

Rosner

Mathe gut erklärt

Baden-Württemberg
Abitur 2017
Allgemeinbildende Gymnasien

Freiburger
Verlag

Inhaltsverzeichnis

| | |
|---|----|
| I. Grundlagen Analysis | 7 |
| 1 Funktionen | 8 |
| 1.1 Ganzrationale Funktionen (Polynome) | 8 |
| 1.2 Der Nullstellenansatz und die Vielfachheit von Nullstellen | 10 |
| 1.3 Gebrochenrationale Funktionen | 12 |
| 1.4 Exponentialfunktionen | 14 |
| 1.5 Trigonometrische Funktionen | 16 |
| 1.6 Übersicht: Spiegeln, Strecken und Verschieben | 18 |
| 1.7 Funktionenscharen | 20 |
| 1.8 Symmetrie zur y -Achse bzw. zum Ursprung | 22 |
| 1.9 Abschnittsweise definierte Funktionen | 23 |
| 1.10 Umgang mit Funktionen: Rechenansätze | 23 |
| 2 Gleichungen | 24 |
| 2.1 Gleichungstypen: Übersicht | 24 |
| 2.2 Gleichungstypen: Konkretes Lösungsverfahren | 26 |
| 2.3 Goldene Regeln zum Lösen von Gleichungen | 32 |
| 2.4 Lineare Gleichungssysteme | 34 |
| 3 Differenzialrechnung | 36 |
| 3.1 Ableitungsregeln | 36 |
| 3.2 Tangente und Normale | 39 |
| 3.3 Schnittpunkte (Berührungspunkt, senkrechter Schnitt, Schnittwinkel) | 42 |
| 3.4 Monotonie | 44 |
| 3.5 Krümmung | 45 |
| 3.6 Extrempunkte (Hoch- und Tiefpunkte) | 46 |
| 3.7 Wendepunkte | 47 |
| 3.8 Sattelpunkte | 48 |
| 3.9 Ortskurve | 52 |
| 3.10 Zusammenhang zwischen den Schaubildern von Funktion und Ableitung | 54 |
| 3.11 Ermittlung von Funktionsgleichungen | 56 |
| 3.12 Extremwertaufgaben | 58 |
| 3.13 Wachstum und Zerfall | 60 |
| 4 Integralrechnung | 62 |
| 4.1 Integrationsregeln („Aufleitungsregeln“) | 62 |
| 4.2 Flächeninhaltsberechnung zwischen Schaubild und x -Achse | 66 |
| 4.3 Flächeninhaltsberechnung zwischen zwei Schaubildern | 68 |
| 4.4 Berechnung des Rotationsvolumens: Fläche zwischen Schaubild und x -Achse rotiert um die x -Achse | 72 |
| 4.5 Berechnung des Rotationsvolumens: Fläche zwischen zwei Schaubildern | |

