Gruber I Neumann

Erfolg im Mathe-Abi 2017

Übungsbuch Prüfungsaufgaben
Berufliche Gymnasien
Baden-Württemberg
mit Tipps und Lösungen

Freiburger Verlag

Inhaltsverzeichnis

Erfolg von Anfang an

... ist das Geheimnis eines guten Abiturs.

Das vorliegende Übungsbuch ist speziell auf die Anforderungen des Mathematik-Abiturs an Beruflichen Gymnasien in Baden-Württemberg abgestimmt, welches sich ab 2017 grundlegend ändert: Neben einem hilfsmittelfreien Teil, in dem kleinere Aufgaben ohne viel Rechenaufwand zu lösen sind, gibt es einen Teil mit Hilfsmitteln, in dem eine spezielle Merkhilfe und ein wissenschaftlicher Taschenrechner verwendet werden dürfen. Dieses Übungsbuch umfasst die drei großen Themenbereiche Analysis, Stochastik und Lineare Algebra (Vektorgeometrie und Matrizen) und ist für alle beruflichen Gymnasien geeignet. Daneben gibt es vom Freiburger Verlag noch ein Übungsbuch für das grundlegende Wissen für den hilfsmittelfreien Teil sowie Lernkarten, um die wesentlichen Begriffe und Rechenverfahren auf sinnvolle und effektive Art und Weise zu lernen. Die Übungsbücher fördern das Grundwissen und die Grundkompetenzen in Mathematik, vom einfachen Rechnen bis hin zum Verstehen von gedanklichen Zusammenhängen. Die Übungsbücher sind eine Hilfe zum Selbstlernen (learning by doing) und bieten die Möglichkeit, sich intensiv auf die Prüfungen vorzubereiten und gezielt Themen zu vertiefen. Hat man Erfolg bei den grundlegenden Aufgaben, machen Mathematik und das Lernen mehr Spaß.

Bei einigen Aufgaben ist es nötig, den Taschenrechner zu benutzen. Nicht bei allen Rechnerfunktionen ist gleich klar, wie sie aufgerufen werden.

Daher befinden sich im Buch QR-Codes für die entsprechenden Videos, in denen die Funktionen des Tachenrechners kurz erklärt werden. Der QR-Code kann mit einer entsprechenden App gescannt werden. Alternativ lässt sich auch der Link unter dem Code benutzen.

Der Code neben diesem Text verweist beispielsweise auf ein Video zum Bestimmen der kumulierten Binomialverteilung.

frv.tv/df

Der blaue Tippteil

Hat man keine Idee, wie man eine Aufgabe angehen soll, hilft der blaue Tippteil zwischen Aufgaben und Lösungen weiter: Zu jeder Aufgabe gibt es Tipps, die helfen, einen Ansatz zu finden, ohne die Lösung vorwegzunehmen.

Der Ablauf der Abiturprüfung

Die Prüfung dauert 270 Minuten, also 4,5 Stunden.
Zu Beginn der Prüfung bearbeiten alle Schülerinnen und Schüler den hilfsmittelfreien Aufgabenteil.
Nach der Abgabe des hilfsmittelfreien Teils erhalten die Schülerinnen und Schüler die Aufgaben mit Hilfsmittel, zu denen Ihnen die Merkhilfe und der Taschenrechner ausgehändigt werden.

Die Abiturprüfung besteht aus **vier Teilen:**

- Teil 1: Hilfsmittelfreier Teil,
- Teil 2: Analysis,
- Teil 3: Stochastik,
- Teil 4: Lineare Algebra (Vektorgeometrie oder Matrizen).

Der hilfsmittelfreie Teil sowie eine innermathematische Aufgabe aus Teil 2 ist von allen Schülerinnen und Schülern zu bearbeiten, eine anwendungsbezogene Aufgabe aus Teil 2 und eine Stochastik-Aufgabe aus Teil 3 können die Schülerinnen und Schüler selbst wählen. Im Teil 4 wird die Aufgabe durch die Lehrkraft ausgewählt. Insgesamt können 90 Punkte erreicht werden.

	Punkte	Aufgabe	Wahlmöglichkeiten
Teil 1	30	Hilfsmittelfreier Teil Analysis (50%), Stochastik (25%), Vektorgeometrie oder Matrizen (25%)	keine
Teil 2	20 10	Analysis Anwendungsorientierte Analysis	keine SchülerIn wählt eine aus drei vorgelegten Aufgaben aus
Teil 3	15	Stochastik	SchülerIn wählt eine aus zwei vorgelegten Aufgaben aus
Teil 4	15	Lineare Algebra: Vektorgeometrie oder Matrizen	keine

Allen SchülerInnen, die sich auf das Abitur vorbereiten, wünschen wir viel Erfolg.

