Gruber I Neumann

Erfolg im Mathe-Abi 2020

Übungsbuch für den Pflichtteil
Baden-Württemberg
mit Tipps und Lösungen

Freiburger Verlag

Helmut Gruber, geb. 1968, studierte Mathematik und Physik in Konstanz und Freiburg und ist seit 1995 Mathematiklehrer in der Oberstufe.

Robert Neumann, geb. 1970, studierte Mathematik und Physik in Freiburg und unterrichtet Mathematik in der Oberstufe seit 1999.

PEFC/04-31-1867

PEFC zertifiziert

Dieses Produkt stammt aus nachhaltig bewirtschafteten Wäldern und kontrollierten Quellen.

www.pefc.de

©2019 Freiburger Verlag GmbH, Freiburg im Breisgau
18. Auflage. Alle Rechte vorbehalten
Gedruckt in Deutschland
www.freiburger-verlag.de

Inhaltsverzeichnis

Analysis

1 Ableiten **8**

1.1 Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten 8

1.2 Potenzfunktionen mit negativen Exponenten 9

1.3 Potenzfunktionen mit gebrochenen Exponenten 9

1.4 Exponentialfunktionen 9

1.5 Trigonometrische Funktionen 9

1.6 Vermischte Aufgaben 9

2 Stammfunktionen und Integrale **10**

2.1 Stammfunktionen 10

2.2 Integrale 11

2.3 Integralgleichungen 11

2.4 Flächeninhalt zwischen zwei Kurven 11

3 Gleichungen **13**

3.1 Potenzgleichungen 13

3.2 Potenzgleichungen mit Parameter 13

3.3 Exponentialgleichungen 14

3.4 Bruchgleichungen 15

3.5 Trigonometrische Gleichungen 15

3.6 Ungleichungen 17

4 Funktionen und Schaubilder **18**

4.1 Von der Gleichung zur Kurve 18

4.2 Aufstellen von Funktionen mit Randbedingungen 20

4.3 Von der Kurve zur Gleichung 23

4.4 Schaubilder von f, f' und F 26

4.5 Kurvendiskussion 32

4.6 Verständnis von Zusammenhängen 35

Geometrie

5 Punkte, Geraden und Ebenen **37**

5.1 Rechnen mit Vektoren 37

5.2 Geraden 39

5.3 Ebenen 41

5.4 Gegenseitige Lage von Geraden und Ebenen 45

5.5 Gegenseitige Lage von Ebenen 46

6 Abstände, Winkel und Spiegelungen **49**

6.1 Abstandsberechnungen 49

6.2 Winkelberechnungen 51

6.3 Spiegelungen 52

6.4 Verständnis von Zusammenhängen 53

Stochastik

7 Wahrscheinlichkeitsrechnung **54**

7.1 Baumdiagramme und Pfadregeln 54

7.2 Binomialverteilung 59

7.3 Erwartungswert 62

7.4 Verständnis von Zusammenhängen 64

Tipps **66**

Lösungen **95**

Abituraufgaben **200**

Stichwortverzeichnis **255**

Vorwort

Erfolg von Anfang an

...ist das Geheimnis eines guten Abiturs.

Das vorliegende Übungsbuch ist speziell auf die grundlegenden Anforderungen des Pflichtteils (hilfsmittelfreier Teil: HMF) des Mathematik-Abiturs 2020 in Baden-Württemberg abgestimmt. Es umfasst die drei großen Themenbereiche Analysis, Geometrie und Stochastik sowie angepasste und erweiterte Abituraufgaben seit 2014 in einem Buch. Seit 2017 ist die Struktur des hilfsmittelfreien Teils geändert: Es sind insgesamt maximal 20 Verrechnungspunkte (VP) zu erreichen, davon 10 VP in Analysis, 8 VP in Geometrie und 2 VP in Stochastik. *Daher haben wir Original-Prüfungsaufgaben gekürzt und an die neuen Bestimmungen angepasst.* Somit erhalten Sie die bestmögliche Vorbereitung auf die Abiturprüfung.

frv.tv

Im Internet finden Sie unter **frv.tv/bw** weitere Videos, in denen die grundlegenden Themen an einfachen Beispielen erklärt werden. Die entsprechenden Stellen sind im Buch mit einem Kamerasymbol gekennzeichnet.

Der Pflichtteil (HMF) besteht aus mehreren kleinen Aufgaben, die ohne Taschenrechner und ohne Formelsammlung zu lösen sind. Genau hierfür wurde das vorliegende Buch konzipiert: Es fördert das Grundwissen und die Grundkompetenzen in Mathematik, vom einfachen Rechnen und Formelanwenden bis hin zum Verstehen von gedanklichen Zusammenhängen. Das Übungsbuch ist eine Hilfe zum Selbstlernen (learning by doing) und bietet die Möglichkeit, sich intensiv auf die Prüfung vorzubereiten und gezielt Themen zu vertiefen. Hat man Erfolg bei den grundlegenden Aufgaben, machen Mathematik und das Lernen mehr Spaß.

Der blaue Tippteil

Hat man keine Idee, wie man eine Aufgabe angehen soll, hilft der blaue Tippteil zwischen Aufgaben und Lösungen weiter: Zu jeder Aufgabe gibt es dort Tipps, die helfen, einen Ansatz zu finden, ohne die Lösung vorwegzunehmen.

Die Kontrollkästchen

Damit Sie immer den Überblick behalten können, welche Aufgaben Sie schon bearbeitet haben, befindet sich neben jedem Aufgabentitel ein Kontrollkästchen zum Abhaken.

Wie arbeiten Sie mit diesem Buch?

Am Anfang jedes Kapitels finden Sie eine kurze Übersicht über die jeweiligen Themen. Die einzelnen Kapitel bauen zwar aufeinander auf, doch ist es nicht zwingend notwendig, das Buch der Reihe nach durchzuarbeiten. Die Aufgaben sind in der Regel in ihrer Schwierigkeit gestaffelt. Von fast jeder Aufgabe gibt es mehrere Variationen zum Vertiefen.
In der Mitte des Buches finden Sie den blauen Tippteil mit Denk- und Lösungshilfen.
Die Lösungen mit ausführlichen verständlichen Lösungswegen bilden den dritten Teil des Übungsbuchs. Hier finden Sie die notwendigen Formeln, Rechenverfahren und Denkschritte sowie manchmal alternative Lösungswege.

Im Anhang ab Seite 200 befinden sich die angepassten und erweiterten Abituraufgaben mit Tipps und ausführlichen Lösungen.

Der Aufbau des Mathematik-Abiturs

- Die gesamte Prüfungszeit beträgt 270 Minuten (4,5 Zeitstunden).
- Die Schülerinnen und Schüler erhalten zu Beginn der Prüfung alle Aufgaben (den Pflichtteil (HMF) und den vom Lehrer ausgesuchten Wahlteil Analysis, Geometrie und Stochastik). Sie erhalten zu diesem Zeitpunkt noch keine Hilfsmittel.
- Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten zuerst den Pflichtteil (HMF). Nach dessen Abgabe erhalten sie die Hilfsmittel (Taschenrechner, Merkhilfe) für den Wahlteil.