| | |
|--|------------|
| rotiert um die x -Achse | 73 |
| 4.6 Mittelwert (durchschnittlicher y -Wert) einer Funktion | 74 |
| 4.7 Flächen, die bis ins Unendliche reichen (Uneigentliche Integrale) | 75 |
| 4.8 Zusatz: Wichtiges für Anwendungsorientierte Aufgaben | 76 |
| II. Grundlagen Vektorgeometrie | 81 |
| 1 Vorwissen | 82 |
| 1.1 Punkte (im \mathbb{R}^3) | 82 |
| 1.2 Vektoren (im \mathbb{R}^3) | 82 |
| 1.3 Rechnen mit Vektoren (Addition, Subtraktion, Betrag, Skalare Multiplikation, Linearkombination, Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit, Skalarprodukt, Vektorprodukt) | 83 |
| 2 Geraden | 86 |
| 2.1 Geradengleichungen in Parameterform | 86 |
| 2.2 Gegenseitige Lage von Geraden | 88 |
| 3 Ebenen | 90 |
| 3.1 Ebenengleichungen in Parameterform | 90 |
| 3.2 Ebenengleichungen in Normalenform | 92 |
| 3.3 Ebenengleichungen in Koordinatenform | 94 |
| 3.4 Spurpunkte, Spurgeraden und die Lage im Koordinatensystem | 95 |
| 3.5 Umwandlungen der Ebenenformen | 96 |
| 4 Gegenseitige Lage | 100 |
| 4.1 Ebene-Gerade | 100 |
| 4.2 Ebene-Ebene | 102 |
| 5 Schnittwinkel | 105 |
| 6 Abstandsberechnungen | 106 |
| 6.1 Abstände zu einem Punkt | 107 |
| 6.2 Abstände zu einer Geraden | 110 |
| 6.3 Abstände zu einer Ebene | 111 |
| 7 Zusatz: Bewegungsaufgaben (Modellieren mit Vektoren) | 112 |
| 8 Spiegelungen | 114 |
| III. Grundlagen Stochastik | 117 |
| 1 Baumdiagramm, Pfadregeln und Erwartungswert | 118 |
| 1.1 Einführung | 118 |
| 1.2 Aufgabentypen | 121 |
| 1.3 Zufallsvariable und Erwartungswert | 124 |
| 2 Binomialverteilung | 128 |
| 2.1 Bernoulliformel | 128 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 2.2 | Binomialverteilung und kumulierte Binomialverteilung | 130 |
| 2.3 | Aufgabentypen | 132 |
| 3 | Der einseitige Hypothesentest | 136 |
| 3.1 | Ausführliche Erklärung | 136 |
| 3.2 | Vorgehen und Beispiele | 137 |
| 3.3 | Fehler 1. Art und 2. Art | 142 |

Vorwort

Liebe Schülerinnen und Schüler,

dieses Buch soll Sie dabei unterstützen,

- sich in den letzten beiden Schuljahren optimal auf Klausuren und auf das Abitur in Mathematik vorzubereiten.
- sich alle Lehrplaninhalte anhand verständlicher und übersichtlicher Stoffzusammenfassungen anzueignen.
- Ihr gewonnenes Wissen anhand von Basisübungen mit ausführlichen Lösungen schnell und prüfungsbezogen zu vertiefen.
- die Abituraufgaben der vergangenen Jahrgänge zu bearbeiten, da Sie hiermit ein Nachschlagewerk zur Verfügung haben.
- durch Erfolge neue Motivation für das Fach Mathematik zu bekommen.

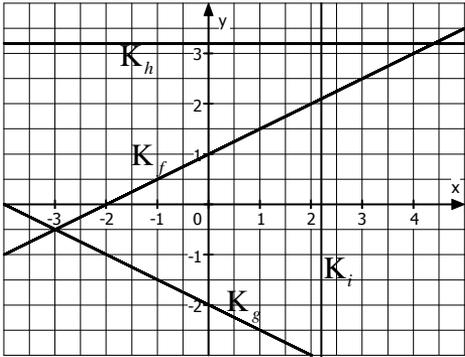
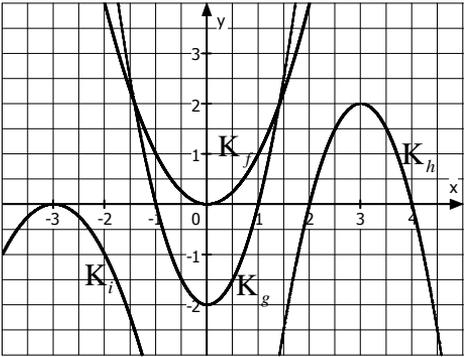
Liebe Fachkolleginnen und Fachkollegen,

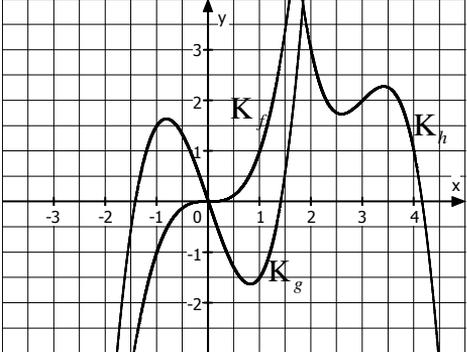
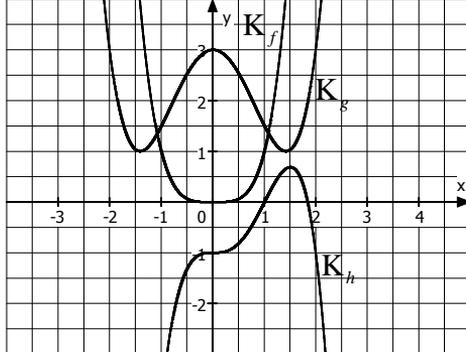
dieses Buch soll Sie dabei unterstützen,

