Gruber I Neumann

Erfolg im Mathe-Abi 2024

Übungsbuch für das Grundwissen
im Basisfach Mathematik
Baden-Württemberg
mit Tipps und Lösungen

Freiburger Verlag

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Erfolg von Anfang an

...ist das Geheimnis eines guten Abiturs.

Das vorliegende Übungsbuch ist speziell auf die grundlegenden Anforderungen des Basisfachs des Mathematik-Abiturs in Baden-Württemberg abgestimmt. Es umfasst die drei großen Themenbereiche Analysis, Geometrie und Stochastik.

frv.tv

Im Internet finden Sie unter **frv.tv/bw** weitere Videos, in denen die grundlegenden Themen an einfachen Beispielen erklärt werden. Die entsprechenden Stellen sind im Buch mit einem Kamerasymbol gekennzeichnet.

Im Basisfach Mathematik ist nur eine mündliche Prüfung vorgesehen, bei der es um kleine Rechenaufgaben und Verständnis der Zusammenhänge geht. Genau hierfür wurde das vorliegende Buch konzipiert: Es fördert das Grundwissen und die Grundkompetenzen in Mathematik, vom einfachen Rechnen und Formelanwenden bis hin zum Verstehen von gedanklichen Zusammenhängen. Das Übungsbuch ist eine Hilfe zum Selbstlernen (learning by doing) und bietet die Möglichkeit, sich intensiv auf die Prüfung vorzubereiten und gezielt Themen zu vertiefen. Hat man Erfolg bei den grundlegenden Aufgaben, machen Mathematik und das Lernen mehr Spaß.

Der Tippteil

Hat man keine Idee, wie man eine Aufgabe angehen soll, hilft der Tippteil zwischen Aufgaben und Lösungen weiter: Zu jeder Aufgabe gibt es dort Tipps, die helfen, einen Ansatz zu finden, ohne die Lösung vorwegzunehmen.

Die Kontrollkästchen

Damit Sie immer den Überblick behalten können, welche Aufgaben Sie schon bearbeitet haben, befindet sich neben jedem Aufgabentitel ein Kontrollkästchen zum Abhaken.

Wie arbeiten Sie mit diesem Buch?

Am Anfang jedes Kapitels finden Sie eine kurze Übersicht über die jeweiligen Themen. Die einzelnen Kapitel bauen zwar aufeinander auf, doch ist es nicht zwingend notwendig, das Buch der Reihe nach durchzuarbeiten. Die Aufgaben sind in der Regel in ihrer Schwierigkeit gestaffelt. Von fast jeder Aufgabe gibt es mehrere Variationen zum Vertiefen.

In der Mitte des Buches finden Sie den blauen Tippteil mit Denk- und Lösungshilfen.
Die Lösungen mit ausführlichen verständlichen Lösungswegen bilden den dritten Teil des Übungsbuchs. Hier finden Sie die notwendigen Formeln, Rechenverfahren und Denkschritte sowie manchmal alternative Lösungswege.

Der Aufbau des mündlichen Mathematik-Abiturs

Die mündliche Abiturprüfung hat zwei Prüfungsteile und läuft wie folgt ab:

- Sie erhalten die Aufgaben aus einem Sachgebiet (Analysis, Geometrie oder Stochastik) für den ersten Prüfungsteil und haben 20 Minuten Zeit zur Vorbereitung. Je nach Aufgabe sind ein wissenschaftlicher Taschenrechner und die Merkhilfe zur Vorbereitung erlaubt.

- Der erste Prüfungsteil dauert 10 Minuten. Hier stellen Sie Ihren Lösungsweg der Aufgabe dar. Dabei dürfen Sie die 10 Minuten komplett nutzen, Verständnisfragen und Unterbrechungen seitens der LehrerInnen sind nicht erlaubt.

- Für den zweiten Prüfungsteil erhalten Sie eine weitere Aufgabe aus einem anderen Sachgebiet. Diese Aufgabe bearbeiten Sie im Rahmen eines Prüfungsgesprächs, d.h. die PrüferInnen werden weitere Fragen auf verschiedenen Niveaus stellen.

