Gruber I Neumann

Erfolg im Mathe-Abi 2020

Übungsbuch für den Wahlteil
Baden-Württemberg
mit Tipps und Lösungen

Helmut Gruber, geb. 1968, studierte Mathematik und Physik in Konstanz und Freiburg und ist seit 1995 Mathematiklehrer in der Oberstufe.

Robert Neumann, geb. 1970, studierte Mathematik und Physik in Freiburg und unterrichtet Mathematik in der Oberstufe seit 1999.

PEFC
PEFC/04-31-1867

PEFC zertifiziert

Dieses Produkt stammt aus nachhaltig bewirtschafteten Wäldern und kontrollierten Quellen.

www.pefc.de

Gedruckt in Deutschland
www.freiburger-verlag.de

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Erfolg von Anfang an

... ist das Geheimnis eines guten Abiturs. Das vorliegende Übungsbuch ist speziell auf die Anforderungen des Wahlteils des Mathematik-Abiturs in Baden-Württemberg seit 2019 abgestimmt. Es umfasst die drei großen Themenbereiche Analysis, Analytische Geometrie und Stochastik sowie Abituraufgaben seit 2017 in einem Buch. Seit 2017 hat sich die Struktur des Wahlteils grundlegend geändert: Insgesamt gibt es 40 Verrechnungspunkte (VP). In Analysis gibt es eine sehr umfangreiche Aufgabe mit 20 VP, in der Analytischen Geometrie und in Stochastik gibt es jeweils eine Aufgabe mit 10 VP.

Auch die Benennung der Aufgaben wurde angepasst: Pro Jahrgang gibt es jetzt zwei Aufgaben aus der Analysis (A1 und A2), zwei Aufgaben aus der Analytischen Geometrie (B1 und B2) sowie zwei Aufgaben aus der Stochastik (C1 und C2).

Der Wahlteil besteht aus komplexeren Aufgaben, die mithilfe eines wissenschaftlichen Taschenrechners (WTR) und einer Merkhilfe gelöst werden sollen. Der Schwerpunkt liegt auf der Analysis. Thematisch geht es meist um anwendungsbezogene Transferaufgaben, um das Modellieren realitätsnaher Aufgabenstellungen, um das Herstellen von Zusammenhängen und um das Entwickeln von Lösungsstrategien.

Bei einigen Aufgaben ist es nötig, den Taschenrechner zu benutzen. Nicht bei allen Rechnerfunktionen ist gleich klar, wie sie aufgerufen werden. Daher befinden sich im Buch QR-Codes für die entsprechenden Videos, in denen die Funktionen des Tachenrechners kurz erklärt werden. Der QR-Code kann mit einer entsprechenden App gescannt werden. Alternativ lässt sich auch der Link unter dem Code benutzen.

Der Code neben diesem Text verweist z.B. auf ein Video zum Erstellen einer Wertetabelle.

frv.tv/cf

Weitere Aufgaben

Unter www.freiburger-verlag.de erhalten Sie weitere Aufgaben kostenfrei als pdf zum Download, z.B. den Wahlteil des Abiturs 2016 und die Musteraufgaben für das neue Abitur seit 2019.

Der blaue Tippteil

Hat man einmal keine Idee, wie man eine Aufgabe angehen soll bzw. fehlt der Lösungsansatz, hilft der blaue Tippteil in der Mitte des Buches weiter: Zu jeder Aufgabe gibt es dort Tipps, die helfen, einen Ansatz zu finden, ohne die Lösung vorwegzunehmen.

Die Kontrollkästchen □

Damit Sie immer den Überblick behalten können, welche Aufgaben Sie schon bearbeitet haben, befindet sich neben jedem Aufgabentitel ein Kontrollkästchen zum Abhaken.

Der Aufbau der Mathematikprüfung

- Die gesamte Prüfungszeit beträgt 270 Minuten (4,5 Zeitstunden).
- Die Lehrerin/ der Lehrer erhält vor der Prüfung den Pflichtteil (HMF) und für den Wahlteil zwei Aufgabenvorschläge aus Analysis (A1 und A2), zwei aus Analytischer Geometrie (B1 und B2) sowie zwei aus Stochastik (C1 und C2). Sie wählen aus den Vorschlägen für den Wahlteil je einen aus Analysis, einen aus Analytischer Geometrie und einen aus Stochastik aus.
- Die Schülerinnen und Schüler erhalten zu Beginn der Prüfung alle Aufgaben (den Pflichtteil und den vom Lehrer ausgesuchten Wahlteil, bestehend aus Analysis, Geometrie und Stochastik). Sie erhalten zu diesem Zeitpunkt noch keine Hilfsmittel.
- Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten zunächst den Pflichtteil. Nach dessen Abgabe erhalten sie die Hilfsmittel (Taschenrechner, Merkhilfe) für den Wahlteil.

