Gruber | Neumann | Rosner | Schumm

Realschule Mathemathik Prüfung 2022

Originalaufgaben

Mathe gut erklärt

Maßgeschneidert für die neue Realschulprüfung

Realschulprüfung Baden-Württemberg

Übungsbuch

Mit vielen hilfreichen Tipps und ausführlichen Lösungen

Realschulabschlussprüfung 2014

Tipps ab Seite 10, Lösungen ab Seite 16

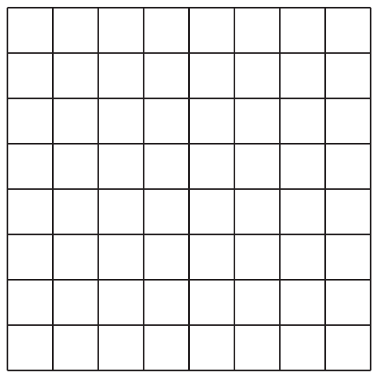
Realschulabschlussprüfung 2014, Teil A1 *

Hinweis: Im Teil A 1 (10 P) sind alle Aufgaben zu bearbeiten.
Zugelassene Hilfsmittel: Parabelschablone, Zeichengeräte

1) Zeigen Sie, dass gilt: 1 P

$$\frac{1000 \cdot 10^4}{10^5} : 2^2 = 25$$

2) Auf einem Schachbrett liegt auf dem ersten Feld ein Reiskorn, auf dem zweiten zwei, auf dem dritten vier, usw. Jakob behauptet: Auf den ersten 8 Feldern liegen mehr als 250 Reiskörner. Hat Jakob Recht? Begründen Sie durch Rechnung. 1 P



3) Im Kunstunterricht sollen aus Knetmasse aus einer quadratischen Pyramide mit der Grundkante 6 cm und der Höhe 10 cm ein Würfel mit der Kantenlänge 3 cm und ein Quader mit der Breite 5 cm und der Tiefe 2 cm hergestellt werden. Berechnen Sie die Höhe des Quaders. 2 P

4) In einer Urne sind zwei rote und drei blaue Kugeln. 2 P
Es werden zwei Kugeln gleichzeitig gezogen.
Clara behauptet: Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kugeln die gleiche Farbe haben, ist größer als 50%.
Hat sie Recht? Begründen Sie durch Rechnung.

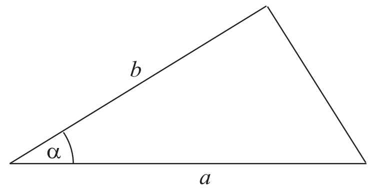
* Der Aufgabenteil A1 wurde ergänzt. Bei der Bearbeitung dieses Aufgabenteils sind keine Hilfsmittel erlaubt.

5) Zeigen Sie, dass man den Flächeninhalt des Dreiecks durch die Formel

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\alpha$$

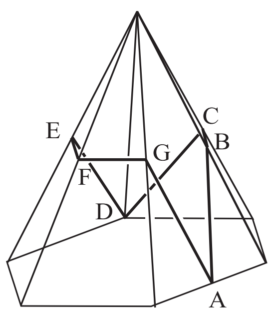
berechnen kann.

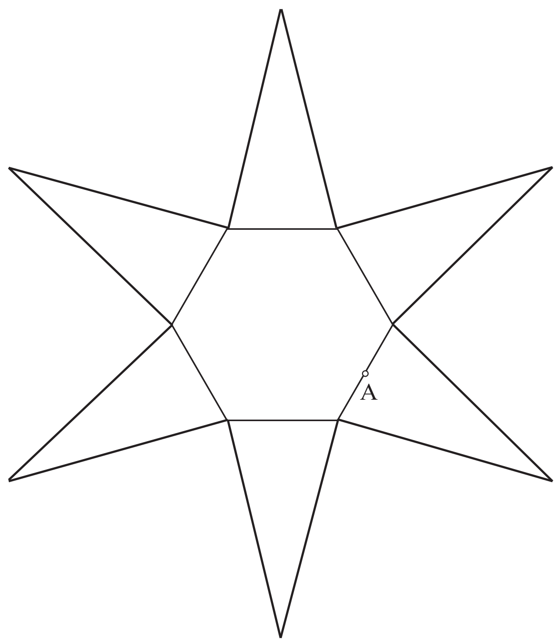
1 P



6) Gegeben sind das Schrägbild und das Netz einer Pyramide. Auf dem Schrägbild ist ein Streckenzug ABCDEFG eingezeichnet. Dabei halbieren die Punkte die Streckenkanten.
Übertragen Sie den Streckenzug auf das Netz der Pyramide

1 P





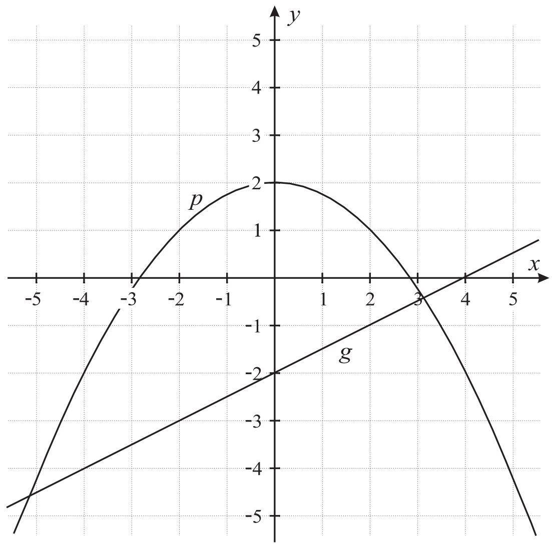
7) Lukas behauptet: Die gezeichnete Parabel p hat die Gleichung

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 2$$

und die gezeichnete Gerade g hat die Gleichung

$$y = -\frac{1}{2}x + 2$$

Hat Lukas Recht? Begründen Sie.