Helmut Gruber, Robert Neumann

1 . Musteraufgabensatz

Tipps ab Seite 74, Lösungen ab Seite 111

Teil 1 ohne Hilfsmittel

1 Analysis

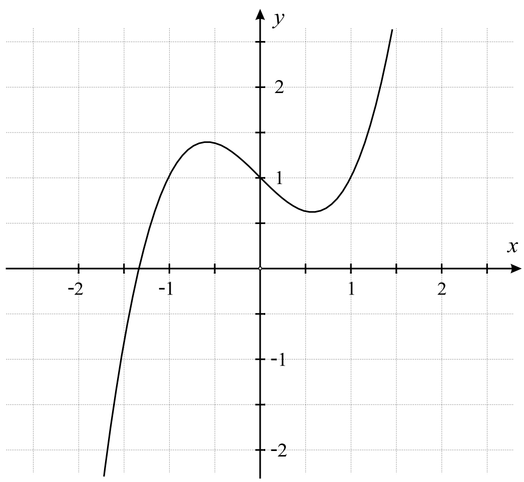
1.1 Eine Funktion f hat folgende Eigenschaften:

(1) $f(2) = 1$
(2) $f'(2) = 0$
(3) $f''(4) = 0$ und $f'''(4) \neq 0$
(4) Für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ gilt: $f(x) \to 5$

Beschreiben Sie für jede dieser vier Eigenschaften, welche Bedeutung sie für den Graphen von f hat und skizzieren Sie einen möglichen Verlauf des Graphen.

1.2 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$; $x \in \mathbb{R}$.
Geben Sie die Periode von f an und skizzieren Sie das Schaubild von f für $0 \leqslant x \leqslant 4$.
Bestimmen Sie eine mögliche Lösung der Gleichung $\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) = -1$.

1.3 Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f, g und h mit
$f(x) = x^2 - x + 1$, $g(x) = x^3 - x + 1$ und $h(x) = x^4 + x^2 + 1$.



a) Die Abbildung zeigt den Graphen einer der drei Funktionen. Geben Sie an, um welche Funktion es sich handelt. Begründen Sie, dass der Graph die anderen beiden Funktionen nicht darstellt.

b) Die erste Ableitung von h ist h'.
Bestimmen Sie den Wert von $\int_0^1 h'(x)\mathrm{d}x$.

1.4 Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = e^x$ und $g(x) = -e^{-x} + 2$.

a) Beschreiben Sie, wie der Graph von g aus dem Graphen von f entsteht.

b) Zeigen Sie, dass sich die Graphen von f und g im Punkt $\mathrm{P}(0 \mid 1)$ berühren.

2 Stochastik

2.1 An einem Spielautomaten verliert man durchschnittlich zwei Drittel aller Spiele. Formulieren Sie ein Ereignis A, für das gilt:

$$\mathrm{P(A)} = \binom{10}{8} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^8 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 10 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^9 \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^{10}$$

2.2 In einer Lostrommel sind 3 Gewinne und 7 Nieten. Eine Person kauft 3 Lose. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau 2 Gewinne gezogen werden.

2.3 Ein Glücksrad wird für ein Glücksspiel verwendet. Ein Spieler stellt hierzu folgende Rechnung auf:

$$\begin{aligned} \mathrm{E(X)} &= \mathrm{x_1 \cdot P(x_1) + x_2 \cdot P(x_2) + x_3 \cdot P(x_3) + x_4 \cdot P(x_4)} \\ &= 1\,€ \cdot \frac{1}{2} + 2\,€ \cdot \frac{1}{4} + 4\,€ \cdot \frac{1}{8} + 6\,€ \cdot \frac{1}{8} \end{aligned}$$

a) Beschreiben Sie, wie das zugehörige Glücksrad aussehen könnte.

b) Wie hoch müsste der Einsatz des Spielers sein, damit das Spiel fair ist?

3 Lineare Algebra: Wahlgebiet Vektorgeometrie (AG, BTG, SGG, TG, WG)

3.1 Gegeben sind die Ebenen $\mathrm{E}\colon\ x_1 + x_2 = 4$ und $\mathrm{F}\colon\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$.
Stellen Sie die beiden Ebenen in einem gemeinsamen Koordinatensystem dar und geben Sie eine Gleichung der Schnittgeraden von E und F an.

3.2 Die Ebene E geht durch die Punkte $\mathrm{A}(1{,}5 \mid 0 \mid 0)$, $\mathrm{B}(0 \mid 3 \mid 0)$ und $\mathrm{C}(0 \mid 0 \mid 6)$.

Untersuchen Sie, ob die Gerade $g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}$ parallel zur Ebene E verläuft.

