Neumann I Rosner

ClassPad Learning: Mittelstufe

gut erklärt mit
zusätzlich 30 Videos

1. Auflage

Freiburger Verlag

Stefan Rosner, geb. 1979,
studierte Mathematik in
Mannheim und unterrichtet
seit 2005 in der Oberstufe.

Printed in EU
www.freiburger-verlag.de

Vorwort

Liebe Schülerinnen und Schüler,

dieses Buch soll Sie ergänzend zu ClassPad Learning unterstützen,

- sich in der Mittelstufe optimal auf Klausuren und auf die Mittlere Reife bzw. den Realschulabschluss in Mathematik vorzubereiten.
- sich alle Lehrplaninhalte anhand verständlicher und übersichtlicher Stoffzusammenfassungen anzueignen.
- die Prüfungsaufgaben der vergangenen Jahrgänge zu bearbeiten, da Sie hiermit ein Nachschlagewerk zur Verfügung haben.
- durch Erfolge neue Motivation für das Fach Mathematik zu bekommen.

Liebe Fachkolleginnen und Fachkollegen,

dieses Buch soll Sie im Zusammenspiel mit ClassPad Learning dabei unterstützen,

- die zeitintensive Stoffwiederholung, Klausur- und Prüfungsvorbereitung teilweise aus dem Unterricht auslagern zu können.
- auf diese Weise mehr Zeit für verständnisorientierten Unterricht zu gewinnen.
- sicherzustellen, dass Ihre Schülerinnen und Schüler über ausreichendes Basiswissen verfügen.

Zusätzlich

30 Videos, in welchen alle Stoffzusammenfassungen nochmals erklärt werden. Zugriff über Kurzadresse oder QR-Code aus dem Buch.

Liebe Schülerinnen und Schüler,

über Fragen oder Anregungen zu den Inhalten dieses Buches freue ich mich sehr.

Stefan Rosner

(stefan_rosner@hotmail.com)

Inhaltsverzeichnis

1 Für ClassPad Learning anmelden

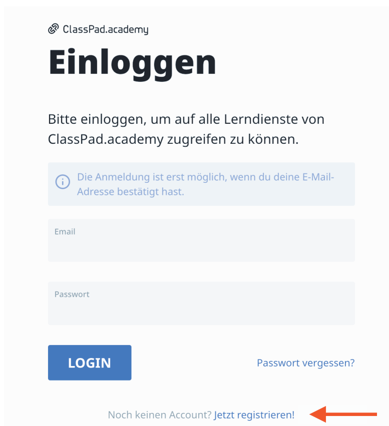
Bei ClassPad.academy registrieren

Bevor du ClassPad Learning nutzen kannst, ist es nötig, sich zuerst bei ClassPad.academy zu registrieren: ClassPad.academy rufst du im Internet auf unter ClassPad.academy

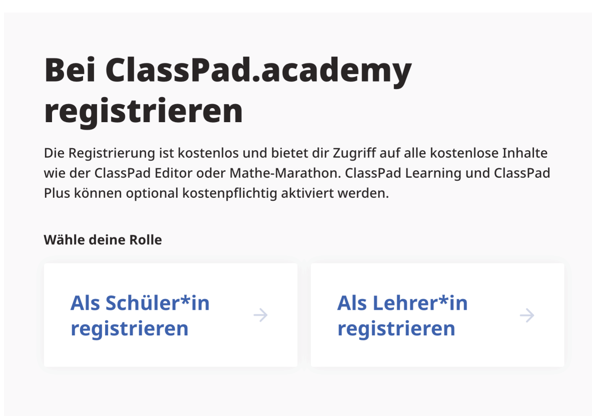
frv.tv/cp

Im Video, das du unter frv.tv/cp ansehen kannst, wird ClassPad Learning vorgestellt.