- die zeitintensive Stoffwiederholung, Klausur- und Abiturvorbereitung teilweise aus dem Unterricht auslagern zu können.
- auf diese Weise mehr Zeit für verständnisorientierten Unterricht zu gewinnen.
- sicherzustellen, dass Ihre Schülerinnen und Schüler über ausreichendes Basiswissen verfügen.

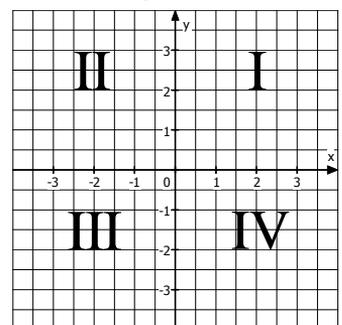
1. Funktionen

1.1 Ganzrationale Funktionen (Polynome)

| 1. Grades (Geraden) | 2. Grades (Parabeln) |
|---|---|
| <p>Hauptform : $y = mx + b$</p> <p>Steigung aus 2 Punkten: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$</p> <p>Punkt-Steigungs-Form (PSF): $y = m \cdot (x - x_1) + y_1$</p> <p>Steigungswinkel aus Steigung bestimmen: $m = \tan(\alpha)$</p> <p>Parallele Geraden: $m_1 = m_2$ (gleiche Steigung)</p> <p>Senkrechte (orthogonale) Geraden: Steigungen sind negative Kehrwerte voneinander: $m_2 = -\frac{1}{m_1}$ bzw. $m_1 \cdot m_2 = -1$</p> <p>1. Winkelhalbierende: $y = x$ ($m = 1$) 2. Winkelhalbierende: $y = -x$ ($m = -1$)</p>  <p> $K_f: y = 0,5x + 1$ $K_g: y = -0,5x - 2$ $K_h: y = 3,2$ $K_i: x = 2,2$ </p> | <p>Allg.: $f(x) = ax^2 + bx + c$</p> <p>Scheitelpunkt-Ansatz: $f(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$ mit $S(x_s y_s)$</p> <p>$a > 0$: nach oben geöffnet bzw. Verlauf von II nach I</p> <p>$a < 0$: nach unten geöffnet bzw. Verlauf von III nach IV</p> <p>Bei Symmetrie zur y-Achse: $f(x) = ax^2 + c$ (nur gerade Hochzahlen)</p>  <p> $K_f: f(x) = x^2$ $K_g: g(x) = 2x^2 - 2$ $K_h: h(x) = -2(x-3)^2 + 2$ $K_i: i(x) = -(x+3)^2$ </p> |

| 3. Grades | 4. Grades |
|---|---|
| <p>Allg.: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$</p> <p>$a > 0$: Verlauf von III nach I</p> <p>$a < 0$: Verlauf von II nach IV</p> <p>Ansatz bei Symmetrie zum Ursprung: $f(x) = ax^3 + cx$ (nur ungerade Hochzahlen)</p>  <p>$K_f: f(x) = x^3$ $K_g: g(x) = 1,5x^3 - 3x$ $K_h: h(x) = -2x^3 + 18x^2 - 53x + 53$</p> | <p>Allg.: $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$</p> <p>$a > 0$: Verlauf von II nach I</p> <p>$a < 0$: Verlauf von III nach IV</p> <p>Ansatz bei Symmetrie zur y-Achse: $f(x) = ax^4 + cx^2 + e$ (nur gerade Hochzahlen)</p>  <p>$K_f: f(x) = x^4$ $K_g: g(x) = 0,5x^4 - 2x^2 + 3$ $K_h: h(x) = -x^4 + 2x^3 - 1$</p> |