3.3 Gegeben ist das Viereck ABCD mit den Eckpunkten $A\,(1 \mid 1 \mid 1)$, $B\,(-2 \mid 2 \mid 5)$, $C\,(3 \mid -3 \mid 5)$ und $D\,(6 \mid -4 \mid 1)$.
Weisen Sie nach, dass das Viereck ein Parallelogramm, aber kein Rechteck ist.

4. Lineare Algebra: Wahlgebiet Matrizen (AG, BTG, SGG, WG)

4.1 Gegeben ist die Matrix A durch $A = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Lösen Sie die Gleichung $(2A - E) \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, wobei E die Einheitsmatrix ist.

4.2 In einer Kantine werden zwei Menüs angeboten, ein vegetarisches Menü und ein Menü mit Fleisch.
70% der Personen, die das vegetarische Menü wählen, essen am nächsten Tag auch vegetarisch, während 20% der Personen, die das Menü mit Fleisch wählen, am folgenden Tag das vegetarische Menü wählen.

a) Zeichnen Sie ein Übergangsdiagramm und vervollständigen Sie die Übergangsmatrix $M = \begin{pmatrix} ... & ... \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}$.

b) Interpretieren Sie die Bedeutung des Werts $a_{22} = 0,55$ der Matrix

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,45 \\ 0,3 & 0,55 \end{pmatrix}$$

im Sachzusammenhang.

Tipps

Das Vektorprodukt

Wenn man einen Vektor $\vec{n}$ sucht, der senkrecht auf zwei gegebenen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht (der Normalenvektor), geschieht dies einfach und schnell mit dem Vektorprodukt:

$$\vec{n} = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \begin{pmatrix} a_2 b_3 & - & a_3 b_2 \\ a_3 b_1 & - & a_1 b_3 \\ a_1 b_2 & - & a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Die Merkhilfe dazu:

1. Beide Vektoren werden je zweimal untereinandergeschrieben, dann werden die erste und die letzte Zeile gestrichen.
2. Anschließend wird «über Kreuz» multipliziert. Dabei erhalten die abwärts gerichteten Pfeile ein positives und die aufwärts gerichteten Pfeile ein negatives Vorzeichen.
3. Die einzelnen Komponenten werden subtrahiert – fertig!

$$\begin{array}{cc} \cancel{a_1} & \cancel{b_1} \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \cancel{a_3} & \cancel{b_3} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Anmerkung: Der Betrag des senkrecht stehenden Vektors entspricht genau der Flächenmaßzahl des Parallelogramms, das von den beiden Vektoren aufgespannt wird.

Beispiel: Sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, ergibt sich für den gesuchten Vektor:

$$\begin{array}{cc} \cancel{1} & \cancel{-1} \\ 3 & 4 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 3 & 4 \\ \cancel{2} & \cancel{0} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cc} 3 & 4 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \cdot 0 - 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 4 - 3 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

1. Musteraufgabensatz

Teil 1 ohne Hilfsmittel

1 Analysis

1.1 Überlegen Sie, welcher Punkt auf dem Graphen von f liegt, wo der Graph von f eine waagrechte Tangente oder einen Wendepunkt hat und ob es eine waagrechte Asymptote gibt.
Verwenden Sie zum Skizzieren die gegebenen Eigenschaften.

1.2 Die Periode p von f erhalten Sie durch $p = \frac{2\pi}{b}$. Skizzieren Sie damit das Schaubild von f. Zur Lösung der gegebenen Gleichung substituieren Sie $\frac{\pi}{2}x = z$ und lösen die Gleichung $\sin(z) = -1$ nach z auf. Durch Resubstitution erhalten Sie eine Lösung für x.

1.3 a) Beachten Sie die Anzahl der Extrempunkte, die Symmetrie und das Verhalten der Graphen für $x \to \pm\infty$.

b) Das angegebene Integral erhalten Sie mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung. Verwenden Sie die angegebene Funktion h als Stammfunktion.

1.4 a) Überlegen Sie, wie der Graph von e^{-x} aus dem Graph von e^{x} hervorgeht und welche Bedeutung das Minuszeichen vor e^{-x} sowie die Zahl (+2) haben.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Kettenregel die 1. Ableitung von $f(x)$ und $g(x)$ und berechnen Sie $f(0)$, $g(0)$, $f'(0)$ und $g'(0)$.

2 Stochastik

2.1 Beachten Sie, dass es sich um ein Bernoulli-Experiment handelt, da es nur zwei verschiedene Ausgänge bei einem Spiel gibt. Geben Sie die Trefferwahrscheinlichkeit p für das Verlieren eines Spiels an und legen Sie X als Zufallsvariable für die Anzahl der verlorenen Spiele fest.
Um ein Ereignis A anzugeben, formen Sie die Wahrscheinlichkeit so um, dass bei jedem Summanden die Bernoulli-Formel $\mathrm{P(X = k)} = \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{k}} \cdot \mathrm{p^k} \cdot (1-\mathrm{p})^{\mathrm{n-k}}$ sichtbar wird. Bestimmen Sie anschließend die Anzahl der Spiele n und die Anzahl der verlorenen Spiele k.