Insgesamt können maximal 60 Verrechnungspunkte in der Prüfung erzielt werden, davon 20 im Pflichtteil (HMF) und 40 im Wahlteil.

Die Abiturnote

Aus den Verrechnungspunkten ergeben sich folgende Notenpunkte

Verrechnungspunkte	Notenpunkte	Note
0 - 10	0	ungenügend
11 - 14 15 - 18 19 - 22	1 2 3	mangelhaft
23 - 26 27 - 29 30 - 32	4 5 6	ausreichend
33 - 35 36 - 38 39 - 41	7 8 9	befriedigend
42 - 44 45 - 47 48 - 50	10 11 12	gut
51 - 53 54 - 56 57 - 60	13 14 15	sehr gut

Allen Schülerinnen und Schülern, die sich auf das Abitur vorbereiten, wünschen wir viel Erfolg.

Helmut Gruber, Robert Neumann

Stochastik

7 Wahrscheinlichkeitsrechnung

7.1 Baumdiagramme und Pfadregeln

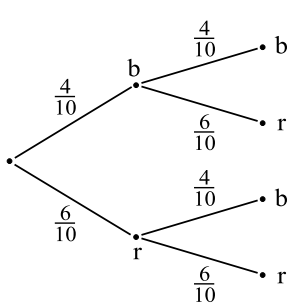
Tipps ab Seite 90, Lösungen ab Seite 181

In diesem Kapitel geht es darum, mit Hilfe bereits bekannter Wahrscheinlichkeiten von einzelnen Ergebnissen die Wahrscheinlichkeiten weiterer, oft «komplizierterer» Ereignisse zu bestimmen. Ein wichtiges Hilfsmittel zur Veranschaulichung hierfür sind *Baumdiagramme*. Sie sind insbesondere bei mehrstufigen Zufallsexperimenten hilfreich. Eine Verzweigung entspricht dabei den möglichen Versuchausgängen der jeweiligen Stufe; längs der «Äste» werden die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten notiert.
Bei mehrstufigen Zufallsexperimenten unterscheidet man *geordnete Stichproben* (d.h. Beachtung der Reihenfolge) von *ungeordneten Stichproben*; beide Stichprobenarten können *mit oder ohne Zurücklegen* durchgeführt werden. Bei der Erstellung des Baumdiagrammes muss man darauf achten, dass sich bei Stichproben ohne Zurücklegen die Wahrscheinlichkeiten bei jeder Stufe ändern.
Manchmal ist es auch geschickt oder hilfreich die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A mit der Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses $\bar{A}$ zu berechnen; dies ist vor allem (aber nicht immer) bei den Signalwörtern «mindestens» oder «höchstens» der Fall. Es gilt dann für die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

1. Beispiel: Ziehen mit Zurücklegen

Ein Gefäß enthält 4 blaue und 6 rote Kugeln. Es werden 2 Kugeln mit Zurücklegen gezogen.
Da 4 blaue und 6 rote, also insgesamt 10 Kugeln in der Urne sind, beträgt die Wahrscheinlichkeit bei jedem Ziehen für die Ergebnisse blau (b): $\frac{4}{10}$ und für rot (r): $\frac{6}{10}$.
Damit erhält man folgendes Baumdiagramm:



Wichtige Rechenregeln für Baumdiagramme sind die *1. Pfadregel* und die *2. Pfadregel*:
Die 1. Pfadregel (Produktregel) besagt, dass man die Wahrscheinlichkeit längs eines Pfades berechnet, indem man die Wahrscheinlichkeiten der zugehörigen Äste miteinander multipliziert.
Mit der 2. Pfadregel (Summenregel) kann man die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses berechnen, indem man die Wahrscheinlichkeiten aller zugehörigen Pfade addiert.

Will man beispielsweise die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass beide Kugeln rot sind, so ergibt sich mit Hilfe der 1. Pfadregel:

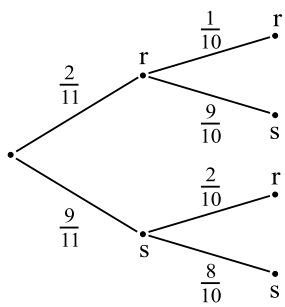
$$P(\text{«beide Kugeln rot»}) = P(rr) = \frac{6}{10} \cdot \frac{6}{10} = \frac{36}{100} = 0,36$$

Will man die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass beide Kugeln gleichfarbig sind, so ergibt sich mit Hilfe der 1. und 2. Pfadregel:

$$P(\text{«beide Kugeln gleichfarbig»}) = P(rr) + P(bb) = \frac{6}{10} \cdot \frac{6}{10} + \frac{4}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{36}{100} + \frac{16}{100} = \frac{52}{100} = 0,52$$

2. Beispiel: Ziehen ohne Zurücklegen

Eine Urne enthält 2 rote und 9 schwarze Kugeln. Es werden 2 Kugeln gleichzeitig gezogen. Das gleichzeitige Ziehen entspricht dem Ziehen ohne Zurücklegen. Man erhält folgendes Baumdiagramm:



Da 2 rote und 9 schwarze, also insgesamt 11 Kugeln in der Urne sind, beträgt die Wahrscheinlichkeit beim 1. Ziehen für rot (r): $\frac{2}{11}$ und für schwarz (s): $\frac{9}{11}$.

Beim 2. Ziehen sind nur noch 10 Kugeln vorhanden und die Wahrscheinlichkeiten hängen davon ab, welche Farbe schon gezogen wurde.

Will man beispielsweise die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass genau eine Kugel schwarz ist, ergibt sich mit Hilfe der 1. und 2. Pfadregel (Produkt- und Summenregel):

$$P(\text{«genau eine schwarze Kugel»}) = P(rs) + P(sr) = \frac{2}{11} \cdot \frac{9}{10} + \frac{9}{11} \cdot \frac{2}{10} = \frac{9}{55} + \frac{9}{55} = \frac{18}{55}$$

Will man die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass mindestens eine der beiden Kugeln schwarz ist, erhält man mit Hilfe des Gegenereignisses:

$$\begin{aligned} P(\text{«mindestens eine schwarze Kugel»}) &= 1 - P(\text{«keine schwarze Kugel»}) \\ &= 1 - P(rr) \\ &= 1 - \frac{2}{11} \cdot \frac{1}{10} \\ &= 1 - \frac{1}{55} \\ &= \frac{54}{55} \end{aligned}$$

7.1.1 Ziehen mit Zurücklegen □

a) Eine Urne enthält 4 rote, 3 weiße und 2 gelbe Kugeln. Es werden 2 Kugeln mit Zurücklegen gezogen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
A: Es werden eine weiße und eine gelbe Kugel gezogen.
B: Es wird keine weiße Kugel gezogen.

b) Ein Gefäß enthält 8 rote, 4 blaue und 2 weiße Kugeln. Es werden 2 Kugeln mit Zurücklegen gezogen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
A: Es wird keine rote Kugel gezogen.
B: Es wird höchstens eine rote Kugel gezogen.

c) In einem Behälter befinden sich 3 rote und 5 gelbe Kugeln. Es werden 2 Kugeln mit Zurücklegen gezogen.