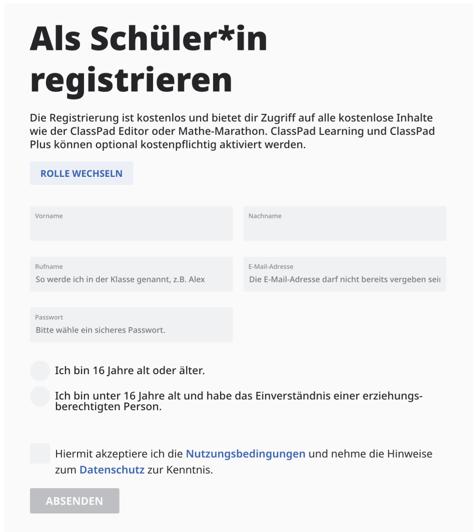
Zuerst klickst du auf «jetzt registrieren», das steht etwas kleiner rechts unten im Fenster. Im Screenshot ist es mit einem roten Pfeil gekennzeichnet:



Im nächsten Schritt wählst du den linken Button «Als Schüler*in registrieren» aus und klickst diesen:



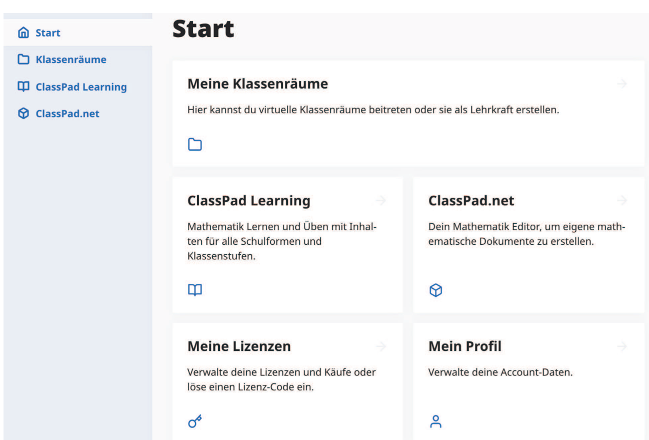
Nun gibst du deine persönlichen Daten an. Dabei ist der «Rufname» der Name, wie du in der Klasse in ClassPad.academy angezeigt wirst. Danach musst du noch bestätigen, dass du entweder älter als 16 Jahre alt bist, oder das Einverständnis deiner Eltern hast. Zum Schluss bestätigst du noch die Nutzungsbedingungen.



WICHTIG: Um dich in weiter einloggen zu können, musst du die Email, die dir von der ClassPad.academy geschickt wurde, bestätigen.

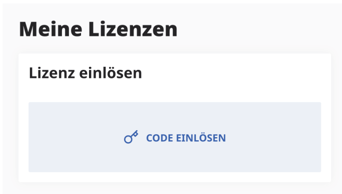
Nun bist du auf der Startseite. Diese besteht aus mehreren Bereichen.

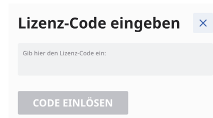
- Ganz links befindet sich das Menü. Hier kannst du direkt den Bereich auswählen, den du nutzen willst.
- In der Mitte werden die verschiedenen Bereiche auch noch als Kacheln angezeigt.



Meine Lizenzen

Um ClassPadd Learning nutzen zu können brauchst du eine Lizenz. Die bekommst du entweder von deiner Lehrerin bzw. deinem Lehrer oder du kannst sie auch kaufen, z.B. bei dynatech.de

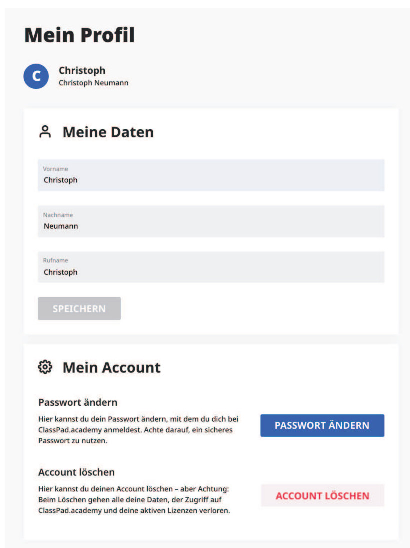




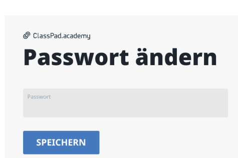
Um den Lizenzcode einzugeben, klickst du einmal, dann öffnet sich ein Dialogfenster und du kannst den Code eingeben.

Mein Profil

Auf der Profilseite kannst du sehen, welche Daten von dir gespeichert sind. Diese kannst du entsprechend ändern und anpassen.