2.2 Zeichnen Sie ein Baumdiagramm mit den Ästen Gewinn (g) und Niete (n). Beachten Sie, dass sich beim Ziehen ohne Zurücklegen die Wahrscheinlichkeiten bei jedem Ziehen ändern. Überlegen Sie, welche Ergebnisse zum gesuchten Ereignis gehören und verwenden Sie die Pfadregeln.

2.3 a) Überlegen Sie, wie groß die Mittelpunktswinkel aufgrund der angegebenen Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Sektoren sein müssen und welche Beträge auf den Sektoren stehen.

b) Den Erwartungswert E von X (Zufallsvariable für die Höhe des Gewinns) erhalten Sie, indem Sie die möglichen Auszahlungsbeträge mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten multiplizieren und den Einsatz x subtrahieren. Ein Spiel ist fair, wenn gilt: $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = 0$. Stellen Sie eine Gleichung auf und lösen Sie diese.

3 Lineare Algebra: Wahlgebiet Vektorgeometrie (AG, BTG, SGG, TG, WG)

3.1 Um die beiden Ebenen in einem gemeinsamen Koordinatensystem darzustellen, bestimmen Sie die jeweiligen Spurpunkte. Dazu setzen Sie jeweils zwei Koordinaten gleich Null. Bei einem Widerspruch ist die Ebene parallel zu der entsprechenden Koordinatenachse.
Eine Gleichung der Schnittgeraden s von E und F erhalten Sie, indem Sie die Gleichung durch die berechneten Spurpunkte aufstellen. Alternativ können Sie auch das lineare Gleichungssystem, welches aus den beiden Ebenengleichungen besteht, lösen. Wählen Sie z.B. $x_2 = t$ und berechnen Sie x_1 und x_3 in Abhängigkeit von t. Schreiben Sie das erhaltene Ergebnis als Geradengleichung.

3.2 Bestimmen Sie mit Hilfe des Vektorprodukts zweier Verbindungsvektoren der drei Punkte von E einen Normalenvektor $\vec{n}$ von E.
Prüfen Sie, ob das Skalarprodukt von $\vec{n}$ mit dem Richtungsvektor der Geraden g Null ergibt.

3.3 Skizzieren Sie das Viereck ABCD. Um nachzuweisen, dass das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist, bestimmen Sie die Verbindungsvektoren der Seiten des Vierecks. Falls gegenüberliegende Vektoren gleich sind, handelt es sich um ein Parallelogramm.
Um zu zeigen, dass das Viereck ABCD kein Rechteck ist, prüfen Sie mit Hilfe des Skalarprodukts zweier Verbindungsvektoren anliegender Seiten, ob ein rechter Winkel vorhanden ist. Falls das Ergebnis ungleich Null ist, gibt es keinen rechten Winkel.

4 Lineare Algebra: Wahlgebiet Matrizen (AG, BTG, SGG, WG)

4.1 Berechnen Sie mit $\mathrm{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ die Matrix $2\mathrm{A} - \mathrm{E}$. Multiplizieren Sie die erhaltene Matrix mit $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Lösen Sie das entstandene lineare Gleichungssystem.

4.2 a) Bezeichnen Sie mit F: Menü mit Fleisch und mit V: vegetarisches Menü. Beachten Sie, dass die Summe der Übergänge jeweils 1 ergeben muss. Beachten Sie, dass bei der Übergangsmatrix die Spaltensummen jeweils 1 ergeben müssen.

b) Überlegen Sie, welche Bedeutung M^2 hat und welchen Übergang der Wert a_{22} angibt.

Teil 2 Aufgabe 1

1.1.1 Beachten Sie, dass der Graph von g eine Parabel ist. Überlegen Sie, welche Steigung eine Stammfunktion von g an bestimmten Punkten hat und welcher Art der Extrempunkt des Graphen der Stammfunktion ist (Hoch- oder Tiefpunkt), wenn g einen Vorzeichenwechsel an einer Nullstelle hat.

1.1.2 Zur Beschriftung der Achsen berechnen Sie die Koordinaten des Extrempunkts mit Hilfe der 1. Ableitung. Alternativ können Sie auch eine Wertetabelle aufstellen.

1.1.3 Den Flächeninhalt A der Fläche zwischen dem Graphen von g und der positiven x-Achse erhalten Sie durch Integration über eine Stammfunktion von g; die Integrationsgrenzen sind dabei die Nullstellen von g.