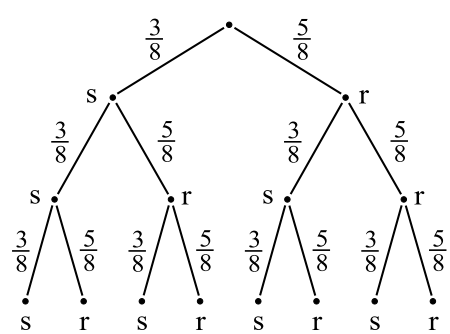
I) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine der beiden Kugeln gelb ist.

II) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm, wenn im Behälter 3 rote und eine unbekannte Anzahl gelber Kugeln vorhanden sind und zwei Kugeln mit Zurücklegen gezogen werden.

d) In einer Urne befinden sich rote und schwarze Kugeln. Es ergibt sich das nebenstehende Baumdiagramm.

I) Beschreiben Sie eine Situation, die zu diesem Baumdiagramm passt.

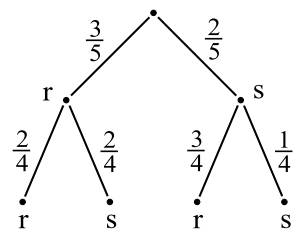
II) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine Kugel rot ist.



7.1.2 Ziehen ohne Zurücklegen □

a) In einer Urne befinden sich 2 grüne, 3 rote und 5 blaue Kugeln. Es werden 2 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
A: Es werden eine grüne und eine rote Kugel gezogen.
B: Es wird keine blaue Kugel gezogen.

b) In einer Urne befinden sich rote und schwarze Kugeln. Es ergibt sich folgendes Baumdiagramm:



I) Beschreiben Sie eine Situation, die zu diesem Baumdiagramm passt.

II) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kugeln gleichfarbig sind.

c) In einer Urne sind 7 weiße, 5 schwarze und 3 rote Kugeln. Es werden 3 Kugeln gleichzeitig gezogen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
A: Es werden eine weiße und zwei schwarze Kugeln gezogen.
B: Es wird mindestens eine weiße Kugel gezogen.

d) In einer Urne sind 4 weiße und eine unbekannte Anzahl roter Kugeln. Es werden 2 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.

I) Berechnen Sie die Anzahl roter Kugeln, wenn die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kugeln weiß sind, $\frac{1}{6}$ beträgt.

II) Berechnen Sie die Anzahl roter Kugeln, wenn die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine Kugel weiß ist, $\frac{2}{3}$ beträgt.

7.1.3 Mehrstufige Experimente □

a) In einem Gefäß G_1 befinden sich 2 rote und 3 blaue Kugeln, in einem Gefäß G_2 sind 2 rote und 4 blaue Kugeln.

I) Aus G_1 werden 2 Kugeln mit Zurücklegen gezogen, anschließend wird aus G_2 eine Kugel gezogen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 2 rote Kugeln gezogen wurden.

II) Aus G_1 werden 2 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen und in Gefäß G_2 gelegt, anschließend wird aus G_2 eine Kugel gezogen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau 1 rote Kugel gezogen wurde.

b) In einer Lostrommel sind 3 Gewinne und 7 Nieten. Eine Person kauft 3 Lose.

   I) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau 2 Gewinne gezogen werden.

   II) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Gewinn erst beim dritten Zug gezogen wird.

c) In drei Tablettenpackungen mit je 10 Tabletten sind gelbe und weiße Tabletten. In der ersten Packung gibt es eine gelbe Tablette, in der zweiten Packung sind zwei gelbe Tabletten und in der dritten Packung sind drei gelbe Tabletten.

   I) Aus der dritten Packung werden 3 Tabletten entnommen. Berechnen Sie die r Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 2 gelbe Tabletten gezogen werden.

   II) Es wird eine Packung ausgewählt und dieser werden 2 Tabletten entnommen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass beide Tabletten gelb sind.

d) Ein Kartenspiel besteht aus 2 Stapeln Karten. Im ersten Stapel sind 2 rote und 3 schwarze Karten, im zweiten Stapel gibt es 2 rote und 4 schwarze Karten.

   I) Vom ersten und vom zweiten Stapel werden jeweils 2 Karten ohne Zurücklegen gezogen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass alle Karten rot sind.

   II) Vom ersten Stapel werden 2 Karten gezogen und mit den Karten des 2. Stapels vermischt. Anschließend wird vom 2. Stapel eine Karte gezogen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass diese gezogene Karte schwarz ist.

Stochastik

7 Wahrscheinlichkeitsrechnung

7.1 Baumdiagramme und Pfadregeln

7.1.1 Ziehen mit Zurücklegen

a) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm mit den Ästen rot (r), weiß (w) und gelb (g). Beachten Sie, dass die Wahrscheinlichkeiten bei jedem Ziehen gleich bleiben. Überlegen Sie, welche Ergebnisse zum gesuchten Ereignis A gehören und verwenden Sie die Pfadregeln.
Zeichnen Sie ein Baumdiagramm mit den Ästen weiß (w) und nicht weiß ($\bar{w}$). Beachten Sie, dass die Wahrscheinlichkeiten bei jedem Ziehen gleich bleiben. Überlegen Sie, welches Ergebnis zum gesuchten Ereignis B gehört und verwenden Sie die 1. Pfadregel.

b) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm mit den Ästen rot (r) und nicht rot ($\bar{r}$). Beachten Sie, dass die Wahrscheinlichkeiten bei jedem Ziehen gleich bleiben. Überlegen Sie, welches Ergebnis zum gesuchten Ereignis A gehört und verwenden Sie die 1. Pfadregel.
Überlegen Sie, welche Ergebnisse zum gesuchten Ereignis B gehören und verwenden Sie die Pfadregeln oder rechnen Sie alternativ mit dem Gegenereignis $\overline{B}$ und verwenden Sie $P(B) = 1 - P(\bar{B})$.

c) I) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm mit den Ästen rot (r) und gelb (g). Beachten Sie, dass die Wahrscheinlichkeiten bei jedem Ziehen gleich bleiben. Überlegen Sie, welche Ergebnisse zum gesuchten Ereignis gehören und verwenden Sie die Pfadregeln oder rechnen Sie alternativ mit dem Gegenereignis $\overline{A}$ und verwenden Sie $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

II) Wählen Sie n als Anzahl der gelben Kugeln und überlegen Sie, wie viele Kugeln insgesamt vorhanden sind.

d) I) Überlegen Sie, wie viele Kugeln insgesamt mindestens vorhanden sein müssen und beachten Sie, ob sich die Wahrscheinlichkeiten für rot oder schwarz bei jedem Ziehen ändern oder nicht.

II) Rechnen Sie mit dem Gegenereignis $\overline{A}$ und verwenden Sie $P(A) = 1 - P(\bar{A})$ sowie die 1. Pfadregel.