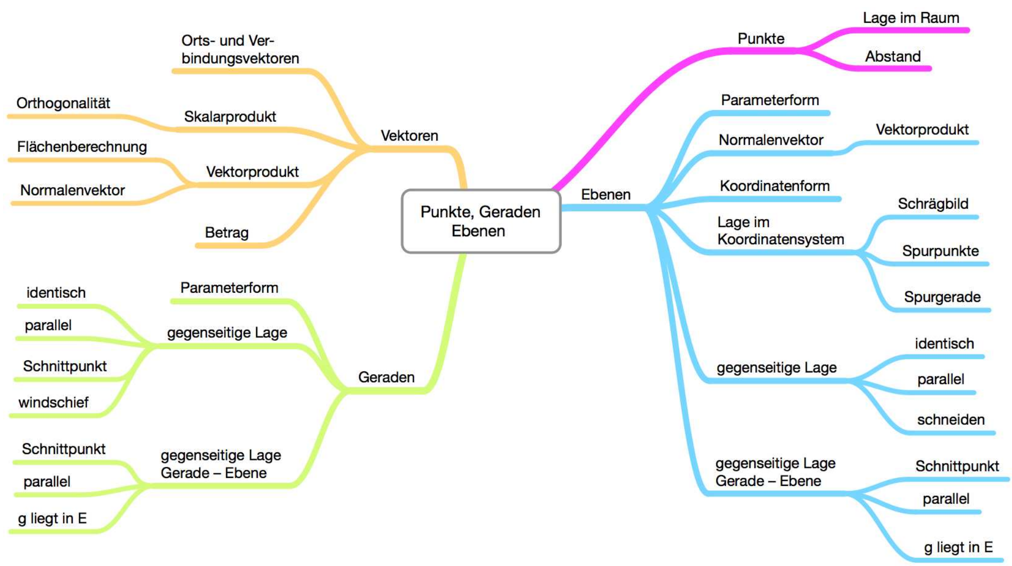
- Eine der beiden Aufgaben kommt in jedem Fall aus dem Sachgebiet Analysis, die andere entweder aus der Geometrie oder der Stochastik.

Allen Schülerinnen und Schülern, die sich auf das Abitur vorbereiten, wünschen wir viel Erfolg.

Helmut Gruber, Robert Neumann

Geometrie

5 Punkte, Geraden und Ebenen ☐



5.1 Rechnen mit Vektoren ☐

Tipps ab Seite 86, Lösungen ab Seite 145

In diesem Kapitel geht es darum, die Grundkenntnisse des Rechnens mit Vektoren zu wiederholen. Dazu gehören die Addition und Subtraktion von Vektoren. Neben diesen Rechenoperationen ist es wichtig, das Skalarprodukt zu kennen und zu wissen, dass es genau dann gleich Null ist, wenn zwei Vektoren senkrecht aufeinander stehen.

Da mit Vektoren geometrische Objekte wie Dreiecke, Parallelogramme und verschiedene Körper beschrieben werden können, sollten Sie die grundlegenden Eigenschaften dieser Objekte kennen. Rechenregeln für das Rechnen mit Vektoren finden Sie bei den Tipps auf Seite 86. Wenn nicht anders angegeben gilt für alle Parameter: $\lambda, \mu, r, s, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

5.1.1 Rechenregeln ☐

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie:

a) $\vec{a}+\vec{b}$ b) $\vec{a}-\vec{b}$ c) $2\cdot\vec{a}$ d) $-\vec{a}$ e) $2\vec{a}+3\vec{b}$

f) $\vec{a}\circ\vec{b}$ g) $|\vec{a}|$ h) $|\vec{b}|$ i) $|\vec{a}+\vec{b}|$ j) $\vec{a}\times\vec{b}$