1.2.1 Eine allgemeine Kosinusfunktion hat die Form $f(x) = a \cdot \cos(b \cdot (x - c)) + d$.
Dabei gibt a die Streckung in y-Richtung, b die Streckung/Stauchung in x-Richtung, c die Verschiebung in x-Richtung und d die Verschiebung in y-Richtung an. Die Periode p ergibt sich durch $p = \frac{2\pi}{b}$. Überlegen Sie, was beim vorliegenden Fall zutrifft. Fertigen Sie damit eine Zeichnung an.

1.2.2 Die Nullstellen von h für $0 \leqslant x \leqslant 4$ erhalten Sie durch Lösen der Gleichung $h(x) = 0$. Substituieren Sie $\frac{\pi}{2}x = z$ und lösen Sie die entstandene Gleichung nach z auf. Durch Resubstitution erhalten Sie die gesuchten x-Werte.
Alternativ können Sie die Nullstellen auch an der Zeichnung (falls vorhanden) ablesen und rechnerisch nachweisen.

Teil 2 Aufgabe 2

2.1 Setzen Sie $t = 1$ in $v(t)$ ein. Beachten Sie, dass das Ergebnis die Einheit $\frac{\text{m}}{\text{min}}$ hat und rechnen Sie das erhaltene Ergebnis in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ um.

2.2 Die Strecke s, die das Motorboot in den ersten zwei Minuten zurücklegt, erhalten Sie mit Hilfe eines Integrals: $s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,\mathrm{d}t$.

1 . Musteraufgabensatz

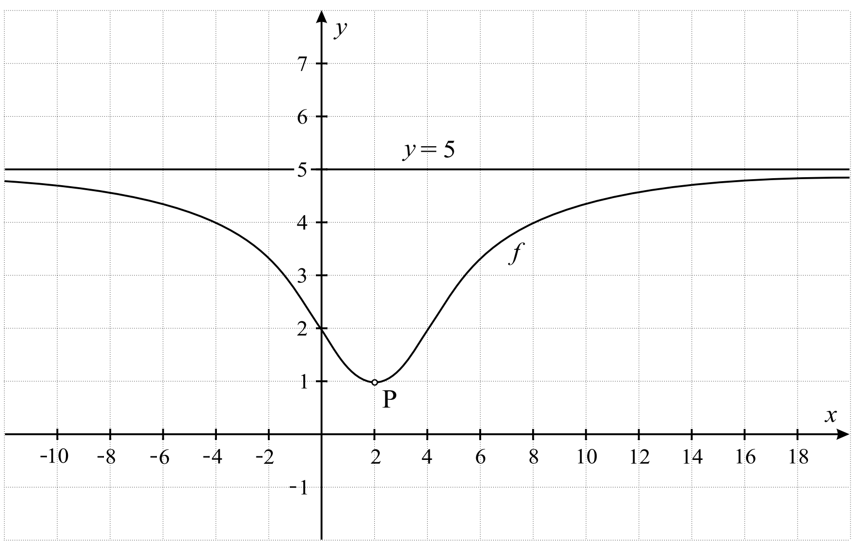
Teil 1 ohne Hilfsmittel

1 Analysis

1.1 Die genannten Eigenschaften haben die folgenden Bedeutungen:

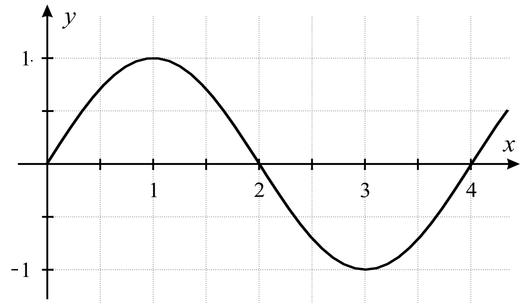
- Die Eigenschaft (1) $f(2) = 1$ bedeutet, dass der Gaph von f durch den Punkt $\mathrm{P}\,(2 \mid 1)$ geht.
- Die Eigenschaft (2) $f'(2) = 0$ bedeutet, dass der Graph von f an der Stelle $x = 2$, d.h. im Punkt $\mathrm{P}\,(2 \mid 1)$, eine waagrechte Tangente hat.
- Die Eigenschaft (3) $f''(4) = 0$ und $f'''(4) \neq 0$ bedeutet, dass der Graph von f an der Stelle $x = 4$ einen Wendepunkt besitzt.
- Die Eigenschaft (4) für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ gilt $f(x) \to 5$ bedeutet, dass der Graph von f eine waagerechte Asymptote mit der Gleichung $y = 5$ für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ hat.

  Damit kann man den Graphen von f etwa folgendermaßen skizzieren:



1.2 Es ist $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$; $x \in \mathbb{R}$.
Die Periode p von f erhält man durch $p = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 2\pi \cdot \frac{2}{\pi} = 4$.