2 P

Tipps ab Seite 11, Lösungen ab Seite 20

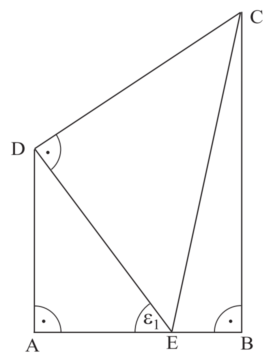
Realschulabschlussprüfung 2014, Teil A 2

Im Teil A 2 (20 P) sind alle sechs Aufgaben zu bearbeiten.
Zugelassene Hilfsmittel: Formelsammlung, wissenschaftlicher Taschenrechner (nicht programmierbar), Parabelschablone, Zeichengeräte

1) Im Viereck ABCD sind gegeben: 3 P

$$\overline{AE} = 3,2\,\text{cm}$$
$$\overline{CD} = 5,8\,\text{cm}$$
$$\varepsilon_1 = 54,6^\circ$$

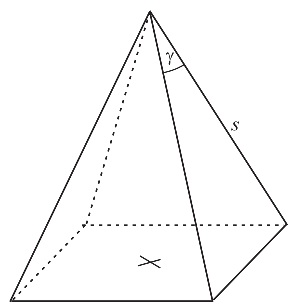
Berechnen Sie den Umfang des Dreiecks EBC.



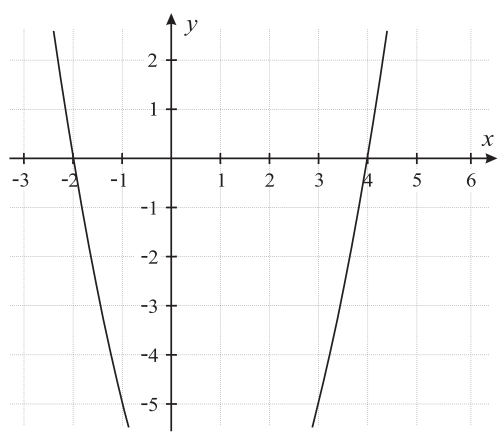
2) Eine quadratische Pyramide wurde aus Wachs hergestellt. Es gilt: 4 P

$$s = 11,2\,\text{cm}$$
$$\gamma = 34,0^\circ$$

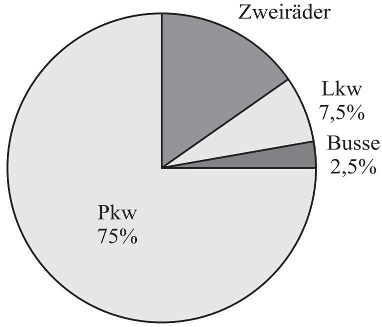
Die Pyramide wird eingeschmolzen und zu einer Kugel umgeformt.
Berechnen Sie den Radius der Kugel.



3) Das Schaubild zeigt den Ausschnitt einer verschobenen Normalparabel p. 3 P
Eine Gerade g geht durch den Punkt $R(2,5 \mid -4)$ und hat die Steigung $m = -2$.
Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von p und g.



4) **Die Polizei informiert** — 3 P



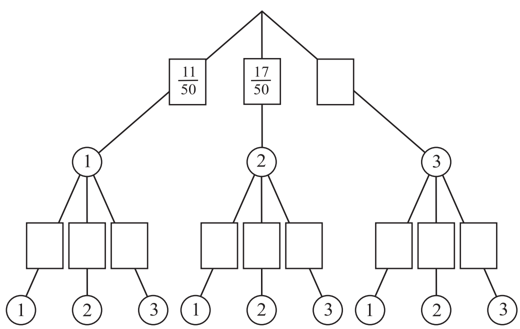
Bei insgesamt 640 Fahrzeugen wurde die Geschwindigkeit kontrolliert

Dabei überschritt jeder Achte der Pkw-Fahrer die zulässige Höchstgeschwindigkeit.
5% dieser Pkw-Fahrer droht sogar ein zeitweiliges Fahrverbot.

Wie viele Zweiräder wurden kontrolliert?

Wie viele der kontrollierten Pkw-Fahrer müssen mit einem zeitweiligen Fahrverbot rechnen?

5) In einem Behälter liegen 50 gleich große Kugeln. — 3 P
Sie sind mit den Zahlen 1, 2 und 3 beschriftet.
Es werden zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.



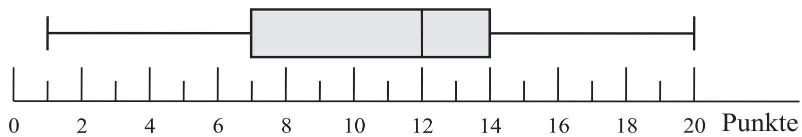
Die Grafik zeigt ein unvollständiges Baumdiagramm.