7.1.2 Ziehen ohne Zurücklegen

a) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm mit den Ästen rot (r), grün (g) und blau (b). Beachten Sie, dass sich die Wahrscheinlichkeiten bei jedem Ziehen ändern. Überlegen Sie, welche Ergebnisse zum gesuchten Ereignis A gehören und verwenden Sie die Pfadregeln.
Zeichnen Sie ein Baumdiagramm mit den Ästen blau (b) und nicht blau ($\bar{b}$). Beachten Sie, dass sich die Wahrscheinlichkeiten bei jedem Ziehen ändern. Überlegen Sie, welches Ergebnis zum gesuchten Ereignis B gehört und verwenden Sie die 1. Pfadregel.

b) I) Überlegen Sie, wie viele Kugeln insgesamt mindestens vorhanden sein müssen und beachten Sie, ob sich die Wahrscheinlichkeiten für rot oder schwarz bei jedem Ziehen ändern oder nicht.

II) Überlegen Sie, welche Ergebnisse zum gesuchten Ereignis gehören und verwenden Sie die Pfadregeln.

c) Beachten Sie, dass gleichzeitiges Ziehen einem Ziehen ohne Zurücklegen entspricht und dass sich die Wahrscheinlichkeiten bei jedem Ziehen ändern. Überlegen Sie, welche Ergebnisse zum gesuchten Ereignis A gehören und verwenden Sie die Pfadregeln.
Zeichnen Sie ein Baumdiagramm mit den Ästen weiß (w) und nicht weiß ($\bar{w}$). Beachten Sie, dass sich die Wahrscheinlichkeiten bei jedem Ziehen ändern. Rechnen Sie mit dem Gegenereignis $\overline{B}$ und verwenden Sie $P(B) = 1 - P(\bar{B})$ sowie die 1. Pfadregel.

d) I) Wählen Sie n als Anzahl der roten Kugeln und zeichnen Sie ein Baumdiagramm mit den Ästen rot (r) und weiß (w). Beachten Sie, dass sich die Wahrscheinlichkeiten bei jedem Ziehen ändern. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für das gesuchte Ereignis mit Hilfe der 1. Pfadregel in Abhängigkeit von n, stellen Sie eine quadratische Gleichung auf und lösen Sie diese mit Hilfe der *pq*- bzw. *abc*-Formel. Beachten Sie, dass $n > 0$ sein muss.

II) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für das gesuchte Ereignis mit Hilfe des Gegenereignisses in Abhängigkeit von n; verwenden Sie $P(A) = 1 - P(\bar{A})$. Stellen Sie eine quadratische Gleichung auf und lösen Sie diese mit Hilfe der *pq*- bzw. *abc*-Formel. Beachten Sie, dass $n > 0$ sein muss.

7.1.3 Mehrstufige Experimente

a) I) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm mit den Ästen rot (r) und blau (b). Beachten Sie, dass es sich um ein dreistufiges Experiment handelt und sich beim Ziehen mit Zurücklegen die Wahrscheinlichkeiten nicht ändern. Überlegen Sie, welche Ergebnisse zum gesuchten Ereignis gehören und verwenden Sie die Pfadregeln.

II) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm mit den Ästen rot (r) und blau (b). Beachten Sie, dass es sich um ein dreistufiges Experiment handelt und sich die Wahrscheinlichkeiten bei jedem Ziehen ändern. Überlegen Sie, welche Ergebnisse zum gesuchten Ereignis gehören und verwenden Sie die Pfadregeln.

b) I) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm mit den Ästen Gewinn (g) und Niete (n). Beachten Sie, dass sich beim Ziehen ohne Zurücklegen die Wahrscheinlichkeiten bei jedem Ziehen ändern. Überlegen Sie, welche Ergebnisse zum gesuchten Ereignis gehören und verwenden Sie die Pfadregeln.

II) Überlegen Sie, welche Lose zuerst gezogen werden müssen und verwenden Sie die 1. Pfadregel.

c) I) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm mit den Ästen Packung (P_1 bzw. P_2 und P_3) sowie gelb (g) und weiß (w). Beachten Sie, dass sich beim Ziehen ohne Zurücklegen die Wahrscheinlichkeiten bei jedem Ziehen ändern. Überlegen Sie, welche Ergebnisse zum gesuchten Ereignis gehören und verwenden Sie die Pfadregeln.

II) Beachten Sie, dass es sich um ein dreistufiges Experiment handelt. Bestimmen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit für das Wählen einer Schachtel und anschließend die Wahrscheinlichkeiten für das Ziehen von zwei gelben Tabletten (falls möglich). Beachten Sie, dass sich beim Ziehen ohne Zurücklegen die Wahrscheinlichkeiten bei jedem Zug ändern.

d) I) Beachten Sie, dass es sich um ein vierstufiges Experiment handelt, bei welchem die Wahrscheinlichkeiten miteinander multipliziert werden. Die Wahrscheinlichkeiten einer jeden Stufe erhalten Sie mit Hilfe der 1. Pfadregel für das Ziehen ohne Zurücklegen.

II) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm mit den Ästen rot (r) und schwarz (s). Beachten Sie, dass sich beim Ziehen ohne Zurücklegen die Wahrscheinlichkeiten bei jedem Ziehen ändern. Überlegen Sie, wie viele Karten am Ende in Stapel 2 sind und welche Ergebnisse zum gesuchten Ereignis gehören; verwenden Sie die Pfadregeln.

7.2 Binomialverteilung

a) I) Legen Sie X als binomialverteilte Zufallsvariable für die Anzahl der Treffer mit den Parametern p und n fest.
Verwenden Sie die Bernoulli-Formel $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$.

II) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für einen Fehlwurf. Legen Sie Y als binomialverteilte Zufallsvariable für die Anzahl der Fehlwürfe mit den Parametern p und n fest. Verwenden Sie die Bernoulli-Formel $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ zweimal.

b) I) Bestimmen Sie n, p und k und verwenden Sie die Bernoulli-Formel
$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$.

II) Für ein Ereignis A beachten Sie den Zusammenhang zur Bernoulli-Formel
$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$.
Für ein Ereignis B formen Sie die gegebene Wahrscheinlichkeit so um, dass die obige Formel sichtbar wird: Beachten Sie, dass für ein Gegenereignis gilt: $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

c) I) Verwenden Sie die Bernoulli-Formel $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$.

II) Überlegen Sie, welche Wahrscheinlichkeiten addiert werden müssen bzw. rechnen Sie mit dem Gegenereignis $\overline{A}$ und verwenden Sie $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

d) I) Bestimmen Sie n, p und k und verwenden Sie die Bernoulli-Formel
$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$.

