0,8 \cdot (x+1) \cdot (x-1)^3$
 $K_h: h(x) = 2 \cdot (x-4)^4$

Aufbau des Nullstellenansatzes (am Beispiel)

$$g(x) = -0,8 \cdot (x+1) \cdot (x-1)^3$$

Verlauf von III nach IV
 $x_0 = -1$ ist einfache Nullstelle
 $x_{1/2/3} = +1$ ist dreifache Nullstelle

Übersicht (für ganzrationale Funktionen)

Vielfachheit Nullstelle	Faktor im Nullstellenansatz	Skizze	Beschreibung
Einfache Nullstelle: x_0	$f(x) = \dots \cdot (x - x_0) \cdot \dots$		Schaubild schneidet x -Achse (mit Vorzeichenwechsel VZW)
Doppelte Nullstelle: x_0	$f(x) = \dots \cdot (x - x_0)^2 \cdot \dots$		Schaubild berührt x -Achse (ohne VZW)
Dreifache Nullstelle: x_0	$f(x) = \dots \cdot (x - x_0)^3 \cdot \dots$		Schaubild schneidet und berührt x -Achse (mit VZW)
Vierfache Nullstelle: x_0	$f(x) = \dots \cdot (x - x_0)^4 \cdot \dots$		Schaubild berührt x -Achse (ohne VZW) („breiter“ geformt als doppelte Nullstelle)

1.3 Gebrochenrationale Funktionen

Allg. $f(x) = \frac{\text{Zähler: (ganzrationale) Funktion}}{\text{Nenner: (ganzrationale) Funktion}}$ Beispiel: $f(x) = \frac{1}{x-1}$ (mit $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$)

1. Untersuchung auf senkrechte Asymptoten

x -Werte, die im **Nenner** zum **Wert 0** führen, nennt man **Definitionslücken**. Solche x -Werte sind nicht in der Definitionsmenge der Funktion enthalten.

An einer Definitionslücke kann das Schaubild eine **senkrechte Asymptote** aufweisen.

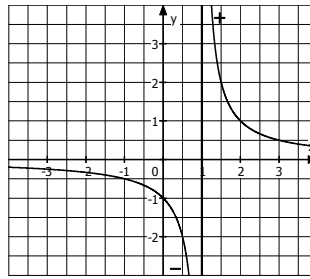
Fall 1: Polstelle mit Vorzeichenwechsel (einfache Nullstelle des Nenners)

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{x-1}$

Senkrechte Asymptote: $x = 1$

Für $x \rightarrow 1$ ($x < 1$) gilt: $f(x) \rightarrow -\infty$

Für $x \rightarrow 1$ ($x > 1$) gilt: $f(x) \rightarrow +\infty$



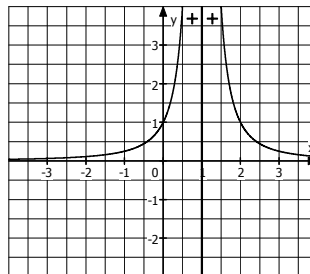
Fall 2: Polstelle ohne Vorzeichenwechsel (doppelte Nullstelle des Nenners)

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$

Senkrechte Asymptote: $x = 1$

Für $x \rightarrow 1$ ($x < 1$) gilt: $f(x) \rightarrow +\infty$

Für $x \rightarrow 1$ ($x > 1$) gilt: $f(x) \rightarrow +\infty$



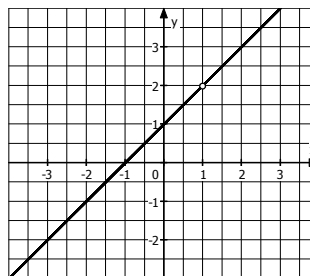
Fall 3 (Ausnahme): Keine Polstelle (auch Nullstelle des Zählers)

Beispiel: $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$

Keine senkrechte Asymptote (trotz Definitionslücke)

Grund: $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1) \cdot (x+1)}{(x-1)} = x+1$

Die Definitionslücke ist nach dem Kürzen „verschwunden“. Sie ist also (be-)hebbar. (Wobei die Ausgangsfunktion diese noch immer aufweist, siehe Schaubild.)

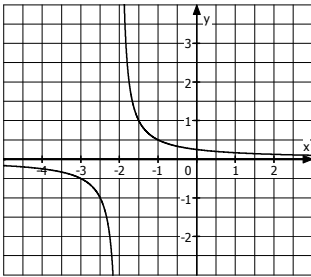


2. Untersuchung auf waagrechte Asymptoten (Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$)

Fall 1 : Zählergrad < Nennergrad : x - Achse ist waagrechte Asymptote

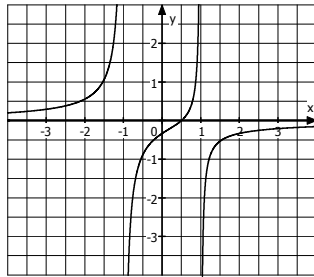
$$f(x) = \frac{1}{2x+4} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Grad 0} \\ \text{Grad 1} \end{array} \right)$$

waagrechte Asymptote: $y = 0$ (x -Achse)



$$f(x) = \frac{-2x+1}{3x^2-3} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Grad 1} \\ \text{Grad 2} \end{array} \right)$$

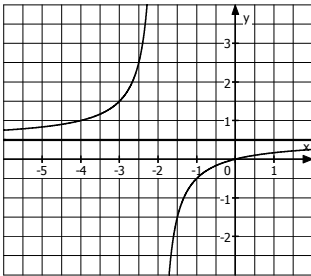
waagrechte Asymptote: $y = 0$ (x -Achse)