Vervollständigen Sie dieses Baumdiagramm.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht man zwei Kugeln, die mit der gleichen Zahl beschriftet sind?

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die erste gezogene Zahl größer als die zweite ist?

6) Die Französischgruppe der Klasse 10a mit 17 Schülerinnen und Schülern hat einen Vokabeltest geschrieben. **4 P**
Es konnten maximal 20 Punkte erreicht werden.
Dabei wurden nur ganze Punkte verteilt.
Der Durchschnitt (arithmetisches Mittel) betrug 10 Punkte.
Der Boxplot zeigt die Verteilung der Punkte.



Zum Boxplot gehört die unvollständig ausgefüllte Rangliste.

Rangplatz	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Punkte	1	1		5		7	7	9		12	12	13	14		16	17	

Vervollständigen Sie die Rangliste. Beachten Sie dabei die Kennwerte und den Durchschnitt.

Pauline behauptet:
«Mehr als die Hälfte der Schülerinnen und Schüler ist besser als der Durchschnitt.»

Hat Pauline Recht? Begründen Sie.

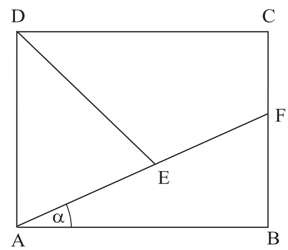
Tipps ab Seite 13, Lösungen ab Seite 28

Teil B
Hinweis: Im Teil B (20 P) sind zwei der drei Aufgaben zu bearbeiten.
Zugelassene Hilfsmittel: Formelsammlung, wissenschaftlicher Taschenrechner (nicht programmierbar), Parabelschablone, Zeichengeräte

Aufgabe 1

a) Im Rechteck ABCD sind gegeben: 5 P

$$\overline{AD} = 6,8\text{ cm}$$
$$\overline{BF} = 4,2\text{ cm}$$
$$\alpha = 25,0^\circ$$
$$\overline{AD} = \overline{DE}$$



Berechnen Sie die Länge $\overline{CE}$.

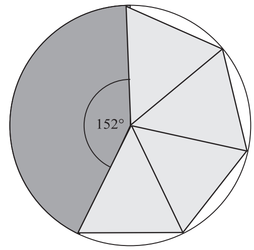
b) Zu einer verschobenen nach oben geöffnete Normalparabel p_1 gehört die unvollständig ausgefüllte Wertetabelle. 5 P

x	-3	-2	-1	0	1	2
y		3		3		

Geben Sie die Gleichung der Parabel p_1 an und vervollständigen Sie die Wertetabelle.
Eine Parabel p_2 hat die Gleichung $y = -\frac{1}{2}x^2 - 1$.
Zeichnen Sie die beiden Parabeln p_1 und p_2 in ein Koordinatensystem.
Eine Parabel p_3 hat die Gleichung $y = ax^2$.
Geben Sie einen möglichen Wert für den Faktor a so an, dass p_3 weder mit p_1 noch mit p_2 einen gemeinsamen Punkt hat.
Überprüfen Sie durch Rechnung.

Aufgabe 2

a) Aus einer Kreisfläche werden die Mantelflächen einer quadratischen Pyramide und eines Kegels ausgeschnitten. 5 P
Der Kreis hat den Radius $r = 20,0\,\text{cm}$.
Berechnen Sie die Differenz der beiden Körperhöhen.



b) Eine Parabel p_1 mit der Gleichung $y = x^2 + bx - 1$ geht durch den Punkt $A(-1 \mid 2)$. 5 P

Eine weitere Parabel p_2 mit der Gleichung $y = -x^2 + c$ verläuft ebenfalls durch den Punkt A.

Berechnen Sie den zweiten Schnittpunkt B der beiden Parabeln.

Die Parabel p_1 hat den Scheitel S_1, die Parabel p_2 hat den Scheitel S_2.

Luca behauptet:
«Die Gerade S_1B ist parallel zur Geraden S_2A.»

Hat Luca Recht? Begründen Sie Ihre Antwort durch Rechnung.

Aufgabe 3

a) Acht gleich große Karten sind mit den Buchstaben A, B und C beschriftet. **5 P**

Die Karten liegen so auf dem Tisch, dass die Buchstaben nicht sichtbar sind.

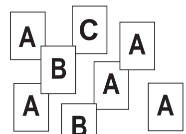
Es werden zwei Karten gleichzeitig gezogen.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, zwei Karten mit verschiedenen Buchstaben zu ziehen?

Die Karten sollen für eine Glücksspiel verwendet werden. Nebenstehende Gewinnpläne werden geprüft.

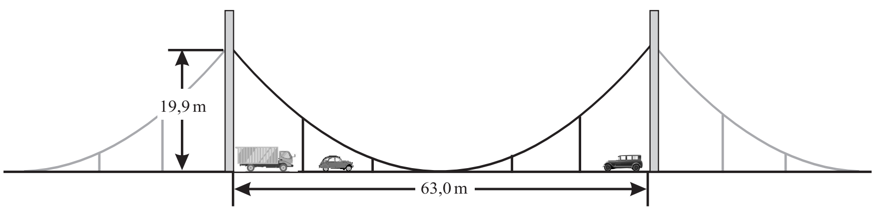
Für welchen Gewinnplan soll sich der Betreiber entscheiden?