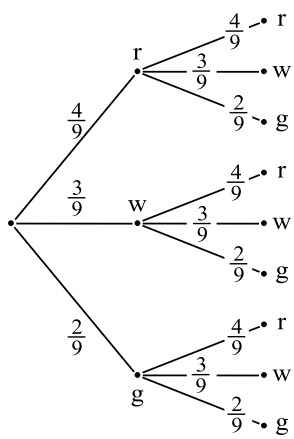
Stochastik

7 Wahrscheinlichkeitsrechnung

7.1 Baumdiagramme und Pfadregeln

7.1.1 Ziehen mit Zurücklegen

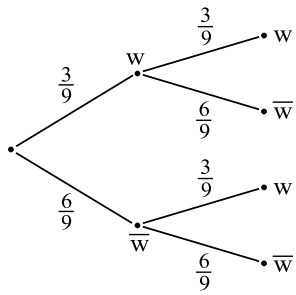
a)



Da 4 rote, 3 weiße und 2 gelbe, also insgesamt 9 Kugeln in der Urne sind, betragen die Wahrscheinlichkeiten bei jedem Ziehen für rot (r), weiß (w) bzw. gelb (g): $\frac{4}{9}, \frac{3}{9}$ bzw. $\frac{2}{9}$.

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A, eine weiße und eine gelbe Kugel zu ziehen, erhält man mit Hilfe der 1. und 2. Pfadregel (Produkt- und Summenregel):

$$P(A) = P(wg) + P(gw) = \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{9} = \frac{4}{27}$$

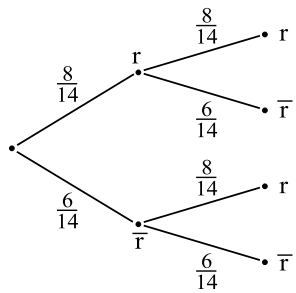


Da 3 weiße und 6 nicht weiße, also insgesamt 9 Kugeln in der Urne sind, beträgt die Wahrscheinlichkeit bei jedem Ziehen für weiß (w): $\frac{3}{9}$ und für nicht weiß ($\bar{w}$): $\frac{6}{9}$.

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B, keine weiße Kugel zu ziehen, erhält man mit Hilfe der 1. Pfadregel (Produktregel):

$$P(B) = P(\bar{w}\bar{w}) = \frac{6}{9} \cdot \frac{6}{9} = \frac{4}{9}$$

b) A:



Da 8 rote und 6 nicht rote, also insgesamt 14 Kugeln in der Urne sind, beträgt die Wahrscheinlichkeit bei jedem Ziehen für rot (r): $\frac{8}{14}$ und für nicht rot ($\bar{r}$): $\frac{6}{14}$.
Die Wahrscheinlichkeit, keine rote Kugel zu ziehen, erhält man mit Hilfe der 1. Pfadregel (Produktregel):

$$P(\text{«keine rote Kugel»}) = P(\bar{r}\bar{r}) = \frac{6}{14} \cdot \frac{6}{14} = \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{9}{49}$$

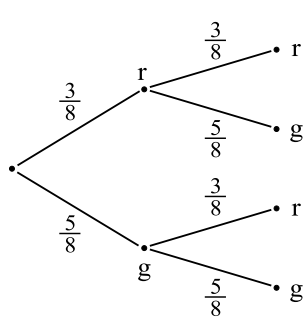
B: Die Wahrscheinlichkeit, höchstens eine rote Kugel zu ziehen, erhält man mit Hilfe der 1. und 2. Pfadregel (Produkt- und Summenregel):

$$\begin{aligned} P(\text{«höchstens eine rote Kugel»}) &= P(\bar{r}\bar{r}) + P(\bar{r}r) + P(r\bar{r}) \\ &= \frac{6}{14} \cdot \frac{6}{14} + \frac{6}{14} \cdot \frac{8}{14} + \frac{8}{14} \cdot \frac{6}{14} \\ &= \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} + \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{7} + \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} \\ &= \frac{9}{49} + \frac{12}{49} + \frac{12}{49} \\ &= \frac{33}{49} \end{aligned}$$

Alternativ kann man auch mit dem Gegenereignis rechnen:

$$\begin{aligned} P(\text{«höchstens eine rote Kugel»}) &= 1 - P(\text{«zwei rote Kugeln»}) \\ &= 1 - P(rr) \\ &= 1 - \frac{8}{14} \cdot \frac{8}{14} \\ &= 1 - \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} \\ &= \frac{49}{49} - \frac{16}{49} \\ &= \frac{33}{49} \end{aligned}$$

c) I)



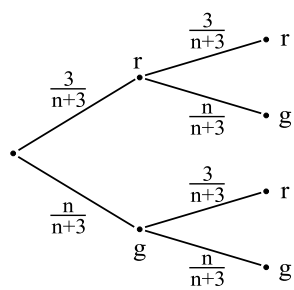
Da 3 rote und 5 gelbe, also insgesamt 8 Kugeln im Behälter sind, beträgt die Wahrscheinlichkeit bei jedem Ziehen für gelb (g): $\frac{5}{8}$ und für rot (r): $\frac{3}{8}$.
Die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine gelbe Kugel zu ziehen, erhält man mit Hilfe der 1. und 2. Pfadregel (Produkt- und Summenregel):

$$\begin{aligned}
P(\text{«mindestens eine gelbe Kugel»}) &= P(rg) + P(gr) + P(gg) \\
&= \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{8} + \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{8} + \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} \\
&= \frac{15}{64} + \frac{15}{64} + \frac{25}{64} \\
&= \frac{55}{64}
\end{aligned}$$

Alternativ kann man auch mit dem Gegenereignis rechnen:

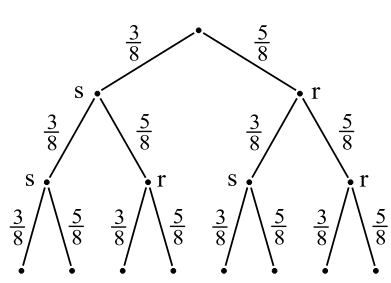
$$\begin{aligned}
P(\text{«mindestens eine gelbe Kugel»}) &= 1 - P(\text{«keine gelbe Kugel»}) \\
&= 1 - P(rr) \\
&= 1 - \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} \\
&= \frac{64}{64} - \frac{9}{64} \\
&= \frac{55}{64}
\end{aligned}$$

II)



Wenn im Behälter 3 rote und eine unbekannte Anzahl (n) gelber Kugeln vorhanden sind, gibt es insgesamt $n+3$ Kugeln. Damit beträgt die Wahrscheinlichkeit bei jedem Ziehen für gelb (g): $\frac{n}{n+3}$ und für rot (r): $\frac{3}{n+3}$.

d) I)



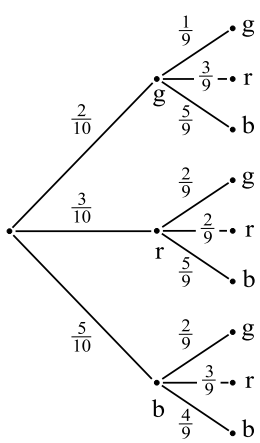
Zum Baumdiagramm passt z.B. folgende Situation:
In einer Urne befinden sich 5 rote und 3 schwarze Kugeln. Es werden drei Kugeln mit Zurücklegen gezogen, da die Wahrscheinlichkeiten beim 2. und beim 3. Zug gleich groß sind wie beim 1. Zug.