Damit erhält man folgendes Schaubild von f:



Eine Lösung der Gleichung $\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) = -1$ erhält man durch Substitution:
Setzt man $\frac{\pi}{2}x = z$, so ergibt sich: $\sin(z) = -1$ mit der möglichen Lösung $z = \frac{3}{2}\pi$.

Durch Resubstitution erhält man: $\frac{\pi}{2}x = \frac{3}{2}\pi \;\Rightarrow\; x = 3$.

Eine mögliche Lösung der Gleichung $\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) = -1$ ist somit $x = 3$.

1.3 Gegeben sind $f(x) = x^2 - x + 1$, $g(x) = x^3 - x + 1$ und $h(x) = x^4 + x^2 + 1$.

a) Bei der gegebenen Abbildung handelt es sich um den Graphen der Funktion g.
Es kann nicht der Graph von f sein, da der Graph von f eine Parabel ist, welche nur einen Extrempunkt besitzt.
Es kann nicht der Graph von h sein, da die y-Werte des Graphen von h für $x \to \pm\infty$ gegen $+\infty$ gehen. Außerdem ist der Graph von h achsensymmetrisch zur y-Achse, da nur gerade Potenzen vorkommen.

b) Das angegebene Integral erhält man mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung. Als Stammfunktion verwendet man die gegebene Funktion h:

$$\begin{aligned}\int_0^1 h'(x)\mathrm{d}x &= \Big[h(x)\Big]_0^1 \\ &= \Big[x^4 + x^2 + 1\Big]_0^1 \\ &= \left(1^4 + 1^2 + 1\right) - \left(0^4 - 0^2 + 1\right) \\ &= 2\end{aligned}$$

1.4 a) Wegen $g(x) = -f(-x) + 2$ entsteht der Graph von g aus dem Graph von f durch Spiegelung an der x-Achse, durch Spiegelung an der y-Achse und durch Verschiebung um 2 LE in y-Richtung.

b) Um zu zeigen, dass sich die Graphen von f und g in $\mathrm{P}(0 \mid 1)$ berühren, muss man nachweisen, dass $\mathrm{P}(0 \mid 1)$ auf beiden Graphen liegt (für $x = 0$ müssen also beide y-Werte gleich 1 sein) und dass die Steigung der Tangente in P bei beiden Graphen gleich ist.

Hierzu setzt man den Wert $x = 0$ in $f(x) = e^x$ und $g(x) = -e^{-x} + 2$ bzw. $f'(x) = e^x$ und $g'(x) = -e^{-x} \cdot (-1) = e^{-x}$ ein:

$$\begin{aligned} f(0) &= e^0 = 1 & f'(0) &= e^0 = 1 \\ g(0) &= -e^{-0} + 2 = -1 + 2 = 1 & g'(0) &= e^{-0} = 1 \end{aligned}$$

Wegen $f(0) = g(0) = 1$ liegt $\mathrm{P}(0 \mid 1)$ auf beiden Graphen.
Wegen $f'(0) = g'(0) = 1$ sind die Tangentensteigungen in P gleich.
Damit berühren sich die Graphen von f und g in $\mathrm{P}(0 \mid 1)$.

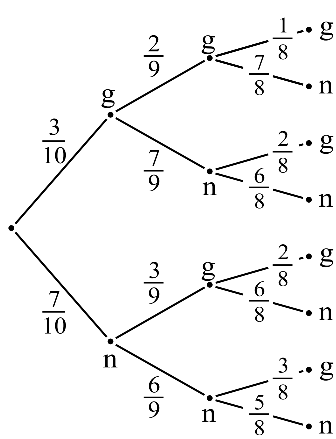
2 Stochastik

2.1 Beim Spiel an einem Spielautomaten gibt es nur die beiden Ausgänge «gewinnen» oder «verlieren», also handelt es sich um ein Bernoulli-Experiment. Da man durchschnittlich zwei Drittel aller Spiele verliert, gilt $\mathrm{p} = \frac{2}{3}$ für das Verlieren eines Spiels.
Es sei X die Zufallsvariable für die Anzahl der verlorenen Spiele.
Um ein Ereignis A anzugeben, formt man die gegebene Wahrscheinlichkeit um:

$$\begin{aligned} \mathrm{P(A)} &= \binom{10}{8} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^8 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 10 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^9 \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^{10} \\ &= \binom{10}{8} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^8 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \binom{10}{9} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \binom{10}{10} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{10} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \\ &= \mathrm{P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)} \\ &= \mathrm{P(X \geqslant 8)} \end{aligned}$$

Damit lautet das Ereignis A: «Von 10 Spielen werden mindestens 8 Spiele verloren».