Begründen Sie Ihre Aussage.



Ergebnis der Ziehung	Gewinnplan 1	Gewinnplan 2
Zwei gleiche Buchstaben	3,00 €	5,00 €
Der Buchstabe C ist gezogen	5,00 €	3,00 €
Restliche Möglichkeiten	kein Gewinn	kein Gewinn
Einsatz pro Spiel 2,50 €		

b) Die Abbildung zeigt eine Brücke, deren Tragseile annähernd die Form einer Parabel haben. **5 P**



Ermitteln Sie die Gleichung der zugehörigen Parabel.

Zwischen den Säulen (Pylonen) im mittleren Bereich der Brücke befinden sich acht Stahlseile (vier auf jeder Fahrbahnseite). Sie verlaufen in gleich großen Abständen senkrecht zur Fahrbahn.

Berechnen Sie die Gesamtlänge dieser acht Stahlseile im mittleren Brückenabschnitt.

Tipps Teil A1 2014

1) Wandle die Zahl 1000 in eine Zehnerpotenz um und verwende anschließend die Potenzgesetze: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ und $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$.

2) Beachte, dass sich die Anzahl der Reiskörner von Feld zu Feld verdoppelt. Erstelle eine Tabelle und addiere alle Reiskörner.

3) Das Volumen einer Pyramide erhältst Du mit der Formel $\mathrm{V_P} = \frac{1}{3} \cdot \mathrm{G} \cdot h$. Das Volumen eines Würfels erhältst Du mit der Formel $\mathrm{V_W} = a^3$. Das Volumen des Quaders erhältst Du, indem Du das Würfelvolumen vom Pyramidenvolumen subtrahierst. Das Volumen eines Quaders erhältst Du auch mit der Formel $\mathrm{V_Q} = a \cdot b \cdot c$. Setze die gegebenen Daten in die Volumenformel des Quaders ein und löse die entstandene Gleichung nach der Höhe c auf.

4) Bezeichne mit r: rot und mit b: blau, so kannst Du ein Baumdiagramm zeichnen. Beachte, dass es sich beim gleichzeitigen Ziehen zweier Kugeln um «Ziehen ohne Zurücklegen» handelt, d.h. die Wahrscheinlichkeiten ändern sich beim zweiten Zug. Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kugeln die gleiche Farbe haben, erhältst Du mithilfe der Pfadregeln. Erweitere das Ergebnis auf den Nenner 100, um es in Prozent angeben zu können.

5) Zeichne die Höhe h auf die Seite a ein, und bestimme h mithilfe des Sinusverhältnisses in Abhängigkeit der gegebenen Größen. Den Flächeninhalt eines Dreiecks erhältst Du mit der Formel $\mathrm{A} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$.

6) Markiere zuerst die Lage der Punkte B, C, D, E, F und G in der Zeichnung. Achte auf die Umlaufrichtung der Punkte.

7) Beachte, dass die gezeichnete Parabel p symmetrisch zur y-Achse und nach unten geöffnet ist. Bestimme den Scheitel S der Parabel und damit die zugehörige Gleichung der Form $y = ax^2 + c$. Bestimme die Steigung m und den y-Achsenabschnitt der gezeichneten Geraden g und damit die Geradengleichung der Form $y = mx + c$.

Tipps Teil A2 2014

1) Trage alle bekannten Maße und Winkel in eine Skizze ein. Im Dreieck AED kannst Du die Seite $\overline{\text{DE}}$ mithilfe des Kosinusverhältnisses bestimmen. Im Dreieck CDE kannst Du nun den Winkel ε_2 mithilfe des Tangensverhältnisses bestimmen. Damit erhältst Du den Winkel ε_3 bei Punkt E durch $\varepsilon_3 = 180 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2$. Im Dreieck CDE kannst Du mithilfe des Satzes des Pythagoras die Seite $\overline{\text{CE}}$ bestimmen. Im Dreieck BCE kannst Du nun noch die Seite $\overline{\text{BC}}$ mithilfe des Sinusverhältnisses und die Seite $\overline{\text{BE}}$ mithilfe des Kosinusverhältnisses bestimmen. Damit erhältst Du den Umfang des Dreiecks EBC: $\text{U}_{\text{EBC}} = \overline{\text{CE}} + \overline{\text{BC}} + \overline{\text{BE}}$.

2) Skizziere das Seitenflächendreieck und teile es in zwei rechtwinklige Dreiecke. Zuerst berechnest Du im rechtwinkligen Dreieck $\frac{a}{2}$ mithilfe des Sinusverhältnisses und h_S mithilfe des Kosinusverhältnisses. Damit erhältst Du die Grundseite a des Quadrats. Die Höhe h_P der quadratischen Pyramide erhältst Du mithilfe des Satzes des Pythagoras. Das Volumen der Pyramide erhältst Du mit der Formel $\text{V}_\text{P} = \frac{1}{3} \cdot \text{G}_\text{P} \cdot h_\text{P}$. Bestimme dazu noch die Grundfläche der Pyramide durch: $\text{G}_\text{P} = a \cdot a = a^2$. Da die Kugel das gleiche Volumen wie die Pyramide hat, kannst Du den Radius r der Kugel mit der Volumenformel $\text{V}_{\text{Ku}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$ durch Gleichsetzen mit dem Pyramidenvolumen bestimmen.