Auch das Passwort kann hier geändert werden. Wenn du auf den entsprechenden Button klickst, öffnet sich ein Dialogfenster:



3. Überblick

1. Rechengrundlagen

Bevor die einzelnen Themen dargestellt werden, ist es sinnvoll, zunächst einen Überblick über alle wichtigen Rechenregeln zu bekommen.

Thema	Beispiel	Vorgehen
1. Das Rechnen mit Brüchen		
Erweitern	$\frac{2}{5}(\text{mit } 3)=\frac{2\cdot 3}{5\cdot 3}=\frac{6}{15}$	Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl mutiplizieren
Kürzen	$\frac{6}{15}(\text{mit } 3)=\frac{\cancel{6}^{2}}{\cancel{15}_{5}}=\frac{2}{5}$	Zähler und Nenner durch die gleiche Zahl dividieren
Addieren	$\frac{3}{2}+\frac{1}{3}=\frac{9}{6}+\frac{2}{6}=\frac{9+2}{6}=\frac{11}{6}$	1. So erweitern, dass gleiche Nenner vorliegen 2. Zähler addieren, Nenner beibehalten
Subtrahieren	$\frac{2}{4}-\frac{5}{6}=\frac{6}{12}-\frac{10}{12}=\frac{6-10}{12}=\frac{-4}{12}=-\frac{1}{3}$	1. So erweitern, dass gleiche Nenner vorliegen 2. Zähler subtrahieren, Nenner beibehalten
Multiplizieren	$\frac{2}{4}\cdot\frac{5}{3}=\frac{2\cdot 5}{4\cdot 3}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$	$\frac{\text{Zähler}\cdot\text{Zähler}}{\text{Nenner}\cdot\text{Nenner}}$
Dividieren	$\frac{2}{4}:\frac{5}{3}=\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{5}=\frac{2\cdot 3}{4\cdot 5}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$	Mit dem Kehrbruch multiplizieren

Spezielle Brüche

- $\frac{0}{3}=0$ Ein Zähler von 0 führt zu einem Wert von 0.
- $\frac{3}{0}=?$ Ein Nenner von 0 führt zu einem nicht definierten Wert.

frv.tv/7r

2. Potenzgesetze		
Multiplizieren (gleiche Basis)	$3^5 \cdot 3^3 = 3^8$ $x^2 \cdot x^4 = x^6$	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ Hochzahlen addieren
Dividieren (gleiche Basis)	$4^7 : 4^2 = 4^{7-2} = 4^5$ $x^6 : x^4 = x^{6-4} = x^2$	$a^m : a^n = a^{m-n}$ Hochzahlen subtrahieren
Multiplizieren (gleiche Hochzahl)	$5^4 \cdot 2^4 = (5 \cdot 2)^4 = 10^4$	$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$ Basen multiplizieren
Dividieren (gleiche Hochzahl)	$6^4 : 2^4 = \left(\frac{6}{2}\right)^4 = 3^4$	$a^m : b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$ Basen dividieren

Bemerkung : Nur wenn die beiden Basen oder die beiden Hochzahlen übereinstimmen, darf (mithilfe obiger Regeln) multipliziert bzw. dividiert werden.

Mehrere Hochzahlen	$\left(3^3\right)^4 = 3^{3 \cdot 4} = 3^{12} = 531441$ $\left(x^7\right)^3 = x^{7 \cdot 3} = x^{21}$	$\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$ Hochzahlen multiplizieren

Spezielle Hochzahlen

- $17^0 = 1;\quad x^0 = 1$ — Die Hochzahl 0 führt immer zu dem Wert 1.
- $2^{-3} = \frac{1}{2^3};\quad a^{-2} = \frac{1}{a^2}$ — Eine negative Hochzahl wird durch das „Verschieben“ der Potenz in den Nenner positiv.