Insgesamt können maximal 60 Verrechnungspunkte in der Prüfung erreicht werden, davon 20 im Pflichtteil (HMF) und 40 im Wahlteil.

Allen Schülerinnen und Schülern, die sich auf das Abitur vorbereiten, wünschen wir viel Erfolg!

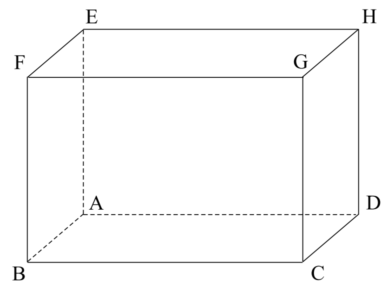
Helmut Gruber, Robert Neumann

Geometrie

6 Kiste

Tipps ab Seite 40, Lösungen ab Seite 76

Eine quaderförmige Kiste ist in einem Koordinatensystem durch die Eckpunkte $A(0 \mid 0 \mid 0)$, $B(3 \mid 0 \mid 0)$, $D(0 \mid 5 \mid 0)$ und $F(3 \mid 0 \mid 4)$ festgelegt.
Die Fläche EFGH stellt den Deckel der geschlossenen Kiste dar.
Dieser ist drehbar um die Kante EH.
Weiterhin ist für jedes $t \geqslant 0$ eine Ebene E_t gegeben durch die Gleichung
$E_t: \ tx_1 - x_3 = -4.$



(Skizze nicht maßstabsgerecht)

a) Berechnen Sie den Abstand zwischen den Kanten AB und GH.
Zeigen Sie, dass die Gerade durch E und H in jeder Ebene E_t liegt.
Bestimmen Sie die Gleichung derjenigen Ebene E_t, in welcher der Deckel bei geschlossener Kiste liegt.
Prüfen Sie, ob der Deckel in einer Ebene E_t liegt, wenn er um 90° geöffnet ist?

b) Wenn der Deckel der geöffneten Kiste in E_2 liegt, wird er durch einen Stab orthogonal zum Deckel abgestützt. Dieser Stab ist in der Mitte der Kante EF befestigt und trifft im Punkt P auf den Deckel.
Berechnen Sie die Koordinaten von P.

c) Berechnen Sie den Öffnungswinkel, wenn der Deckel in E_2 liegt.
Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene E_t, in welcher der Deckel liegt, wenn der Öffnungswinkel 60° beträgt.
Bestimmen Sie den Parameter t in Abhängigkeit vom Öffnungswinkel α für $\alpha < 90°$.

b) Skizzieren Sie das Dreieck OPQ. Überlegen Sie, welche Bedeutung $A(u)$ für das Dreieck OPQ hat. Beachten Sie, dass mit der 1. und 2. Ableitung einer Funktion Extremwerte bestimmt werden. Überlegen Sie, welcher Art der Extremwert ist.

Geometrie

Das Kreuzprodukt

Wenn man einen Vektor $\vec{n}$ sucht, der senkrecht auf zwei gegebenen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht (der Normalenvektor), geschieht dies einfach und schnell mit dem Kreuzprodukt (Vektorprodukt):

$$\vec{n} = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \begin{pmatrix} a_2b_3 & - & a_3b_2 \\ a_3b_1 & - & a_1b_3 \\ a_1b_2 & - & a_2b_1 \end{pmatrix}$$

Die Merkhilfe dazu:

1. Beide Vektoren werden je zweimal untereinandergeschrieben, dann werden die erste und die letzte Zeile gestrichen.
2. Anschließend wird «über Kreuz» multipliziert. Dabei erhalten die abwärts gerichteten Pfeile ein positives und die aufwärts gerichteten Pfeile ein negatives Vorzeichen.
3. Die einzelnen Komponenten werden subtrahiert – fertig!

$$\begin{array}{cc} \cancel{a_1} & \cancel{b_1} \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \cancel{a_3} & \cancel{b_3} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