Die Quadranten

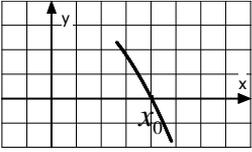
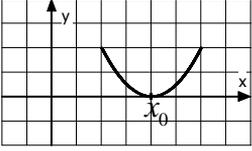
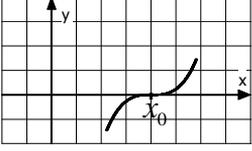
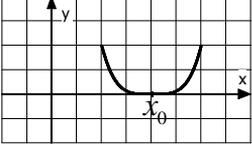


Tipp (für alle ganzrationalen Funktionen)

$a > 0$: Verlauf von ... nach **I** („endet **oben**“)

$a < 0$: Verlauf von ... nach **VI** („endet **unten**“)

Übersicht (für ganzrationale Funktionen)

| Vielfachheit Nullstelle | Faktor im Nullstellenansatz | Skizze | Beschreibung |
|--|--|---|--|
| Einfache Nullstelle: x_0 | $f(x) = \dots \cdot (x - x_0) \cdot \dots$ |  | Schaubild schneidet x -Achse (mit Vorzeichenwechsel VZW) |
| Doppelte Nullstelle: x_0 | $f(x) = \dots \cdot (x - x_0)^2 \cdot \dots$ |  | Schaubild berührt x -Achse (ohne VZW) |
| Dreifache Nullstelle: x_0 | $f(x) = \dots \cdot (x - x_0)^3 \cdot \dots$ |  | Schaubild schneidet und berührt x -Achse (mit VZW) |
| Vierfache Nullstelle: x_0 | $f(x) = \dots \cdot (x - x_0)^4 \cdot \dots$ |  | Schaubild berührt x -Achse (ohne VZW) („breiter“ geformt als doppelte Nullstelle) |

1.3 Gebrochenrationale Funktionen

Allg. $f(x) = \frac{\text{(ganzrationale) Funktion}}{\text{(ganzrationale) Funktion}}$ Beispiel: $f(x) = \frac{-2x^2 + 3x}{x + 2}$ (mit $D = \mathbb{R} \setminus -2$)

1. Untersuchung auf senkrechte Asymptoten

x -Werte, die im **Nenner** zum **Wert 0** führen, nennt man **Definitionslücken**. Solche x -Werte sind nicht in der Definitionsmenge der Funktion enthalten.

An einer Definitionslücke kann das Schaubild eine **senkrechte Asymptote** aufweisen.

(Hinweis: Asymptote = Näherungsgerade)

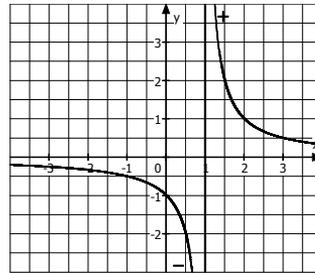
Fall 1 : Polstelle mit Vorzeichenwechsel (einfache Nullstelle des Nenners)

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{x-1}$ (mit $D = \mathbb{R} \setminus 1$)

Senkrechte Asymptote: $x = 1$

Für $x \rightarrow 1$ ($x < 1$) gilt: $f(x) \rightarrow -\infty$

Für $x \rightarrow 1$ ($x > 1$) gilt: $f(x) \rightarrow +\infty$



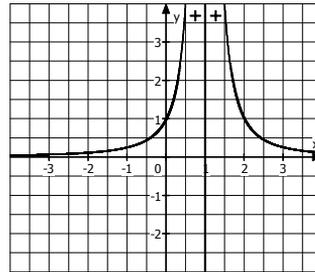
Fall 2 : Polstelle ohne Vorzeichenwechsel (doppelte Nullstelle des Nenners)

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ (mit $D = \mathbb{R} \setminus 1$)