3. Das Auflösen von Klammern		
Auflösen einer „Plusklammer“	$2x+(x-6)$ $=2x+x-6$ $=3x-6$	Alles beibehalten
Auflösen einer „Minusklammer“	$2x-(x-6)$ $=2x-x+6$ $=x+6$	Alle Vorzeichen ändern
Verschachtelte Klammern	$2x-(3-(4x+1))$ $=2x-(3-4x-1)$ $=2x-(2-4x)$ $=2x-2+4x=6x-2$	Klammern von innen nach außen auflösen
Zahl · Klammer	$2x\cdot(3+4x)$ $=6x+8x^2$	$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$
Klammer · Klammer	$(x+2)\cdot(3-4x)$ $=3x-4x^2+6-8x$ $=-4x^2-5x+6$	$(a+b)\cdot(c-d)=a\cdot c-a\cdot d+b\cdot c-b\cdot d$

4. Die binomischen Formeln		
1. Binomische Formel	$(2x+3)^2$ $=2x\cdot 2x+2\cdot 2x\cdot 3+3\cdot 3$ $=4x^2+12x+9$	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
2. Binomische Formel	$(3x-4)^2$ $=3x\cdot 3x-2\cdot 3x\cdot 4+4\cdot 4$ $=9x^2-24x+16$	$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
3. Binomische Formel	$(4x+5)\cdot(4x-5)$ $=4x\cdot 4x-5\cdot 5$ $=16x^2-25$	$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$

5. Faktorisieren (Aus einer Summe ein Produkt machen)		
Ausklammern	$10x^2y+15xy^2$ $=5xy\cdot(2x+3y)$	„Gemeinsames" ausklammern
Binomische Formeln „rückwärts"	$x^2-8x+16$ $=(x-4)^2$	hier die 2. Binomische Formel

6. Das Rechnen mit Wurzeln		
Multiplizieren	$\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{8\cdot 2}=\sqrt{16}=4$ $\sqrt{x^3}\cdot\sqrt{x}=\sqrt{x^3\cdot x}=\sqrt{x^4}=x^2$	$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$
Dividieren	$\sqrt{18x^4}:\sqrt{2x^2}=\sqrt{\frac{18x^4}{2x^2}}$ $=\sqrt{9x^2}=3x$	$\sqrt{a}:\sqrt{b}=\sqrt{\frac{a}{b}}$

Vorsicht bei Addition und Subtraktion

Beispiel: $\sqrt{6}+\sqrt{3}\neq\sqrt{9}$ oder $\sqrt{x^4-y^6}\neq x^2-y^3$

Zusatz: Die Schreibweise für sehr große und sehr kleine Zahlen		
Große Zahlen	$720000=7,2\cdot 10^5$ $8920000000=8,92\cdot 10^9$	…,… · $10^{+\text{„Anzahl an verschobenen Kommastellen"}}$
Kleine Zahlen	$0,00035=3,5\cdot 10^{-4}$ $0,0000087=8,7\cdot 10^{-6}$	…,… · $10^{-\text{„Anzahl an verschobenen Kommastellen"}}$

2. Gleichungen

Grundsätzliche Fragestellung
Für welchen Wert von x ergeben die beiden Seiten der Gleichung einen gleich großen Wert?

2.1 Lineare Gleichungen

Beispiel 1

$$\begin{aligned} 2x-4 &= 2 \quad &|+4 \\ 2x &= 6 \quad &|:2 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{aligned} &\text{Probe: Einsetzen von } x=3 \\ &2\cdot 3-4=2 \\ &6-4=2 \\ &2=2 \text{ (wahre Aussage)} \end{aligned} \right)$$

Beispiel 2

$$\begin{aligned} \frac{7}{2}x-\frac{1}{2} &= -\frac{5}{2}+\frac{1}{2}x \quad &|\cdot 2 \\ 7x-1 &= -5+1x \quad &|-x+1 \\ 6x &= -4 \quad &|:6 \\ x &= -\frac{4}{6} \\ x &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Vorgehen: Alle „Summanden mit x“ müssen auf die eine, alle „Summanden ohne x“ auf die andere Seite der Gleichung umgeordnet werden. Dann wird x isoliert.