3) Die Gleichung der nach oben geöffneten verschobenen Normalparabel p mit den Nullstellen x_1 und x_2 erhältst Du mit der Normalform $y = x^2 + bx + c$. Setze die Koordinaten der Schnittpunkte mit der x-Achse in die Normalform ein und löse das zugehörige Gleichungssystem, indem Du Gleichung II von Gleichung I subtrahierst. Setze den erhaltenen Wert für b in Gleichung I ein, um c zu erhalten. Ebenso kannst Du den Nullstellenansatz $y = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ verwenden. Die Gleichung der Geraden g, die durch den Punkt R geht und die Steigung m hat, erhältst Du mit der Hauptform $y = mx + c$. Setze die Koordinaten von R und m in diese ein. Die Koordinaten der Schnittpunkte von p und g erhältst Du durch Gleichsetzen der Gleichungen von p und g. Löse die Gleichung durch Wurzelziehen. Die zugehörigen y-Werte erhältst Du, indem Du die x-Werte in die Gleichung von g einsetzt.

4) Du erhältst den Prozentsatz der kontrollierten Zweiräder, indem Du die Prozentsätze der Pkw und Lkw sowie Busse von 100 % subtrahierst. Die Anzahl der kontrollierten Zweiräder erhältst Du, indem Du 15 % von insgesamt 640 Fahrzeugen berechnest. Verwende die Prozentformel $\text{W} = \text{G} \cdot \frac{p}{100}$ oder den Dreisatz. Bestimme die Anzahl der kontrollierten Pkw-Fahrer, indem Du 75 % von insgesamt 640 Fahrzeugen berechnest. Verwende die Prozentformel $\text{W} = \text{G} \cdot \frac{p}{100}$ oder den Dreisatz. Teile dieses Ergebnis durch acht und bestimme davon 5%, um die Anzahl der Pkw-Fahrer mit einem zeitweiligen Fahrverbot zu berechnen. Verwende die Prozentformel $\text{W} = \text{G} \cdot \frac{p}{100}$ oder den Dreisatz.

5) Bestimme anhand des gegebenen Baumdiagramms die Anzahl der Kugeln mit der Zahl «1»

und mit der Zahl «2». Ermittle daraus die Anzahl der Kugeln mit der Zahl «3», indem Du diese Anzahlen von 50 subtrahierst. Bestimme damit die Wahrscheinlichkeit, beim ersten Zug eine Kugel mit der Zahl «3» zu ziehen. Beachte, dass zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen werden, so dass sich die Wahrscheinlichkeiten beim zweiten Zug ändern. Vervollständige damit das Baumdiagramm. Die Wahrscheinlichkeit, dass man zwei Kugeln zieht, die mit der gleichen Zahl beschriftet sind, erhältst Du mithilfe der Pfadregeln (Produkt- und Summenregel). Die Wahrscheinlichkeit, dass die erste gezogene Zahl größer als die zweite ist, erhältst Du ebenfalls mithilfe der Pfadregeln.

6) Bestimme die Kennwerte des dargestellten Boxplots. Den Wert von $x_{\max}$ kannst Du in der Tabelle bei Rang 17 eintragen. Beachte, dass es in der Rangliste 17 Werte gibt, so dass Du den Zentralwert z bei Rang 9 eintragen kannst. Berechne das untere Quartil und trage das Ergebnis in die Rangliste ein. Berechne auch das obere Quartil und trage das Ergebnis in die Rangliste ein, falls möglich. Beachte, dass bei Rang 3 ein Zwischenwert stehen muss, der mindestens 1 und höchstens 5 ist. Beachte, dass bei Rang 14 ein Zwischenwert stehen muss, der mindestens 14 und höchstens 16 ist. Um diese beiden Zwischenwerte zu bestimmen, beachte den Durchschnitt. Bestimme damit die Gesamtsumme aller Punkte bei 17 Schülerinnen und Schülern. Berechne die Zwischensumme und überlege, wie viele Punkte noch für Rang 3 und Rang 14 übrig bleiben und welche Möglichkeiten es gibt, Punkte auf diese beiden Ränge zu verteilen. Überlege, wie viele Schülerinnen und Schüler höchstens neun Punkte oder mindestens 12 Punkte haben.

Tipps Teil B 2014

Aufgabe 1

a) Trage alle bekannten Maße und Winkel in eine Skizze ein. Im Dreieck ABF kannst Du die Seite $\overline{AB}$ mithilfe des Tangensverhältnisses bestimmen. Im Dreieck AED kannst Du alle Winkel α_1, ε_1 und δ_1 bestimmen, da es sich wegen $\overline{AD} = \overline{DE}$ um ein gleichschenkliges Dreieck handelt und bei A ein rechter Winkel ist. Bestimme im Dreieck EGD (G ist der Lotfusspunkt von E auf die Seite CD) den Winkel δ_2 durch $\delta_2 = 90 - \delta_1$. Im Dreieck EGD kannst Du die Seite $\overline{DG}$ mithilfe des Kosinusverhältnisses und die Seite $\overline{EG}$ mithilfe des Sinusverhältnisses bestimmen. Damit erhältst Du $\overline{CD} = \overline{AB}$ und $\overline{CG} = \overline{CD} - \overline{DG}$. Im Dreieck CGE kannst Du nun die Seite $\overline{CE}$ mithilfe des Satzes des Pythagoras berechnen.