2.2



Da 3 Gewinne und 7 Nieten, also insgesamt 10 Lose in der Lostrommel sind, betragen die Wahrscheinlichkeiten beim 1. Ziehen für Gewinn (g): $\frac{3}{10}$ und für Niete (n): $\frac{7}{10}$.
Danach sind nur noch 9 Lose in der Trommel und die Wahrscheinlichkeiten bei der 2. und 3. Ziehung hängen jeweils davon ab, was beim 1. bzw. 2. Mal gezogen wurde.

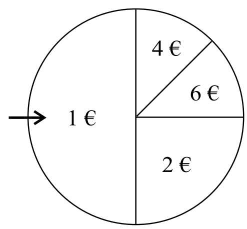
Die Wahrscheinlichkeit, dass genau zwei Gewinne gezogen werden, erhält man mit Hilfe der 1. und 2. Pfadregel (Produkt- und Summenregel):

$$\begin{aligned}
P(\text{«genau zwei Gewinne»}) &= P(ggn) + P(gng) + P(ngg) \\
&= \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{7}{8} + \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{2}{8} + \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \\
&= 3 \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{7}{8} \\
&= \frac{7}{40}
\end{aligned}$$

2.3 a) Aufgrund der gegebenen Rechnung

$$\begin{aligned}
E(X) =& x_1 \cdot P(x_1) + x_2 \cdot P(x_2) + x_3 \cdot P(x_3) + x_4 \cdot P(x_4) \\
=& 1\,€ \cdot \frac{1}{2} + 2\,€ \cdot \frac{1}{4} + 4\,€ \cdot \frac{1}{8} + 6\,€ \cdot \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

könnte das Glücksrad 4 Sektoren mit den Wahrscheinlichkeiten $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ und $\frac{1}{8}$ haben. Diese entsprechen den Mittelpunktswinkeln 180°, 90°, 45° und 45°.
Damit ergibt sich folgendes Glücksrad:



b) Sei X Zufallsvariable für die Höhe des Gewinns und x der Einsatz des Spielers. Den Erwartungswert von X erhält man, indem man die möglichen Auszahlungsbeträge mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten multipliziert und den Einsatz x subtrahiert:

$$E(X) = 1\,€ \cdot \frac{1}{2} + 2\,€ \cdot \frac{1}{4} + 4\,€ \cdot \frac{1}{8} + 6\,€ \cdot \frac{1}{8} - x\,€ = 2{,}25 - x\,€$$

Damit das Spiel fair ist, muss gelten: $E(X) = 0$. Dies führt zu folgender Gleichung:

$$E(X) = 0 \;\Rightarrow\; 2{,}25 - x = 0 \;\Rightarrow\; x = 2{,}25$$

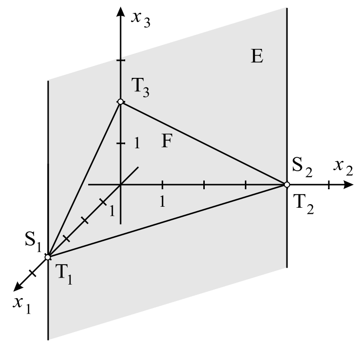
Der Einsatz des Spielers muss $2{,}25$ € betragen.

3 Lineare Algebra: Wahlgebiet Vektorgeometrie (AG, BTG, SGG, TG, WG)

3.1 Gegeben sind die Ebenen E: $x_1 + x_2 = 4$ und F: $x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$. Um die beiden Ebenen in einem gemeinsamen Koordinatensystem darzustelllen, bestimmt man die jeweiligen Spurpunkte. Dazu setzt man jeweils zwei Koordinaten gleich Null.

Für die Ebene E ergeben sich die Spurpunkte $S_1\,(4\,|\,0\,|\,0)$ und $S_2\,(0\,|\,4\,|\,0)$, einen Spurpunkt auf der x_3-Achse ergibt sich aufgrund des Widerspruchs $0 = 4$ nicht, also ist die Ebene E parallel zur x_3-Achse.

Für die Ebene F ergeben sich die Spurpunkte $T_1\,(4\,|\,0\,|\,0)$, $T_2\,(0\,|\,4\,|\,0)$ und $T_3\,(0\,|\,0\,|\,2)$.