2.2 Quadratische Gleichungen

Typ 1 (Reinquadratische Gleichung)

Beispiel 1

$$\begin{aligned} 2x^2-8 &= 0 \quad &|+8 \\ 2x^2 &= 8 \quad &|:2 \\ x^2 &= 4 \quad &|\sqrt{\ } \\ x_1 &= \sqrt{4}=2 \\ x_2 &= -\sqrt{4}=-2 \end{aligned}$$

Beispiel 2

$$\begin{aligned} -1-2x^2 &= -5x^2-1 \quad &|+5x^2+1 \\ 3x^2 &= 0 \quad &|:3 \\ x^2 &= 0 \quad &|\sqrt{\ } \\ x &= \sqrt{0}=0 \end{aligned}$$

Merkmal: Nur x^2 und „Zahl“; „kein x“

Vorgehen: x^2 isolieren. Dann $\sqrt{\ }$.

frv.tv/7s

Typ 2 (Gemischtquadratische Gleichung)

Beispiel: $3x^2 - 3x - 18 = 0$

***abc*-Formel** oder ***pq*-Formel**

abc-Formel:

$$\boldsymbol{x_{1|2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}}$$

$(a = 3;\; b = -3;\; c = -18)$

$$x_{1/2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-18)}}{2 \cdot 3}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{225}}{6} = \frac{3 \pm 15}{6}$$

$$x_1 = \frac{3-15}{6} = -2;\; x_2 = \frac{3+15}{6} = 3$$

pq-Formel:

$3x^2 - 3x - 18 = 0 \quad |:3$ (vor x^2 muss 1 stehen!)

$x^2 - x - 6 = 0$

$$\boldsymbol{x_{1|2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

$(p = -1;\; q = -6)$

$$x_{1/2} = -\frac{(-1)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{(-1)}{2}\right)^2 - (-6)}$$

$$= 0,5 \pm \sqrt{6,25} = \frac{1}{2} \pm 2,5$$

$$x_1 = 0,5 - 2,5 = -2;\; x_2 = 0,5 + 2,5 = 3$$

Merkmal: x^2, x und „Zahl“

Vorgehen: *abc*-Formel oder *pq*-Formel

Die Diskriminante (D)

Den Ausdruck, der bei der *abc*- bw. *pq*-Formel **unter der Wurzel** steht, nennt man Diskriminante. Deren Vorzeichen entscheidet darüber, ob die Gleichung zwei, eine oder keine Lösungbesitzt (siehe auch Seite S. 47-50).

$$\text{Falls} \begin{cases} \mathbf{D > 0} & \left(\sqrt{+\ldots}\right) \\ \mathbf{D = 0} & \left(\sqrt{0}\right) \\ \mathbf{D < 0} & \left(\sqrt{-\ldots}\right) \end{cases} \text{besitzt die Gleichung} \begin{cases} \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{keine} \end{cases} \text{Lösung(en).}$$

Zusatz: Der Satz vom Nullprodukt (Erklärung im Video: frv.tv/7s)

Gleichungen der Form $ax^2 + bx = 0$ können hierdurch schneller als mit der *abc*- bzw. *pq*-Formel gelöst werden.

Beispiel

$$2x^2 - 4x = 0$$

$$x \cdot (2x - 4) = 0$$

S. v. Nullpr.

$$x_1 = 0 \qquad 2x - 4 = 0$$

$$2x = 4$$

$$x_2 = 2$$

2.3 Lineare Gleichungssysteme (LGS)

Einordnung: Wenn **2 Gleichungen** gegeben sind, wobei jede Gleichung **2 Variablen** (meist x und y) besitzt, nennt man die Gleichungen zusammen ein lineares Gleichungssystem (LGS).
Ziel ist es, die Zahlenwerte (Lösungen) für x und y zu finden, sodass **beide Gleichungen** auf eine wahre Aussage führen.

Vorgehen: Es gibt 3 verschiedene Rechenverfahren, um zu den Lösungen zu gelangen.

Beispiel : (1) $2x+5y=12$
(2) $x-4y=-7$

1. Gleichsetzungsverfahren	
1. Beide Gleichungen nach der gleichen Variablen (x oder y) **auflösen**.	(1) $2x+5y=12 \quad \vert -5y$ $2x=-5y+12 \quad \vert :2$ $x=-2,5y+6$ (2) $x-4y=-7 \quad \vert +4y$ $x=4y-7$
2. Gleichsetzen. Wert einer Variablen **berechnen**.	$-2,5y+6=4y-7 \quad \vert +2,5y\ +7$ $13=6,5y \quad \vert :6,5$ $2=y$
3. Durch **Einsetzen** den Wert der anderen Variablen **berechnen**.	$y=2$ in (2): $x=4y-7$ $x=4\cdot 2-7$ $x=1$