Senkrechte Asymptote: $x = 1$

Für $x \rightarrow 1$ ($x < 1$) gilt: $f(x) \rightarrow +\infty$

Für $x \rightarrow 1$ ($x > 1$) gilt: $f(x) \rightarrow +\infty$



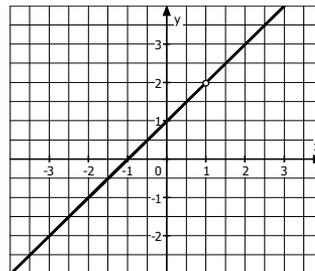
Fall 3 (Ausnahme) : Keine Polstelle (auch Nullstelle des Zählers)

Beispiel: $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ (mit $D = \mathbb{R} \setminus 1$)

Keine senkrechte Asymptote (trotz Definitionslücke)

Grund: $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1) \cdot (x+1)}{(x-1)} = x + 1$

Die Definitionslücke ist nach dem Kürzen „verschwunden“. Sie ist also (be-)hebbar. (Wobei die Ausgangsfunktion diese noch immer aufweist, siehe Schaubild.)

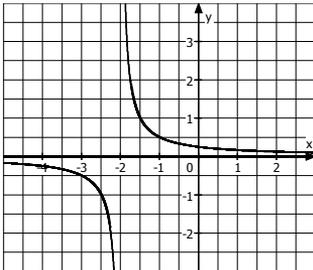


2. Untersuchung auf waagrechte Asymptoten (Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$)

Fall 1 : Zählergrad < Nennergrad : x - Achse ist waagrechte Asymptote

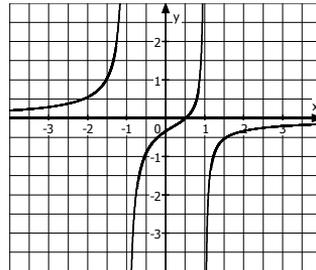
$$f(x) = \frac{1}{2x+4} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Grad 0} \\ \text{Grad 1} \end{array} \right)$$

waagrechte Asymptote: $y = 0$ (x -Achse)



$$f(x) = \frac{-2x+1}{3x^2-3} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Grad 1} \\ \text{Grad 2} \end{array} \right)$$

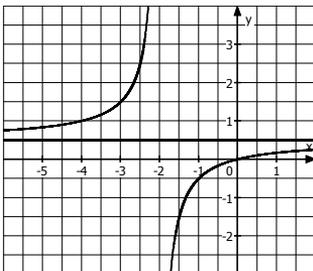
waagrechte Asymptote: $y = 0$ (x -Achse)



Fall 2 : Zählergrad = Nennergrad : Waagrechte Asymptote

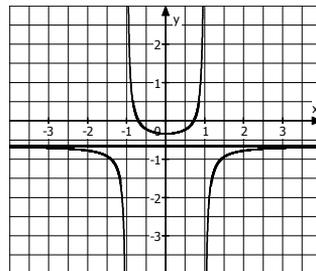
$$f(x) = \frac{1x}{2x+4} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Grad 1} \\ \text{Grad 1} \end{array} \right)$$

waagrechte Asymptote: $y = \frac{1}{2}$



$$f(x) = \frac{-2x^2+1}{3x^2-3} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Grad 2} \\ \text{Grad 2} \end{array} \right)$$

waagrechte Asymptote: $y = -\frac{2}{3}$



Fall 3 : Zählergrad > Nennergrad: Keine waagrechte Asymptote.

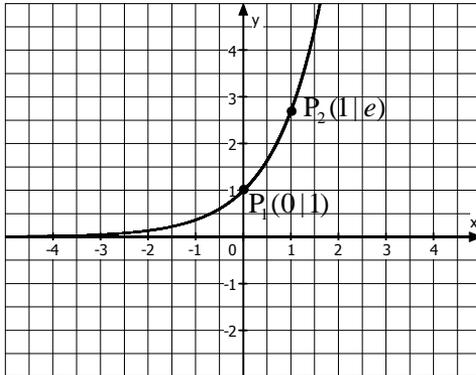
(Keine Beispiele, da nicht relevant für das Abitur.)