5.1.2 Orts- und Verbindungsvektoren ☐

Tipp: Fertigen Sie eine Skizze an und stellen Sie Vektorketten auf.

a) Gegeben sind die Punkte $A\,(2\mid 3\mid 2)$, $B\,(7\mid 4\mid 3)$ und $C\,(1\mid 5\mid -2)$.
Bestimmen Sie die Ortsvektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$, die Verbindungsvektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{BC}$ und zeigen Sie, dass das Dreieck ABC nicht gleichschenklig ist.

b) Prüfen Sie, ob das Dreieck ABC gleichschenklig ist:

I) $A\,(3\mid 7\mid 2)$, $B\,(-1\mid 5\mid 1)$, $C\,(2\mid 3\mid 0)$

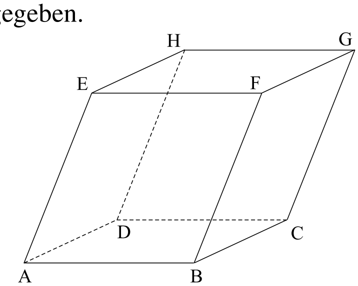
II) $A\,(-5\mid 2\mid -1)$, $B\,(0\mid 5\mid -3)$, $C\,(-1\mid 6\mid -3)$

c) I) Bestimmen Sie den Mittelpunkt M von $A\,(4\mid 1\mid 3)$ und $B\,(-2\mid 5\mid -5)$.

II) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes P so, dass $B\,(4\mid 2\mid 5)$ der Mittelpunkt von $A\,(3\mid -1\mid -4)$ und P ist.

d) Gegeben sind die Punkte $A\,(4\mid 2\mid 3)$, $B\,(1\mid 8\mid 5)$ und $C\,(-2\mid 1\mid -3)$.
Bestimmen Sie den Punkt D so, dass das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist.

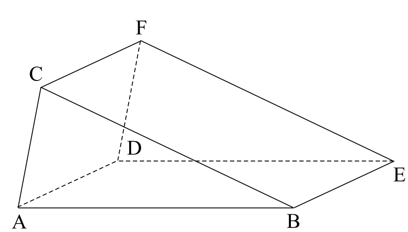
e) Von einem Spat (Körper mit jeweils 4 parallelen Kanten) sind die Punkte $A\,(3\mid 1\mid 4)$, $B\,(-2\mid 1\mid -3)$, $C\,(5\mid -2\mid 3)$ und $F\,(9\mid 2\mid 6)$ gegeben.



I) Bestimmen Sie die Koordinaten der übrigen Punkte des Spats.

II) Berechnen Sie die Länge der Raumdiagonalen $\overline{AG}$.

f) Ein schiefes Dreiecksprisma ist gegeben durch die Punkte $A\,(4\mid 1\mid -3)$, $B\,(5\mid -2\mid -1)$, $C\,(-1\mid 3\mid -2)$ und $D\,(7\mid 4\mid 2)$.
Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte E und F sowie die Länge der Kante $\overline{EF}$.



5.1.3 Orthogonalität von Vektoren

a) Prüfen Sie, ob folgende Vektoren senkrecht (orthogonal) aufeinander stehen.

I) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ II) $\vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

III) $\vec{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) Geben Sie verschiedene Vektoren an, die zu $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ orthogonal sind.

c) Prüfen Sie, ob das Dreieck ABC rechtwinklig ist:
A$(5\,|\,1\,|\,0)$, B$(1\,|\,5\,|\,2)$, C$(-1\,|\,1\,|\,6)$

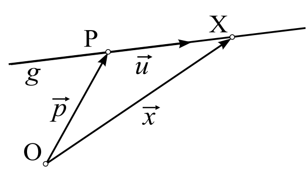
5.2 Geraden

Tipps ab Seite 87, Lösungen ab Seite 149

Die Parameterform der Geradengleichung in der vektoriellen Geometrie lautet:

$$g\colon \vec{x} = \vec{p} + \lambda \cdot \vec{u} \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R}$$

Dabei wird der Vektor $\vec{p}$ als Stützvektor bezeichnet, weil er die Gerade «stützt», entsprechend ist der Punkt P der «Stützpunkt». Der Vektor $\vec{u}$ ist der Richtungsvektor der Geraden, da er die Richtung der Geraden angibt. λ ist der Parameter, der angibt, mit welchem Faktor der Richtungsvektor vervielfacht wird.