b) Aus der Wertetabelle kannst Du die Koordinaten zweier Punkte A und B ablesen. Als Ansatz für die Gleichung einer verschobenen nach oben geöffneten Normalparabel p_1 verwendest Du die Normalform $y = x^2 + bx + c$. Setze die Koordinaten von A und B in den Ansatz ein, um die Gleichung der Parabel p_1 zu erhalten. Mithilfe des Taschenrechners kannst Du die Wertetabelle für p_1 vervollständigen und die von p_2 erstellen. Um die beiden Parabeln p_1 und p_2 in ein Koordinatensystem zu zeichnen, verwendest Du jeweils die Wertetabellen. Alternativ kannst Du auch die Koordinaten des Scheitels S_1 von p_1 aus der Tabelle ablesen und p_1 mit der Parabelschablone zeichnen. Bestimme den Scheitelpunkt der Parabel p_3. Beachte, dass die Parabel p_3 am geschicktesten nach unten geöffnet und gleich oder mehr als p_2 gestaucht sein sollte, d.h. $-\frac{1}{2} \leqslant a < 0$. Wähle daraus einen Wert für a und bestimme damit die Gleichung der Parabel p_3. Um nachzuweisen, dass p_3 weder mit p_1 noch mit p_2 einen gemeinsamen Punkt hat, setzt Du die Gleichungen von p_1 und p_3 bzw. von p_2 und p_3 gleich. Falls beim Lösen der entsprechenden Gleichung unter der Wurzel eine negative Zahl steht, gibt es keine reelle Lösung und damit keinen gemeinsamen Punkt.

Aufgabe 2

a) Zuerst bestimmst Du die Bogenlänge b des Kreisausschnitts, der die Mantelfläche des Kegels bildet, mithilfe der Formel $b = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$. Beachte, dass die Bogenlänge b des Kreisausschnitts gleich groß wie der Umfang U der Grundfläche des Kegels ist. Damit kannst Du den Radius r_{Ke} des Kegels durch Gleichsetzen von b und U bestimmen. Skizziere das charakteristische rechtwinklige Dreieck beim Kegel. Beachte, dass die Mantellinie s des Kegels gleich groß wie der Radius r des gegebenen Kreises ist. Mithilfe des Satzes des Pythagoras kannst Du die Höhe h_{Ke} des Kegels berechnen: $h_{\text{Ke}}^2 + r_{\text{Ke}}^2 = s^2$. Anschließend bestimmst Du die Höhe h_{Py} der quadratischen Pyramide. Den spitzen Winkel α eines

Seitenflächendreiecks erhältst Du, indem Du 152° von 360° subtrahierst und das Ergebnis durch vier teilst. Skizziere ein Seitenflächendreieck und teile es in zwei rechtwinklige Dreiecke. Im rechtwinkligen Dreieck kannst Du $\frac{a}{2}$ mithilfe des Sinusverhältnisses und h_S mithilfe des Kosinusverhältnisses bestimmen. Die Höhe h_Py erhältst Du mithilfe des Satzes des Pythagoras: $h_\text{Py}^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = h_\text{S}^2$. Die Differenz d der beiden Körperhöhen erhältst Du durch $d = h_\text{Ke} - h_\text{Py}$.

b) Die Gleichungen der Parabeln p_1 und p_2 erhältst Du, indem Du die Koordinaten des Punktes A jeweils in den gegebenen Ansatz einsetzt. Die Koordinaten des zweiten Schnittpunkts B der beiden Parabeln erhältst Du durch Gleichsetzen der Gleichungen von p_1 und p_2. Löse die entstandene quadratische Gleichung mithilfe der bc-Formel. Beachte, dass eine Lösung der x-Wert von Punkt A ist. Den zugehörigen y-Wert des Punktes B erhältst Du, indem Du den zweiten x-Wert in die Gleichung von p_1 einsetzt. Die Koordinaten des Scheitels S_1 der Parabel p_1 erhältst Du durch quadratische Ergänzung. Die Koordinaten des Scheitels S_2 der Parabel p_2 erhältst Du durch Umschreiben in die Scheitelform. Um zu prüfen, ob die Gerade S_1B parallel zur Geraden S_2A ist, berechnest Du jeweils die Steigungen zwischen den Punkten S_1 und B bzw. S_2 und A mit der Steigungsformel $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Falls beide Steigungen gleich sind, ist die Gerade S_1B parallel zur Geraden S_2A.