Beispiel: Sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, ergibt sich für den gesuchten Vektor:

$$\begin{array}{cc} \cancel{1} & \cancel{-1} \\ 3 & 4 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 3 & 4 \\ \cancel{2} & \cancel{0} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cc} 3 & 4 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \cdot 0 - 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 4 - 3 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Anmerkung:
Mithilfe des Kreuzprodukts lässt sich die Fläche des Dreiecks ABC direkt ausrechnen. Es ist:

$$A_{\triangle} = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right|$$

6 Kiste

a) Bestimmen Sie die Koordinaten der übrigen Eckpunkte der Kiste.
Den Abstand zwischen den Kanten AB und GH erhalten Sie, indem Sie zum Beispiel die Entfernung der Punkte A und H berechnen.
Stellen Sie die Gleichung der Geraden g durch E und H auf und setzen Sie diese in die Ebenengleichung E_t ein. Bei einer wahren Aussage liegt die Gerade in E_t.
Setzen Sie die Koordinaten von F in E_t ein und lösen Sie die Gleichung nach t auf, um diejenige Ebene E_t zu bestimmen, in welcher der Deckel bei geschlossener Kiste liegt.
Beim Öffnen des Deckels um 90° geht der Punkt F in einen Punkt $\overline{F}$ über. Bestimmen Sie den Punkt $\overline{F}$ und setzen Sie die Koordinaten von $\overline{F}$ in E_t ein. Bei einem Widerspruch liegt der Deckel nicht in einer Ebene E_t.

b) Setzen Sie $t = 2$ in E_t ein.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Mittelpunkts M_{EF} der Kante EF.
Stellen Sie eine Lotgerade l durch M_{EF} orthogonal zu E_2 auf (der Richtungsvektor von l ist der Normalenvektor von E_2).
Sie erhalten die Koordinaten von P, indem Sie l und E_2 schneiden.

c) Um den Öffnungswinkel α zu bestimmen, setzen Sie einen Normalenvektor $\overrightarrow{n_2}$ von E_2 und einen Normalenvektor $\overrightarrow{n_1}$ der Ebene EFGH, die parallel zur x_1x_2-Ebene ist, in folgende Formel ein: $\cos\alpha = \dfrac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|}$

Um diejenige Ebene E_t zu bestimmen, in welcher der Deckel bei einem Öffnungswinkel von 60° liegt, setzen Sie einen Normalenvektor $\overrightarrow{n_t}$ von E_t, einen Normalenvektor $\overrightarrow{n_1}$ der Ebene EFGH und $\alpha = 60°$ in die Formel $\cos\alpha = \dfrac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_t}|}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_t}|}$ ein und lösen die erhaltene Gleichung durch Quadrieren nach t auf.

Lösen Sie allgemein die Gleichung $\cos\alpha = \dfrac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_t}|}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_t}|}$ durch Quadrieren nach t auf, um den Parameter t in Abhängigkeit vom Öffnungswinkel angeben zu können.

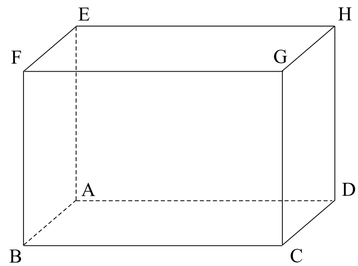
7 Geradenschar

a) Setzen Sie $a = 4$ in die Gleichung der Geradenschar ein, um die Gleichung von g_4 zu erhalten.
Den Schnittpunkt S der Geraden g_4 mit der Ebene E erhalten Sie, indem Sie den allgemeinen Punkt P_t von g_4 in die Ebenengleichung einsetzen und die Gleichung nach t auflösen. Setzen Sie den erhaltenen t-Wert in P_t ein.
Beachten Sie, dass die Gerade g_a parallel zu E ist, wenn der Richtungsvektor von g_a orthogonal zum Normalenvektor von E ist, d.h. wenn das Skalarprodukt dieser beiden Vektoren Null ergibt. Lösen Sie die entsprechende Gleichung nach a auf.
Beachten Sie, dass eine Gerade g_a der Schar orthogonal zu g_4 ist, wenn der Richtungsvektor $\vec{u}_a$ der Geradenschar orthogonal zum Richtungsvektor $\vec{u}_4$ von g_4 ist, d.h. wenn das

Geometrie

6 Kiste

a)



Die Koordinaten der Eckpunkte der Kiste sind A$(0\mid 0\mid 0)$, B$(3\mid 0\mid 0)$, C$(3\mid 5\mid 0)$, D$(0\mid 5\mid 0)$, E$(0\mid 0\mid 4)$, F$(3\mid 0\mid 4)$, G$(3\mid 5\mid 4)$ und H$(0\mid 5\mid 4)$.
Den Abstand zwischen den Kanten AB und GH erhält man, indem man die Entfernung der Punkte A und H berechnet, da die Kiste quaderförmig ist :

$$\overline{\mathrm{AH}} = |\overrightarrow{\mathrm{AH}}| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{0^2+5^2+4^2} = \sqrt{41} \approx 6,4$$

Der Abstand der Kanten AB und GH beträgt etwa 6,4 LE.