5.2.1 Aufstellen von Geradengleichungen

Stellen Sie eine Gleichung der Geraden auf, die durch die beiden Punkte geht:

a) A$(1\,|\,0\,|\,2)$, B$(3\,|\,1\,|\,3)$ b) C$(2\,|\,1\,|\,-4)$, D$(4\,|\,0\,|\,1)$ c) E$(1\,|\,1\,|\,0)$, F$(0\,|\,0\,|\,1)$

5.2.2 Punktprobe

Liegen die gegebenen Punkte A, B, C auf der Geraden $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$?

a) A$(2\,|\,7\,|\,0)$ b) B$(3\,|\,11\,|\,3)$ c) C$(-2\,|\,-9\,|\,-8)$

Geometrie

5 Punkte, Geraden und Ebenen

5.1 Rechnen mit Vektoren

5.1.1 Rechenregeln

Für das Rechnen mit Vektoren gelten folgende Gesetze:

Addition: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{pmatrix}$ Subtraktion: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1-b_1 \\ a_2-b_2 \\ a_3-b_3 \end{pmatrix}$

Skalare Multiplikation: $s \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \cdot a_1 \\ s \cdot a_2 \\ s \cdot a_3 \end{pmatrix}$ (Zahl · Vektor = Vektor), für $s \in \mathbb{R}$

Skalarprodukt: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$ (Vektor · Vektor = Zahl)

Betrag bzw. Länge: $\left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Vektorprodukt: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$

5.1.2 Orts- und Verbindungsvektoren

a) Ortsvektoren setzen am Ursprung $O\,(0\,|\,0\,|\,0)$ an. Verbindungsvektoren zwischen zwei Punkten erhalten Sie mithilfe der Differenz der Ortsvektoren. Bestimmen Sie jeweils die Länge (Betrag) der Verbindungsvektoren.

b) Stellen Sie jeweils drei Verbindungsvektoren zwischen je zwei Punkten auf und berechnen Sie deren Länge.

c) Tragen Sie in Ihre Skizze jeweils die gegebenen und gesuchten Punkte sowie den Ursprung O ein. Bestimmen Sie mithilfe einer Vektorkette den Ortsvektor des gesuchten Punktes. Geben Sie die Koordinaten des gesuchten Punktes an.

d) Tragen Sie in Ihre Skizze die gegebenen und gesuchten Punkte sowie den Ursprung O ein. Achten Sie dabei auf die Reihenfolge der Punkte (*gegen* den Uhrzeigersinn). Bestimmen Sie mithilfe einer Vektorkette den Ortsvektor des gesuchten Punktes. Geben Sie die Koordinaten des gesuchten Punktes an.

e) Da je vier Kanten parallel sind, gilt
$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{EH}$ und $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{HG}$.
Bestimmen Sie mithilfe einer Vektorkette den Ortsvektor des gesuchten Punktes. Geben Sie die Koordinaten des gesuchten Punktes an.

f) Tragen Sie in Ihre Skizze die gegebenen und gesuchten Punkte sowie den Ursprung O ein. Bestimmen Sie mithilfe einer Vektorkette den Ortsvektor des gesuchten Punktes. Geben Sie die Koordinaten des gesuchten Punktes an. Die Länge einer Kante ist die Länge des Verbindungsvektors der beiden Eckpunkte.