frv.tv/7t

2. Einsetzungsverfahren	
1. Eine Gleichung nach x oder y **auflösen**.	$(2): \quad x-4y=-7 \quad \mid +4y$ $x=4y-7$
2. In die andere Gleichung **einsetzen** (Klammer!). Wert der anderen Variablen **berechnen**.	$x=4y-7$ in (1): $\quad 2x+5y=12$ $2\cdot(4y-7)+5y=12$ $8y-14+5y=12 \quad \mid +14$ $13y=26 \quad \mid :2$ $y=2$
3. Durch **Einsetzen** den Wert der ersten Variablen **berechnen**.	$y=2$ in (2): $\quad x=4y-7$ $x=4\cdot 2-7$ $x=1$

3. Additionsverfahren	
1. Beide Gleichungen so umformen, dass x oder y mit **gleichem „Zahlenwert“**, aber **verschiedenen Vorzeichen** auftritt.	(1) $\quad 2x+5y=12$ (2) $\quad x-4y=-7 \quad \mid \cdot(-2)$ (1′) $\quad \mathbf{2}x+5y=12$ (2′) $\quad \mathbf{-2}x+8y=14$
2. Gleichungen addieren. Wert einer Variablen **berechnen**.	$(1')+(2'): \quad \mathbf{2}x-\mathbf{2}x+5y+8y=12+14$ $13y=26 \quad \mid :13$ $y=2$
3. Durch **Einsetzen** den Wert der anderen Variablen **berechnen**.	$y=2$ in (2): $\quad x-4y=-7$ $x-4\cdot 2=-7$ $x-8=-7 \quad \mid +8$ $x=1$

Zusatz:GraphischesVerfahren

Wenn man die Gleichungen jeweils nach ***y*** auflöst, kann man sie als Geraden betrachten. Die Lösung entspricht dem Schnittpunkt der beiden Geraden (S. 37).

2.4. Bruchgleichungen

Die hier aufgeführten Bruchgleichungen sind zwar recht anspruchsvoll, enthalten dafür aber auch alle gängigen Variationen. Eine ausführliche Erklärung gibt es im Video.

Bruchgleichungen lösen (am Beispiel 1)	
1. Nenner durch **Ausklammern** oder **binomische Formeln** in Faktoren zerlegen.	$\frac{x}{3x+9} = \frac{x+12}{x^2+6x+9}$ $\frac{x}{3\cdot(x+3)} = \frac{x+12}{(x+3)^2}$
2. Hauptnenner festlegen Dieser enthält alle Faktoren aus dem Nenner in der höchsten vorkommenden Potenz.	Hauptnenner (HN): $3\cdot(x+3)^2$
3. Definitionsbereich festlegen. $D = R \setminus \{\text{Nullstellen des Nenners}\}$	$D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$
4. Mit **Hauptnenner durchmultiplizieren**, dabei kürzen.	$\frac{x}{3\cdot(x+3)} = \frac{x+12}{(x+3)^2} \quad \mid \cdot\, 3\cdot(x+3)^2$ $\cancel{3}\cdot(x+3)^{\cancel{2}} \cdot \frac{x}{\cancel{3}\cdot\cancel{(x+3)}} = 3\cdot\cancel{(x+3)^2}\cdot\frac{x+12}{\cancel{(x+3)^2}}$ $(x+3)\cdot x = 3\cdot(x+12)$
5. Gleichung lösen.	$(x+3)\cdot x = 3\cdot(x+12)$ $x^2+3x = 3x+36 \quad \mid -3x$ $x^2 = 36 \quad \mid \sqrt{}$ $x_1 = -6$ $x_2 = 6$
6. Lösungsmenge angeben. Hierbei Definitionsmenge beachten!	$L = \{-6;\ 6\}$

frv.tv/7u

Beispiel **2 (ehemalige Prüfungsaufgabe)**

1. $$\frac{4x^2+3x-6}{x^2+2x} = \frac{1-3x}{x} - \frac{4+x}{x+2}$$
$$\frac{4x^2+3x-6}{x\cdot(x+2)} = \frac{1-3x}{x} - \frac{4+x}{x+2}$$