Fall 2 : Zählergrad = Nennergrad : Waagerechte Asymptote

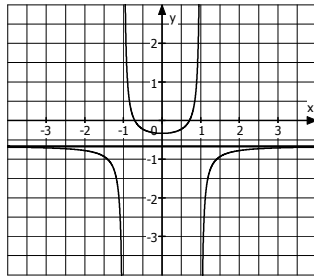
$$f(x) = \frac{1x}{2x+4} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Grad 1} \\ \text{Grad 1} \end{array} \right)$$

waagrechte Asymptote: $y = \frac{1}{2}$



$$f(x) = \frac{-2x^2+1}{3x^2-3} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Grad 2} \\ \text{Grad 2} \end{array} \right)$$

waagrechte Asymptote: $y = -\frac{2}{3}$

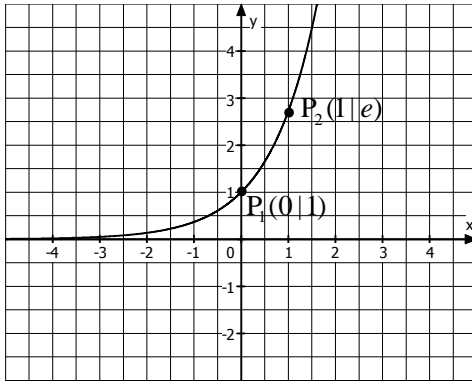


Fall 3 : Zählergrad > Nennergrad: Keine waagrechte Asymptote.

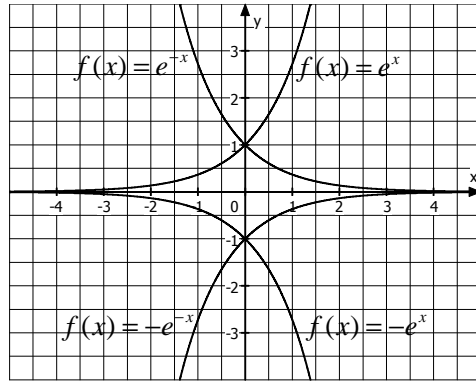
(Keine Beispiele, da nicht relevant für das Abitur.)

1.4 Exponentialfunktionen

1. Verlauf : $f(x) = e^x$



2. Spiegelungen



3. Koeffizienten in : $f(x) = a \cdot e^{b(x-c)} + d$

- | | |
|--|---|
| a - Streckung / Stauchung in y-Richtung | $a > 1$: „steiler“ |
| | $0 < a < 1$: „flacher“ |
| | $a < 0$: an der x-Achse gespiegelt |
| b - ansteigendes oder fallendes Schaubild | $b > 0$: ansteigendes Schaubild |
| | $b < 0$: fallendes Schaubild
(bzw. an der y-Achse gespiegelt) |
| c - Verschiebung in x-Richtung | $c > 0$: nach rechts |
| | $c < 0$: nach links |
| d - Verschiebung in y-Richtung | $d > 0$: nach oben |
| | $d < 0$: nach unten |

Vorsicht beim Koeffizienten c

Das Schaubild zu $f(x) = e^{x-3}$ wurde um 3 Einheiten nach *rechts* verschoben!

Der Koeffizient c hat hier den Wert $+3$, das Minuszeichen kommt vom allgemeinen Ansatz der Funktion.

Entsprechend $f(x) = e^{x+2}$: Verschiebung um 2 nach *links*!

4. Asymptoten (Naherungsgeraden)

Begriffserklärung: Eine Asymptote ist eine Gerade, an welche sich das Schaubild einer gegebenen Exponentialfunktion unendlich nah annähert, ohne sie jedoch zu „erreichen“.

Beispielsweise nähert sich das Schaubild der Funktion $f(x) = e^x$ bei negativen x -Werten ($x \rightarrow -\infty$) der x -Achse (Asymptotengleichung: $y = 0$) von oben an.

Beispielfunktion	Asymptote	Schaubilder
$f(x) = e^x$	$y = 0$ (x -Achse) für $x \rightarrow -\infty$	
$g(x) = e^x + 2,2$	$y = 2,2$ für $x \rightarrow -\infty$	
$h(x) = e^{-x} + 2,2$	$y = 2,2$ für $x \rightarrow +\infty$	
$i(x) = e^{-x} + x - 1$	$y = x - 1$ für $x \rightarrow +\infty$	
$j(x) = 0,5e^{x-2} + x - 1$	$y = x - 1$ für $x \rightarrow -\infty$	

Ausgehend von einer gegebenen Exponentialfunktion kann die zugehörige Asymptotengleichung und die Richtung, in welcher die Annäherung stattfindet, schnell durch die folgenden beiden Regeln bestimmt werden.

1. Regel (Asymptotengleichung): $y =$ „Exponentialgleichung ohne e^{-x} “

Man erhält die Asymptotengleichung, indem man die Gleichung der Exponentialfunktion schlicht übernimmt, jedoch hierbei auf den Summanden im Funktionsterm, der e^{-x} enthält (dieser strebt gegen 0), verzichtet.

2. Regel (Annaherungsrichtung): Bei e^{+x} für $x \rightarrow -\infty$ bzw. bei e^{-x} für $x \rightarrow +\infty$

Die Annaherungsrichtung wird durch den Summanden im Funktionsterm, der e^{-x} enthält, festgelegt: Steht vor dem x im Exponenten ein Pluszeichen, so nähert sich die Asymptote für große negative x -Werte („links“ im Koordinatensystem) dem Schaubild an.

Steht hier hingegen ein Minuszeichen, so findet die Annäherung bei großen positiven x -Werten („rechts“ im Koordinatensystem) statt.

5. Anwendungen

Wachstumsvorgänge werden oft mit dem Typ $f(x) = e^{+x}$ modelliert, Zerfallsvorgänge hingegen mit $f(x) = e^{-x}$.