Aufgabe 3

a) Beachte, dass es acht Karten gibt, von denen fünf mit dem Buchstaben A, zwei mit dem Buchstaben B und eine mit dem Buchstaben C beschriftet sind. Bestimme damit die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten beim ersten Zug. Beachte, dass zwei Karten gleichzeitig gezogen werden, so dass es sich um «Ziehen ohne Zurücklegen» handelt, d.h. die Wahrscheinlichkeiten ändern sich beim zweiten Zug. Zeichne ein Baumdiagramm. Die Wahrscheinlichkeit, zwei Karten mit verschiedenen Buchstaben zu ziehen, erhältst Du mithilfe der Pfadregeln (Produkt- und Summenregel). Um den Erwartungswert für den Gewinn des Spielers zu bestimmen, berechnest Du zuerst die Wahrscheinlichkeiten für die möglichen Ergebnisse, bei denen Gewinne erzielt werden, mithilfe der Pfadregeln. Den Erwartungswert E_1 für den Gewinn eines Spielers beim Gewinnplan 1 erhältst Du, indem Du die Gewinne für das jeweilige Ergebnis mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten multiplizierst und den Einsatz subtrahierst. Den Erwartungswert E_2 für den Gewinn eines Spielers beim Gewinnplan 2 erhältst Du, indem Du die Gewinne für das jeweilige Ergebnis mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten multiplizierst und den Einsatz subtrahierst. Überlege anhand der berechneten Erwartungswerte, welcher Gewinnplan für den Betreiber besser ist.

b) Lege das Koordinatensystem so, dass die x-Achse auf der Fahrbahn und die y-Achse durch den Scheitelpunkt S der parabelförmigen Tragseile geht. Als Ansatz für die Parabel, die symmetrisch zur y-Achse ist, verwendest Du $y = ax^2 + c$. Bestimme den Scheitel der Parabel und setze ihn in den Ansatz ein. Bestimme die Koordinaten eines Punktes A auf der Parabel und setze sie ebenfalls in den Ansatz ein, um die Gleichung der Parabel p zu erhalten. Beachte, dass die vier Stahlseile auf jeder Seite in gleich großen Abständen verlaufen. Bestimme die x-Werte der Stahlseile bzw. der Punkte B und C. Die zugehörigen y-Werte erhältst Du, indem Du die x-Werte in die Gleichung der Parabel einsetzt. Beachte, dass die Länge eines Stahlseils jeweils dem y-Wert des entsprechenden Punktes entspricht und dass es sich um eine symmetrische Anordnung handelt, so dass es von jeder Sorte vier Stahlseile (auf jeder Fahrbahnseite links und rechts) gibt.

Lösungen Teil A1 2014

1) Zuerst wandelt man die Zahl 1000 in eine Zehnerpotenz um und verwendet anschließend die Potenzgesetze:

$$\begin{aligned}\frac{1000\cdot 10^4}{10^5}:2^2 &= \frac{10^3\cdot 10^4}{10^5}:2^2\\ &= \frac{10^7}{10^5}:2^2\\ &= 10^2:2^2\\ &= \left(\frac{10}{2}\right)^2\\ &= 5^2\\ &= 25\end{aligned}$$

2) Die Anzahl der Reiskörner verdoppelt sich von Feld zu Feld.
Damit kann man die Anzahl der Reiskörner in eine Tabelle eintragen:

Feld	1	2	3	4	5	6	7	8
Anzahl Reiskörner pro Feld	1	2	4	8	16	32	64	128

Addiert man alle Reiskörner auf den ersten 8 Feldern, so erhält man:

$$1+2+4+8+16+32+64+128=255$$

Da es bei 8 Feldern insgesamt mehr als 250 Reiskörner sind, hat Jakob Recht.

3) Das Volumen einer Pyramide erhält man mit der Formel $\mathrm{V_P}=\frac{1}{3}\cdot \mathrm{G}\cdot h$.
Die Grundfläche erhält man mit der Formel $\mathrm{G}=a^2$.
Damit ergibt sich für die quadratische Pyramide mit Grundkante $a=6{,}0\,\mathrm{cm}$:

$$\mathrm{G}=6^2=36\,\mathrm{cm}^2$$

Für das Volumen ergibt sich mit der Höhe $h=10{,}0\,\mathrm{cm}$:

$$\mathrm{V_P}=\frac{1}{3}\cdot 36\cdot 10=120\,\mathrm{cm}^3$$

Das Volumen eines Würfels erhält man mit der Formel $\mathrm{V_W}=a^3$.
Damit ergibt sich für einen Würfel mit Kantenlänge $a=3{,}0\,\mathrm{cm}$:

$$\mathrm{V_W}=3^3=27\,\mathrm{cm}^3$$

Das Volumen des Quaders erhält man, indem man das Würfelvolumen vom Pyramidenvolumen subtrahiert:

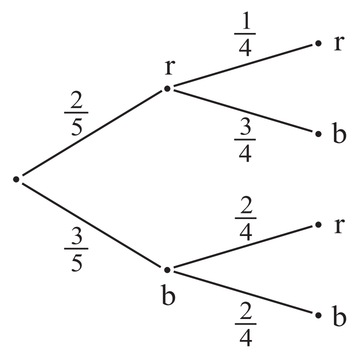
$$V_Q = V_P - V_W = 120\,\text{cm}^3 - 27\,\text{cm}^3 = 93\,\text{cm}^3$$

Das Volumen eines Quaders erhält man mit der Formel $V_Q = a \cdot b \cdot c$.
Setzt man $V_Q = 93\,\text{cm}^3$ und die Breite $a = 5\,\text{cm}$ sowie die Tiefe $b = 2\,\text{cm}$ in die Formel ein, kann man die entstandene Gleichung nach der Höhe c auflösen:

$$\begin{aligned} 93 &= 5 \cdot 2 \cdot c \\ \frac{93}{10} &= c \\ c &= 9{,}3\,\text{cm} \end{aligned}$$

Die Höhe des Quaders beträgt $9{,}3\,\text{cm}$.