Hinweise

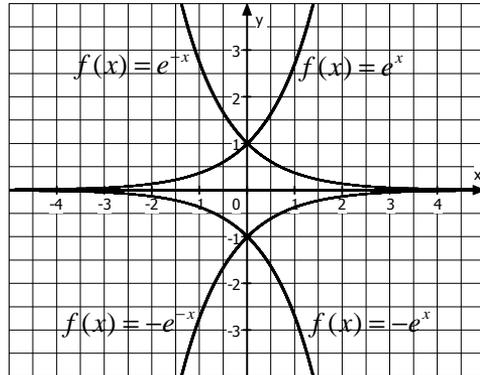
- x -Werte, für die der **Nenner** gleich **0** ist sind **Definitionslücken** $\left(\frac{\dots}{0} = ? \right)$
- x -Werte, für die der **Zähler** gleich **0** ist sind **Nullstellen** $\left(\frac{0}{\dots} = 0 \right)$

1.4 Exponentialfunktionen

1. Verlauf : $f(x) = e^x$



2. Spiegelungen



3. Koeffizienten in : $f(x) = a \cdot e^{b \cdot (x-c)} + d$

a - Streckung / Stauchung in y-Richtung

$a > 1$: „steiler“
 $0 < a < 1$: „flacher“
 $(a < 0$: an der x-Achse gespiegelt)

b - ansteigendes oder fallendes Schaubild

$b > 0$: ansteigendes Schaubild
 $b < 0$: fallendes Schaubild
 (bzw. an der y-Achse gespiegelt)

c - Verschiebung in x-Richtung

$c > 0$: nach rechts
 $c < 0$: nach links

d - Verschiebung in y-Richtung

($y = d$ ist Asymptote)

$d > 0$: nach oben
 $d < 0$: nach unten

Vorsicht beim Koeffizienten c

Das Schaubild zu $f(x) = e^{x-3}$ wurde um 3 Einheiten nach *rechts* verschoben!

Der Koeffizient c hat hier den Wert +3, das Minuszeichen kommt vom allgemeinen Ansatz der Funktion.

Entsprechend $f(x) = e^{x+2}$: Verschiebung um 2 nach *links*!

4. Asymptoten (Naherungsgeraden)

| Beispielfunktion | Asymptote | Schaubilder |
|-----------------------------|---|-------------|
| $f(x) = e^x$ | $y = 0$ (x -Achse) für $x \rightarrow -\infty$ | |
| $g(x) = e^x + 2,2$ | $y = 2,2$ für $x \rightarrow -\infty$ | |
| $h(x) = e^{-x} + 2,2$ | $y = 2,2$ für $x \rightarrow +\infty$ | |
| $i(x) = e^{-x} + x - 1$ | $y = x - 1$ für $x \rightarrow +\infty$ | |
| $j(x) = 0,5e^{x-2} + x - 1$ | $y = x - 1$ für $x \rightarrow -\infty$ | |

1. Regel (Asymptotengleichung): $y =$ „Exponentialgleichung ohne $e^{\dots x}$ “

Man erhält die Asymptotengleichung, indem man die Gleichung der Exponentialfunktion schlicht übernimmt, jedoch hierbei auf den Summanden im Funktionsterm, der $e^{\dots x}$ enthält (dieser strebt gegen 0), verzichtet.

2. Regel (Annaherungsrichtung): Bei e^{+x} für $x \rightarrow -\infty$ bzw. bei e^{-x} für $x \rightarrow +\infty$

Die Annaherungsrichtung wird durch den Summanden im Funktionsterm, der $e^{\dots x}$ enthält, festgelegt: Steht vor dem x im Exponenten ein Pluszeichen, so nähert sich die Asymptote für große negative x -Werte („links“ im Koordinatensystem) dem Schaubild an.

Steht hier hingegen ein Minuszeichen, so findet die Annäherung bei großen positiven x -Werten („rechts“ im Koordinatensystem) statt.

5. Anwendungen

Wachstumsvorgänge werden oft mit dem Typ $f(x) = e^{+x}$ modelliert, Zerfallsvorgänge hingegen mit $f(x) = e^{-x}$.