II) Die Wahrscheinlichkeit beträgt bei jedem Zug für rot (r): $\frac{5}{8}$ und für schwarz (s): $\frac{3}{8}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine Kugel rot ist, erhält man am geschicktesten mit Hilfe des Gegenereignisses:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\text{«mindestens eine rote Kugel»}) &= 1 - \mathrm{P}(\text{«keine rote Kugel»}) \\
&= 1 - \mathrm{P}(\mathrm{sss}) \\
&= 1 - \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} \\
&= \frac{512}{512} - \frac{27}{512} \\
&= \frac{485}{512}
\end{aligned}$$

7.1.2 Ziehen ohne Zurücklegen

a)

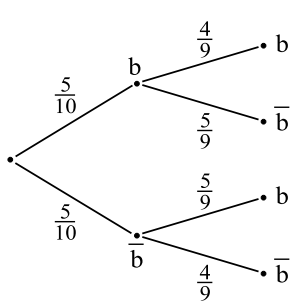


Da 2 grüne, 3 rote und 5 blaue, also insgesamt 10 Kugeln in der Urne sind, betragen die Wahrscheinlichkeiten beim 1. Ziehen für grün (g): $\frac{2}{10}$, für rot (r): $\frac{3}{10}$ und für blau (b): $\frac{5}{10}$.

Danach sind nur noch 9 Kugeln in der Urne und die Wahrscheinlichkeiten bei der 2. Ziehung hängen jeweils davon ab, welche Farbe beim 1. Mal gezogen wurde.

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine grüne und eine rote Kugel gezogen wird, erhält man mit Hilfe der 1. und 2. Pfadregel (Produkt- und Summenregel):

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathrm{A}) &= \mathrm{P}(\mathrm{gr}) + \mathrm{P}(\mathrm{rg}) \\
&= \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \\
&= \frac{12}{90} = \frac{2}{15}
\end{aligned}$$



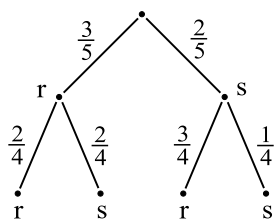
Da 5 blaue und 5 nicht blaue, also insgesamt 10 Kugeln in der Urne sind, betragen die Wahrscheinlichkeiten beim 1. Ziehen für blau (b): $\frac{5}{10}$ und für nicht blau ($\overline{\mathrm{b}}$): $\frac{5}{10}$.

Danach sind nur noch 9 Kugeln in der Urne und die Wahrscheinlichkeiten bei der 2. Ziehung hängen jeweils davon ab, welche Farbe beim 1. Mal gezogen wurde.

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B, dass keine blaue Kugel gezogen wird, erhält man mit Hilfe der 1. Pfadregel (Produktregel):

$$P(B) = P(\bar{b}\bar{b}) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{20}{90} = \frac{2}{9}$$

b) I)



Zum Baumdiagramm passt z.B. folgende Situation:
In einer Urne befinden sich 3 rote und 2 schwarze Kugeln. Es werden zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen, da die Wahrscheinlichkeiten beim 2. Zug anders sind als beim 1. Zug.

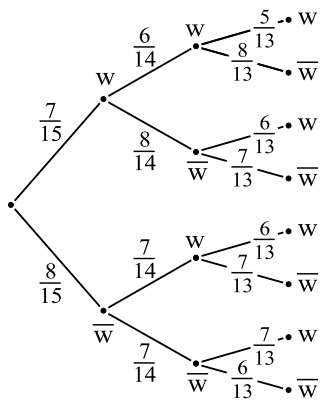
II) Die Wahrscheinlichkeit beträgt beim 1. Ziehen für rot (r): $\frac{3}{5}$ und für schwarz (s): $\frac{2}{5}$. Danach sind nur noch 4 Kugeln in der Urne und die Wahrscheinlichkeiten bei der 2. Ziehung hängen jeweils davon ab, welche Farbe beim 1. Mal gezogen wurde.
Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kugeln gleichfarbig sind, erhält man mit Hilfe der 1. und 2. Pfadregel (Produkt- und Summenregel):

$$\begin{aligned} P(\text{«beide Kugeln gleichfarbig»}) &= P(rr) + P(ss) \\ &= \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{6}{20} + \frac{2}{20} = \frac{8}{20} \\ &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

c) Das gleichzeitige Ziehen von Kugeln entspricht einem Ziehen ohne Zurücklegen.
Da 7 weiße, 5 schwarze und 3 rote, also insgesamt 15 Kugeln in der Urne sind, betragen die Wahrscheinlichkeiten beim 1. Ziehen für weiß (w): $\frac{7}{15}$, für schwarz (s): $\frac{5}{15}$ und für rot (r): $\frac{3}{15}$.
Danach sind nur noch 14 Kugeln in der Urne und die Wahrscheinlichkeiten bei der 2. Ziehung hängen jeweils davon ab, welche Farbe beim 1. Mal gezogen wurde. Schließlich sind nur noch 13 Kugeln in der Urne.

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A, dass eine weiße und zwei schwarze Kugeln gezogen werden, erhält man mit Hilfe der 1. und 2. Pfadregel (Produkt- und Summenregel):

$$\begin{aligned} P(A) &= P(wss) + P(sws) + P(ssw) \\ &= \frac{7}{15} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{4}{13} + \frac{5}{15} \cdot \frac{7}{14} \cdot \frac{4}{13} + \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{7}{13} \\ &= 3 \cdot \frac{7}{15} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{4}{13} \\ &= \frac{2}{13} \end{aligned}$$



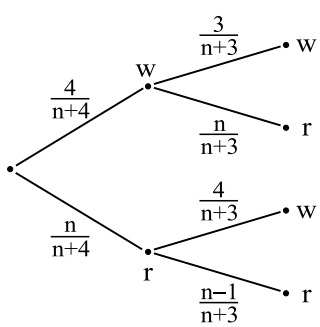
Da 7 weiße und 8 nicht weiße, also insgesamt 15 Kugeln in der Urne sind, betragen die Wahrscheinlichkeiten beim 1. Ziehen für weiß (w): $\frac{7}{15}$ und für nicht weiß $\bar{w}$: $\frac{8}{15}$.

Danach sind nur noch 14 Kugeln in der Urne und die Wahrscheinlichkeiten bei der 2. Ziehung hängen jeweils davon ab, welche Farbe beim 1. Mal gezogen wurde. Schließlich sind nur noch 13 Kugeln in der Urne.

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B, dass mindestens eine weiße Kugel gezogen wird, erhält man am geschicktesten mit Hilfe des Gegenereignisses:

$$\begin{aligned} P(B) &= 1 - P\left(\overline{B}\right) \\ &= 1 - P\left(\bar{w}\bar{w}\bar{w}\right) \\ &= 1 - \frac{8}{15} \cdot \frac{7}{14} \cdot \frac{6}{13} \\ &= 1 - \frac{8}{65} = \frac{57}{65} \end{aligned}$$

d) I)



Wenn in der Urne 4 weiße und n rote Kugeln sind, gibt es insgesamt $n+4$ Kugeln. Damit beträgt die Wahrscheinlichkeit beim 1. Ziehen für weiß (w): $\frac{4}{n+4}$ und für rot (r): $\frac{n}{n+4}$.