2. Hauptnenner (HN): $x\cdot(x+2)$

3. $D = R \setminus \{-2;\, 0\}$

4. $$\frac{4x^2+3x-6}{x\cdot(x+2)} = \frac{1-3x}{x} - \frac{4+x}{x+2} \qquad |\cdot x\cdot(x+2)$$
$$\cancel{x}\cdot\cancel{(x+2)}\cdot\frac{4x^2+3x-6}{\cancel{x}\cdot\cancel{(x+2)}} = \cancel{x}\cdot(x+2)\cdot\frac{1-3x}{\cancel{x}} - x\cdot\cancel{(x+2)}\cdot\frac{4+x}{\cancel{x+2}}$$

5. $$\begin{aligned}4x^2+3x-6 &= (x+2)\cdot(1-3x) - x\cdot(4+x)\\ 4x^2+3x-6 &= x-3x^2+2-6x-4x-x^2\\ 4x^2+3x-6 &= -4x^2-9x+2 && |+4x^2+9x-2\\ 8x^2+12x-8 &= 0 && |:8\\ x^2+1{,}5-1 &= 0\end{aligned}$$

mit *pq*-Formel: $p = 1{,}5;\ \ q = -1$ (oder *abc*-Formel)

$$x_{1/2} = -\frac{1{,}5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1{,}5}{2}\right)^2 - (-1)} = -0{,}75 \pm \sqrt{0{,}75^2+1} = -0{,}75 \pm 1{,}25$$
$x_1 = -0{,}75 - 1{,}25 = -2;$
$x_2 = -0{,}75 + 1{,}25 = 0{,}5$

6. $L = \{\, 0{,}5 \,\}$

Da -2 aus der Definitionsmenge ausgeschlossen wurde, kann -2 nicht Lösung sein.

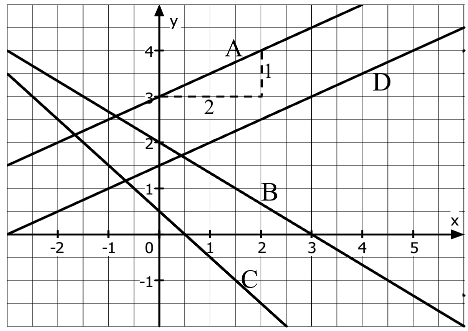
3. Lineare Funktionen (Geraden)

3.1 Die allgemeine Geradengleichung

$\boldsymbol{y = m \cdot x + b}$

Vorgehen zum Einzeichnen:

$$y = \frac{\text{hoch / runter}}{\text{rechts}} \cdot x + \text{y-Achsen-abschnitt}$$



A : $y = \frac{1}{2}x + 3$ B : $y = -\frac{2}{3}x + 2$

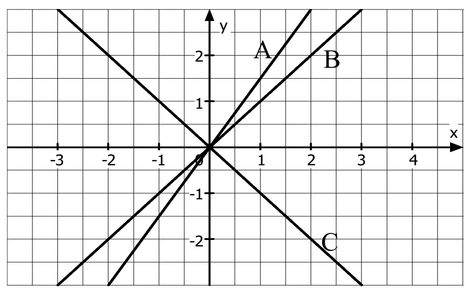
C : $y = -x + 0,5$ D : $y = 0,5x + 1,5$

3.2 Sonderfälle

- **Ursprungsgerade**
  $\boldsymbol{y = m \cdot x}$

  Spezielle Ursprungsgeraden

  1. Winkelhalbierende: $y = x$
  2. Winkelhalbierende: $y = -x$

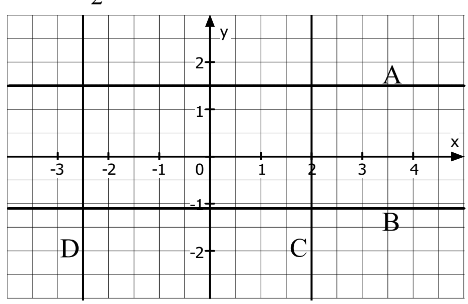


A : $y = \frac{3}{2}x$ B : $y = x$ C : $y = -x$

- **Parallelen zu einer Koordinatenachse**

  Parallele zur x-Achse
  y =„Zahl“

  Parallele zur y-Achse
  x =„Zahl“



A : $y = 1,5$ B : $y = -1,1$

C : $x = 2$ D : $x = -2,5$

frv.tv/7v