5.1.3 Orthogonalität von Vektoren

a) Zwei Vektoren stehen genau dann senkrecht aufeinander, wenn das Skalarprodukt gleich Null ist. Ist das Skalarprodukt ungleich Null, dann sind die beiden Vektoren nicht orthogonal.

b) Es sind Vektoren zu suchen, deren Skalarprodukt mit $\vec{n}$ Null ergibt.

c) Bestimmen Sie das Skalarprodukt von je zwei Verbindungsvektoren. Falls ein Ergebnis Null ergibt, sind die beiden Vektoren orthogonal.

5.2 Geraden

5.2.1 Aufstellen von Geradengleichungen

Verwenden Sie den Ortsvektor des einen Punktes als Stützvektor. Bilden Sie den Richtungsvektor, indem Sie den Verbindungsvektor zwischen den beiden Punkten aufstellen.

5.2.2 Punktprobe

Setzen Sie den Ortsvektor des Punktes in die Geradengleichung ein und prüfen Sie, ob sich für alle drei Komponenten der gleiche Parameter ergibt.

5.2.3 Gegenseitige Lage von Geraden

Für die gegenseitige Lage von zwei Geraden gibt es vier Möglichkeiten: Die Geraden können sich schneiden, parallel, identisch oder windschief sein.

Zur Bestimmung der gegenseitigen Lage prüft man zuerst die Richtungsvektoren auf lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit:

1. Sind die Richtungsvektoren ein Vielfaches voneinander (linear abhängig), können die Geraden parallel oder identisch sein.
   Sie sind identisch, wenn ein Punkt der einen Geraden auf der anderen Geraden liegt (positive Punktprobe), sonst sind sie parallel (negative Punktprobe).

2. Sind die Richtungsvektoren kein Vielfaches voneinander (linear unabhängig), können die Geraden sich schneiden oder windschief sein.
   Durch Gleichsetzen erhält man den Schnittpunkt oder einen Widerspruch, welcher angibt, dass die Geraden windschief sind.

Geometrie

5 Punkte, Geraden und Ebenen

5.1 Rechnen mit Vektoren

5.1.1 Rechenregeln

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) $\vec{a}+\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a}-\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ c) $2\cdot\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$

d) $-\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ e) $2\vec{a}+3\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix}$

f) $\vec{a}\circ\vec{b} = (-1)\cdot 3 + 2\cdot 1 + 4\cdot 2 = 7$

g) $|\vec{a}| = \sqrt{(-1)^2+2^2+4^2} = \sqrt{1+4+16} = \sqrt{21}$

h) $|\vec{b}| = \sqrt{3^2+1^2+2^2} = \sqrt{14}$

i) $|\vec{a}+\vec{b}| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{2^2+3^2+6^2} = \sqrt{49} = 7$

j) $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 2 - 4\cdot 1 \\ 4\cdot 3 - (-1)\cdot 2 \\ (-1)\cdot 1 - 2\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ -7 \end{pmatrix}$

5.1.2 Orts- und Verbindungsvektoren

a) Gegeben sind die Punkte A $(2 \mid 3 \mid 2)$, B $(7 \mid 4 \mid 3)$ und C $(1 \mid 5 \mid -2)$.

Die Ortsvektoren sind: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Die Verbindungsvektoren sind:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b}-\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Die Längen der Dreiecksseiten erhält man mithilfe der Beträge der Verbindungsvektoren:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{5^2+1^2+1^2} = \sqrt{27}$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-1)^2+2^2+(-4)^2} = \sqrt{21}$$

$$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-6)^2+1^2+(-5)^2} = \sqrt{62}$$

Da alle drei Seiten des Dreiecks unterschiedlich lang sind, ist das Dreieck ABC nicht gleichschenklig.

b) I) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Die Länge der Dreiecksseiten erhält man mithilfe der Beträge der Verbindungsvektoren:

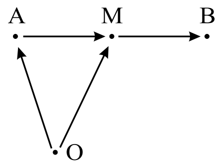
$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-4)^2+(-2)^2+(-1)^2} = \sqrt{21}$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-1)^2+(-4)^2+(-2)^2} = \sqrt{21}$$

Wegen $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{21}$ ist das Dreieck ABC gleichschenklig.

II) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, es ist $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{38}$, $\left|\overrightarrow{AC}\right| = 6$ und $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{2}$, damit ist das Dreieck ABC nicht gleichschenklig.

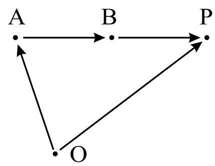
c) I)



$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ M$(1 \mid 3 \mid -1)$

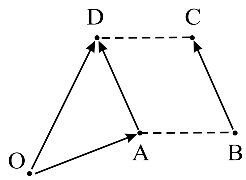
II)



$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ P$(5 \mid 5 \mid 14)$

d)



$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ D$(1 \mid -5 \mid -5)$

e) I) Es ergeben sich folgende mögliche Vektorketten:

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{D}(10 \mid -2 \mid 10)$$

$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BF} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{E}(14 \mid 2 \mid 13)$$

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BF} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -1 \\ 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{G}(16 \mid -1 \mid 12)$$

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{BF} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ -1 \\ 19 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{H}(21 \mid -1 \mid 19)$$

II) Die Länge der Raumdiagonalen $\overline{AG}$ ist die Länge des Verbindungsvektors $\overrightarrow{AG}$:

$$|\overrightarrow{AG}| = \left| \begin{pmatrix} 13 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{169+4+64} = \sqrt{237}\,\text{LE}.$$

f) Bei einem schiefen Dreiecksprisma sind folgende 3 Kanten parallel: $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ und $\overline{CF}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CF}$. Daher gilt: $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ E$(8 \mid 1 \mid 4)$

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{F}(2 \mid 6 \mid 3)$$

Die Länge der Kante $\overline{\mathrm{EF}}$ ist $|\overrightarrow{\mathrm{EF}}| = \left| \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{36+25+1} = \sqrt{62}$ LE.

5.1.3 Orthogonalität von Vektoren

a) I) $\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 = -2 \Rightarrow \vec{a}$ steht nicht orthogonal auf $\vec{b}$.

II) $\vec{r} \circ \vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = 5 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 3 \cdot (-3) = 0 \Rightarrow \vec{r}$ steht orthogonal auf $\vec{n}$.

III) $\vec{z} \circ \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + (-2) \cdot 3 + 4 \cdot 1 = 0 \Rightarrow \vec{z}$ steht orthogonal auf $\vec{w}$.

b) Es sind Vektoren zu bestimmen, deren Skalarprodukt mit $\vec{n}$ Null ergibt. Dazu kann man zwei Komponenten des Vektors frei wählen, die dritte ergibt sich dann, z.B.:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, denn $\vec{a} \circ \vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 4 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 + 0 \cdot (-3) = 4 - 4 = 0$

$\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, denn $\vec{b} \circ \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 0 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) = 6 - 6 = 0$

$\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, denn $\vec{c} \circ \vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 5 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 1 \cdot (-3) = 5 - 2 - 3 = 0$

c) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \circ \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = 24 + 0 + 12 = 36$$

$$\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = -8+16-8=0$$

$$\overrightarrow{CA} \circ \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = 12+0+24=36$$

Da das Skalarprodukt von $\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{BC}$ gleich Null ist, stehen diese beiden Vektoren senkrecht aufeinander, d.h. das Dreieck ABC hat bei B einen rechten Winkel.

5.2 Geraden

5.2.1 Aufstellen von Geradengleichungen

Der Ortsvektor des einen Punktes wird als Stützvektor für die Gerade benutzt. Einen Richtungsvektor erhält man, indem man einen Verbindungsvektor zwischen den beiden Punkten aufstellt. Da es beliebig ist, welcher Punkt als «Stützpunkt» genommen wird bzw. in welche Richtung man den Richtungsvektor aufstellt, gibt es mehrere Lösungen.

a) I) $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ II) $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

III) $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ IV) $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) I) $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ II) $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

III) $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ IV) $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -.5 \end{pmatrix}$

c) I) $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ II) $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

III) $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ IV) $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Stichwortverzeichnis