Beim 2. Ziehen sind nur noch $n+3$ Kugeln vorhanden und die Wahrscheinlichkeiten hängen davon ab, welche Farbe schon gezogen wurde. Da die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kugeln weiß sind, $\frac{1}{6}$ betragen soll, erhält man mit Hilfe der 1. Pfadregel folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} P(\text{«beide Kugeln weiß»}) &= P(ww) \\ \frac{1}{6} &= \frac{4}{n+4} \cdot \frac{3}{n+3} \\ (n+4) \cdot (n+3) &= 72 \\ n^2 + 7n - 60 &= 0 \\ &\Rightarrow n_1 = 5 \text{ bzw. } n_2 = -12 \end{aligned}$$

Wegen $n > 0$ kommt nur $n_1 = 5$ als Lösung in Frage.
Also waren in der Urne 5 rote Kugeln vorhanden.

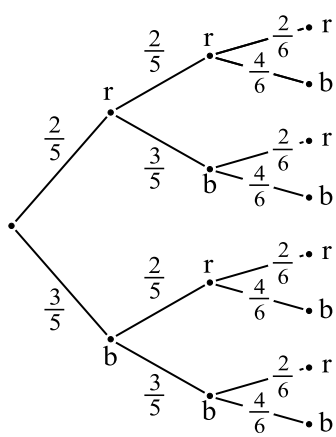
II) Da die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine weiße Kugel zu ziehen, $\frac{2}{3}$ betragen soll, erhält man (am geschicktesten) mit Hilfe des Gegenereignisses folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}
P(\text{«mindestens eine weiße Kugel»}) &= 1 - P(\text{«keine weiße Kugel»}) \\
\frac{2}{3} &= 1 - P(rr) \\
\frac{2}{3} &= 1 - \frac{n}{n+4} \cdot \frac{n-1}{n+3} \\
\frac{n}{n+4} \cdot \frac{n-1}{n+3} &= \frac{1}{3} \\
3 \cdot n \cdot (n-1) &= (n+4) \cdot (n+3) \\
3n^2 - 3n &= n^2 + 7n + 12 \\
2n^2 - 10n - 12 &= 0 \\
n^2 - 5n - 6 &= 0 \\
&\Rightarrow n_1 = 6 \text{ bzw. } n_2 = -1
\end{aligned}$$

Wegen $n > 0$ kommt nur $n_1 = 6$ als Lösung in Frage.
Also waren in der Urne 6 rote Kugeln vorhanden.

7.1.3 Mehrstufige Experimente

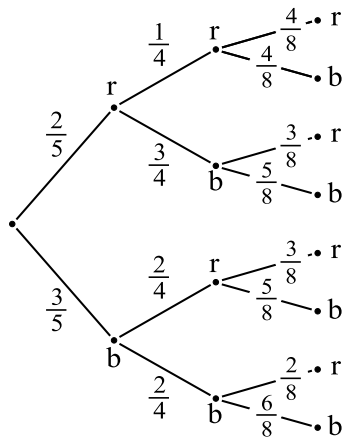
a) I)



Es handelt sich um ein dreistufiges Experiment. Da 2 rote und 3 blaue Kugeln, also insgesamt 5 Kugeln, in Gefäß G_1 sind, betragen die Wahrscheinlichkeiten bei jedem Ziehen für rot (r): $\frac{2}{5}$ und für blau (b): $\frac{3}{5}$.
Da in Gefäß G_2 2 rote und 4 blaue, also insgesamt 6 Kugeln sind, beträgt die Wahrscheinlichkeit für rot (r): $\frac{2}{6}$ und für blau (b): $\frac{4}{6}$.
Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 2 rote Kugeln gezogen wurden, erhält man mit Hilfe der 1. und 2. Pfadregel (Produkt- und Summenregel):

$$\begin{aligned}
P(\text{«mind. zwei rote Kugeln»}) &= P(brr) + P(rbr) + P(rrb) + P(rrr) \\
&= \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{6} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{6} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{6} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{6} \\
&= \frac{12}{150} + \frac{12}{150} + \frac{16}{150} + \frac{8}{150} \\
&= \frac{24}{75}
\end{aligned}$$

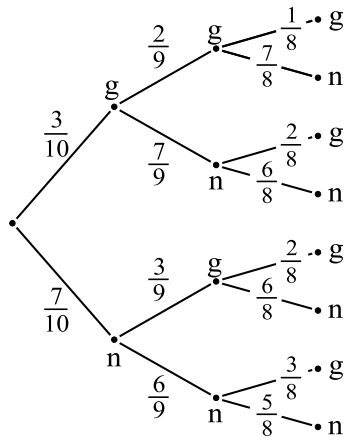
II)



Es handelt sich um ein dreistufiges Experiment. Da 2 rote und 3 blaue, also insgesamt 5 Kugeln in Gefäß G_1 sind, betragen die Wahrscheinlichkeiten beim 1. Ziehen für rot (r): $\frac{2}{5}$ und für blau (b): $\frac{3}{5}$.
Danach sind nur noch 4 Kugeln in Gefäß G_1 und die Wahrscheinlichkeiten bei der 2. Ziehung aus G_1 hängen jeweils davon ab, welche Farbe beim 1. Mal gezogen wurde. Da die beiden Kugeln in Gefäß G_2 gelegt werden, gibt es insgesamt 8 Kugeln in G_2. Die Wahrscheinlichkeit der einzelnen Farbe hängt davon ab, was vorher gezogen wurde. Die Wahrscheinlichkeit, genau eine rote Kugel zu ziehen, erhält man mit Hilfe der 1. und 2. Pfadregel (Produkt- und Summenregel):

$$\begin{aligned}
P(\text{«genau eine rote Kugel»}) &= P(\text{bbr}) + P(\text{brb}) + P(\text{rbb}) \\
&= \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{8} + \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{5}{8} + \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{8} \\
&= \frac{12}{160} + \frac{30}{160} + \frac{30}{160} \\
&= \frac{9}{20}
\end{aligned}$$

b) I)



Da 3 Gewinne und 7 Nieten, also insgesamt 10 Lose in der Lostrommel sind, betragen die Wahrscheinlichkeiten beim 1. Ziehen für Gewinn (g): $\frac{3}{10}$ und für Niete (n): $\frac{7}{10}$.
Danach sind nur noch 9 Lose in der Trommel und die Wahrscheinlichkeiten bei der 2. und 3. Ziehung hängen jeweils davon ab, ob ein Gewinn oder eine Niete beim 1. bzw. 2. Mal gezogen wurde.