Eine Gleichung der Schnittgeraden s von E und F erhält man, indem man die Gleichung durch die Punkte $S_1\,(4\,|\,0\,|\,0)$ und $S_2\,(0\,|\,4\,|\,0)$ bzw. $T_1\,(4\,|\,0\,|\,0)$ und $T_2\,(0\,|\,4\,|\,0)$ aufstellt:

$$s\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Alternativ kann man auch das lineare Gleichungssystem, welches durch die beiden Ebenengleichungen entsteht, lösen:

$$\begin{array}{lccccccc} \text{I} & x_1 & + & x_2 & & & = & 4 \\ \text{II} & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \end{array}$$

Wählt man in Gleichung I $x_2 = t$, so ergibt sich: $x_1 + t = 4 \;\Rightarrow\; x_1 = 4 - t$.
Setzt man $x_1 = 4 - t$ und $x_2 = t$ in Gleichung II ein, erhält man:

$$4 - t + t + 2x_3 = 4 \;\Rightarrow\; x_3 = 0$$

Damit kann man die Gleichung der Schnittgeraden s von E und F aufstellen:

$$s\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3.2 Um zu untersuchen, ob die Gerade $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$; $t \in \mathbb{R}$ parallel zur Ebene E durch die Punkte $A\,(1{,}5\,|\,0\,|\,0)$, $B\,(0\,|\,3\,|\,0)$ und $C\,(0\,|\,0\,|\,6)$ verläuft, prüft man, ob das Skalarprodukt eines Normalenvektors der Ebene E und des Richtungsvektors der Geraden g Null ergibt.

Einen Normalenvektor $\vec{n}$ von E bestimmt man z.B. mit Hilfe des Vektorprodukts der beiden Spannvektoren $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1,5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1,5 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$:

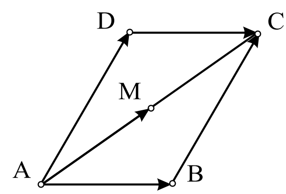
$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1,5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1,5 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 9 \\ 4,5 \end{pmatrix} = 4,5 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmt man das Skalarprodukt von $\vec{n}$ und dem Richtungsvektor $\vec{r_g}$ der Geraden g, erhält man:

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{r_g} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 4 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 0$$

Da das Skalarprodukt von $\vec{n}$ und $\overrightarrow{r_g}$ Null ergibt, sind die Ebene E und die Gerade g parallel zueinander.

3.3 Gegeben ist das Viereck ABCD mit den Eckpunkten A $(1 \mid 1 \mid 1)$, B $(-2 \mid 2 \mid 5)$, C $(3 \mid -3 \mid 5)$ und D $(6 \mid -4 \mid 1)$. Um nachzuweisen, dass das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist, bestimmt man die Verbindungsvektoren der Seiten des Vierecks:



$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wegen $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ und $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ handelt es sich um ein Parallelogramm.

Um zu zeigen, dass das Viereck ABCD kein Rechteck ist, prüft man mit Hilfe des Skalarprodukts zweier Verbindungsvektoren anliegender Seiten, ob ein rechter Winkel vorhanden ist, z.B.:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = (-3) \cdot 5 + 1 \cdot (-5) + 4 \cdot 0 = -20 \neq 0$$

Wegen $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} \neq 0$ ist bei Punkt B kein rechter Winkel vorhanden, sodass es sich nicht um ein Rechteck handelt.

4 Lineare Algebra: Wahlgebiet Matrizen (AG, BTG, SGG, WG)

4.1 Es ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ und $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Die Gleichung $(2A - E) \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ führt zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe der Matrizenmultiplikation ergibt sich folgendes lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrcrcl} \text{I} & x_1 & + & x_2 & = & 3 \\ \text{II} & 4x_1 & - & 3x_2 & = & 5 \end{array}$$

Addiert man das (-4)-fache von Gleichung I zu Gleichung II, erhält man:

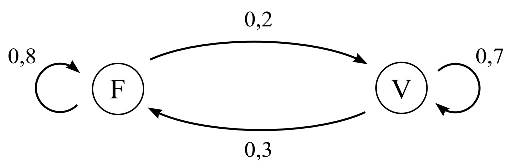
$$-4x_2 + (-3x_2) = -7 \Rightarrow x_2 = 1$$

Setzt man $x_2 = 1$ in Gleichung I ein, ergibt sich:

$$x_1 + 1 = 3 \Rightarrow x_1 = 2$$

Somit erhält man die Lösung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4.2 a) Da 70% der Personen, die das vegetarische Menü wählen, am folgenden Tag auch vegetarisch essen, wechseln 30% zum Menü mit Fleisch. Da 20% der Personen, die das Menü mit Fleisch wählen, am folgenden Tag das vegetarische Menü wählen, essen 80% dieser Personen das Menü mit Fleisch.
Mit den Bezeichnungen F: Menü mit Fleisch und V: vegetarisches Menü ergibt sich folgendes Übergangsdiagramm:



Da die Spaltensummen jeweils 1 ergeben müssen, erhält man folgende Übergangsmatrix:

$$M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}$$

b) Da M^2 angibt, wie die Verteilung am zweiten Tag aussieht, bedeutet $a_{22} = 0,55$ folgendes:
55% der Personen, die am zweiten Tag das vegetarische Menü gewählt haben, wählen auch am dritten Tag das vegetarische Menü.