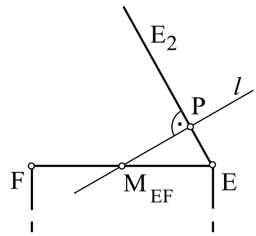
Um zu zeigen, dass die Gerade g durch E und H in jeder Ebene $\mathrm{E}_t : tx_1 - x_3 = -4$ liegt, stellt man die Geradengleichung von g auf und setzt sie in E_t ein. Man erhält:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; s \in \mathbb{R}$$

Einsetzen von g in E_t ergibt: $t \cdot 0 - (4 + s \cdot 0) = -4$ bzw. $-4 = -4$.
Aufgrund der wahren Aussage liegt die Gerade g in jeder der Ebenen E_t.

Bei geschlossener Kiste liegt der Punkt F$(3\mid 0\mid 4)$ auf dem Deckel. Setzt man die Koordinaten von F in E_t ein, so erhält man: $t \cdot 3 - 4 = -4 \;\Rightarrow\; t = 0$.
Somit liegt der Deckel bei geschlossener Kiste in der Ebene $\mathrm{E}_0 : -x_3 = -4$ bzw. $x_3 = 4$.

Wird der Deckel um 90° geöffnet, so geht der Eckpunkt F des geschlossenen Deckels in den Eckpunkt $\overline{\mathrm{F}}(0\mid 0\mid 7)$ über.
Setzt man die Koordinaten von $\overline{\mathrm{F}}$ in E_t ein, so erhält man: $t \cdot 0 - 7 = -4 \;\Rightarrow\; -7 = -4$.
Aufgrund des Widerspruchs liegt der um 90° geöffnete Deckel in keiner der Ebenen E_t.

b) 

Der Punkt P ist der Schnittpunkt der Lotgeraden l und der Ebene E_2.
Die Ebene E_2 hat die Gleichung $E_2:\ 2x_1 - x_3 = -4$.
Der Mittelpunkt der Kante EF hat die Koordinaten $M_{EF}\,(1{,}5 \mid 0 \mid 4)$. Die Lotgerade l geht durch den Punkt M_{EF} und ist orthogonal zu E_2 (der Richtungsvektor von l ist somit der Normalenvektor von E_2):

$$l\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R}$$

Schneidet man l mit E_2, so ergibt sich: $2 \cdot (1{,}5 + 2r) - (4 - r) = -4 \;\Rightarrow\; r = -0{,}6$.
Setzt man $r = -0{,}6$ in l ein, so erhält man den gesuchten Punkt $P\,(0{,}3 \mid 0 \mid 4{,}6)$, in welchem der Stützstab auf den Deckel trifft.

c) Um den Öffnungswinkel α zu bestimmen, wenn der Deckel in E_2 liegt, berechnet man den Winkel zwischen dem Normalenvektor $\overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ von E_2 und dem Normalenvektor $\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ der Ebene EFGH. Man erhält:

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|-1|}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \;\Rightarrow\; \alpha \approx 63{,}4^\circ$$

Wenn der Deckel in E_2 liegt, beträgt der Öffnungswinkel etwa 63,4°.

Bei einem Öffnungswinkel von $\alpha = 60^\circ$ erhält man:

$$\cos 60^\circ = \frac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_t}|}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_t}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|-1|}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{t^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}}$$

Da $\cos 60 = \frac{1}{2}$ ist, gilt: $\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}} \;\Rightarrow\; \sqrt{t^2+1} = 2 \Rightarrow t^2 + 1 = 4 \;\Rightarrow\; t = \sqrt{3}$ ist einzige Lösung wegen $t \geqslant 0$.
Somit liegt der um 60° geöffnete Deckel in der Ebene $E_{\sqrt{3}}\colon \sqrt{3}x_1 - x_3 = -4$.

Um den Parameter t in Abhängigkeit vom Öffnungswinkel α zu bestimmen, löst man die Gleichung $\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_t}|}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_t}|} = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ nach t auf. Wegen $\alpha < 90^\circ$ ist $\cos\alpha \neq 0$ und man erhält:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{t^2+1}} &= \cos\alpha \\
\frac{1}{\cos\alpha} &= \sqrt{t^2+1} \\
\frac{1}{(\cos\alpha)^2} &= t^2+1 \\
\frac{1}{(\cos\alpha)^2} - 1 &= t^2 \\
t_{1,2} &= \pm\sqrt{\frac{1}{(\cos\alpha)^2} - 1}
\end{aligned}$$

Wegen $t \geqslant 0$ ist $t = \sqrt{\frac{1}{(\cos\alpha)^2} - 1}$ die einzige Lösung.