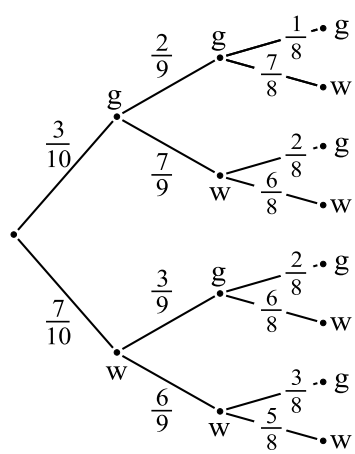
Die Wahrscheinlichkeit, dass genau zwei Gewinne gezogen werden, erhält man mit Hilfe der 1. und 2. Pfadregel (Produkt- und Summenregel):

$$\begin{aligned}
P(\text{«genau zwei Gewinne»}) &= P(\text{ggn}) + P(\text{gng}) + P(\text{ngg}) \\
&= \frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{7}{8} + \frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{2}{8} + \frac{7}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8} \\
&= 3\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{7}{8} \\
&= \frac{7}{40}
\end{aligned}$$

II) Die Wahrscheinlichkeit, dass der Gewinn erst beim dritten Zug gezogen wird, erhält man mit Hilfe der 1. Pfadregel (Produktregel):

$$P(\text{«Gewinn beim dritten Zug»}) = P(\text{nng}) = \frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{3}{8} = \frac{7}{40}$$

c) I)

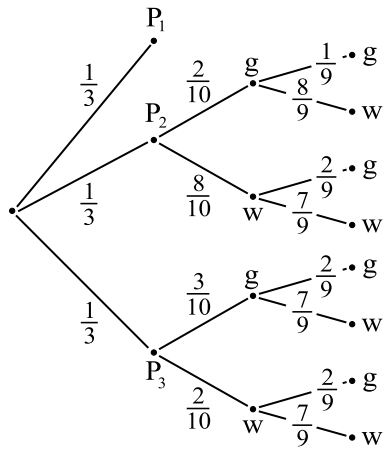


Da in der dritten Packung 3 gelbe und 7 weiße, also insgesamt 10 Tabletten sind, betragen die Wahrscheinlichkeiten beim 1. Ziehen für gelb (g): $\frac{3}{10}$ und für weiß (w): $\frac{7}{10}$.
Danach sind nur noch 9 Tabletten in der Schachtel. Die Wahrscheinlichkeiten bei der 2. und 3. Ziehung hängen also jeweils davon ab, welche Farbe beim 1. bzw. 2. Mal gezogen wurde.

Die Wahrscheinlichkeit, dass aus der dritten Packung mindestens 2 gelbe Tabletten gezogen werden, erhält man mit Hilfe der 1. und 2. Pfadregel (Produkt- und Summenregel):

$$\begin{aligned}
P(\text{«mind. 2 gelbe Tabletten»}) &= P(\text{ggw}) + P(\text{gwg}) + P(\text{wgg}) + P(\text{ggg}) \\
&= \frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{7}{8} + \frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{2}{8} + \frac{7}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8} + \frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8} \\
&= \frac{42}{720} + \frac{42}{720} + \frac{42}{720} + \frac{6}{720} \\
&= \frac{11}{60}
\end{aligned}$$

II)



Da bei der 1. Ziehung 3 Packungen zur Verfügung stehen, beträgt die Wahrscheinlichkeit für jede Packung $\frac{1}{3}$. Da in der ersten Packung nur eine gelbe Tablette ist, können aus dieser keine 2 gelben Tabletten gezogen werden.
Aus der zweiten und dritten Packung können jeweils 2 gelbe Tabletten ohne Zurücklegen gezogen werden. Die Wahrscheinlichkeiten ändern sich dabei bei jedem Zug.

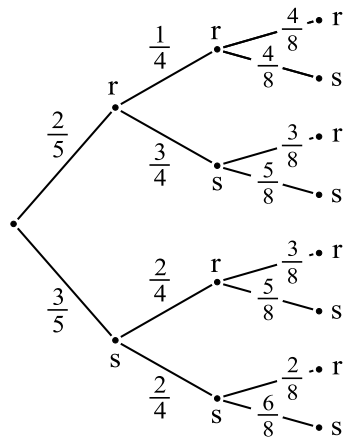
Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Tabletten gelb sind, erhält man mit Hilfe der 1. und 2. Pfadregel (Produkt- und Summenregel):

$$\begin{aligned}
P(\text{«beide Tabletten gelb»}) &= P(P_2gg) + P(P_3gg) \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \\
&= \frac{8}{270} \\
&= \frac{4}{135}
\end{aligned}$$

d) I) Es handelt sich um ein vierstufiges Experiment, bei welchem die Wahrscheinlichkeiten miteinander multipliziert werden. Die Wahrscheinlichkeit einer jeden Stufe erhält man mit Hilfe der 1. Pfadregel für das Ziehen ohne Zurücklegen:

$$\begin{aligned}
P(\text{alle Karten sind rot}) &= P_{(\text{Stapel1})}(rr) \cdot P_{(\text{Stapel2})}(rr) \\
&= \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5}\right) \\
&= \frac{1}{150}
\end{aligned}$$

II)



Da 2 rote und 3 schwarze, also insgesamt 5 Karten im 1. Stapel sind, betragen die Wahrscheinlichkeiten beim 1. Ziehen für rot (r): $\frac{2}{5}$ und für schwarz (s): $\frac{3}{5}$.
Danach sind nur noch 4 Karten auf dem 1. Stapel und die Wahrscheinlichkeiten bei der 2. Ziehung hängen jeweils davon ab, welche Farbe beim 1. Mal gezogen wurde. Da die beiden Karten mit dem 2. Stapel vermischt werden, gibt es insgesamt 8 Karten im 2. Stapel. Die Wahrscheinlichkeit der einzelnen Farbe hängt davon ab, was vorher gezogen wurde.

Die Wahrscheinlichkeit, dass die zuletzt gezogene Karte schwarz ist, erhält man mit Hilfe der 1. und 2. Pfadregel (Produkt- und Summenregel):

$$\begin{aligned}
P(\text{«letzte Karte schwarz»}) &= P(rrs) + P(rss) + P(srs) + P(sss) \\
&= \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{8} + \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{8} + \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{5}{8} + \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{6}{8} \\
&= \frac{8}{160} + \frac{30}{160} + \frac{30}{160} + \frac{36}{160} \\
&= \frac{13}{20}
\end{aligned}$$

7.2 Binomialverteilung

Bei einem Bernoulli-Experiment wird die Wahrscheinlichkeit P eines Ereignisses mit k Treffern mit der Trefferwahrscheinlichkeit p und der Kettenlänge n (Anzahl der Durchführungen des Experiments) mit der sogenannten Bernoulli- Formel berechnet:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

a) Da es bei einem Wurf des Basketballers nur die beiden Ausgänge «Treffer» oder «Fehlwurf» gibt, handelt es sich um Bernoulli-Experiment. Er hat eine Trefferwahrscheinlichkeit von 90%. Da er 10 Mal wirft, beträgt die Kettenlänge $n = 10$.

I) Legt man X als Zufallsvariable für die Anzahl der Treffer fest, so ist X binomialverteilt mit den Parametern $p = 0,9$ und $n = 10$. Die Wahrscheinlichkeit, dass er genau 9 Mal trifft, erhält man mit der Bernoulli-Formel:

$$P(X = 9) = \binom{10}{9} \cdot 0,9^9 \cdot (1-0,9)^{10-9} = 10 \cdot 0,9^9 \cdot 0,1 = 0,9^9$$