4) Bezeichnet man mit r: rot und mit b: blau, so kann man ein Baumdiagramm zeichnen. Dabei ist zu beachten, dass es sich beim gleichzeitigen Ziehen zweier Kugeln um «Ziehen ohne Zurücklegen» handelt, d.h. die Wahrscheinlichkeiten ändern sich beim zweiten Zug:

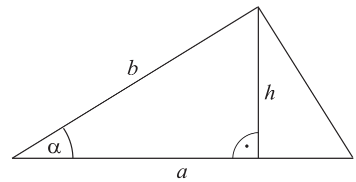


Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kugeln die gleiche Farbe haben, erhält man mithilfe der Pfadregeln:

$$\begin{aligned} P(\text{gleiche Farbe}) &= P(\text{rr}) + P(\text{bb}) \\ &= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \\ &= \frac{2}{20} + \frac{6}{20} \\ &= \frac{8}{20} \\ &= \frac{40}{100} \\ &= 40\% \end{aligned}$$

Da die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kugeln die gleiche Farbe haben, kleiner als 50% ist, hat Clara nicht Recht.

5) Zuerst zeichnet man die Höhe h auf die Seite a ein. Den Flächeninhalt eines Dreiecks erhält man mit der Formel $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$.
Als Grundseite verwendet man $g = a$, die Höhe h erhält man mithilfe des Sinusverhältnisses:

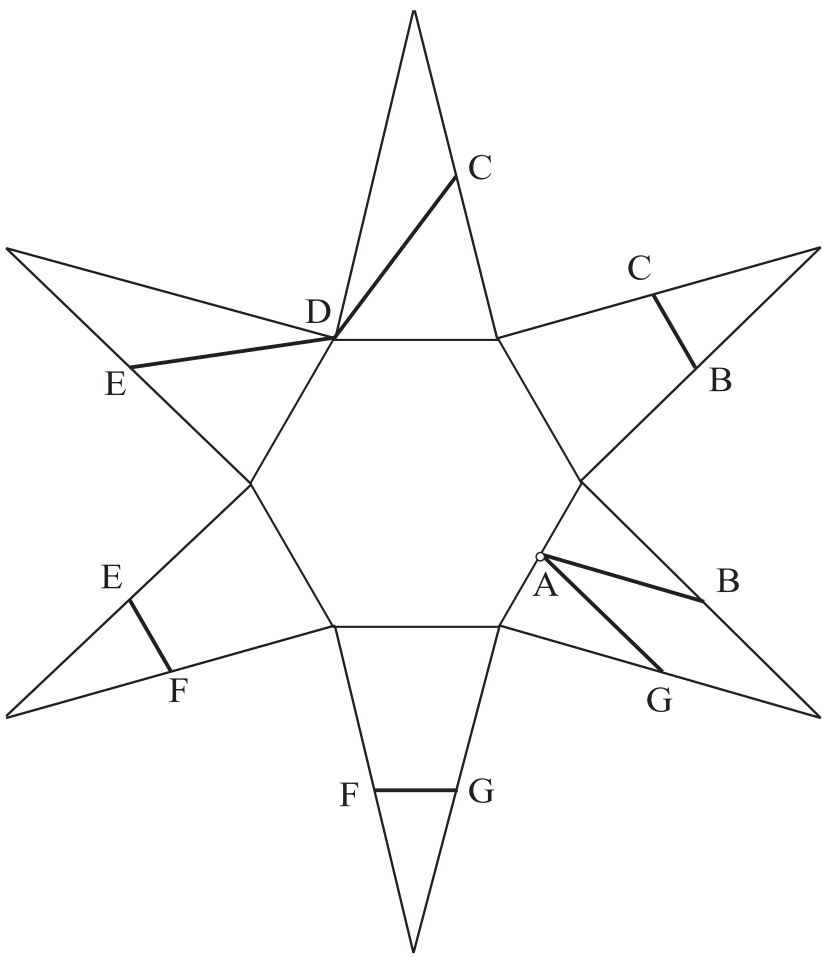


$$\sin\alpha = \frac{h}{b} \;\Rightarrow\; h = b \cdot \sin\alpha$$

Setzt man $h = b \cdot \sin\alpha$ in die Flächenformel ein, ergibt sich:

$$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\alpha$$

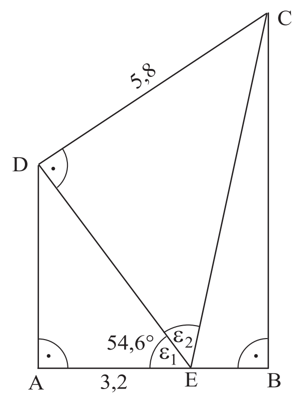
6) Zuerst markiert man die Lage der Punkte B, C, D, E, F und G in der Zeichnung. Beachtet man die Umlaufrichtung der Punkte, ergibt sich:



7) Die gezeichnete Parabel p ist symmetrisch zur y-Achse, hat den Scheitel $\mathrm{S}(0 \mid 2)$ und ist außerdem nach unten geöffnet. Sie hat damit die Gleichung $p\colon\ y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$. Diese Gleichung stimmt nicht mit der gegebenen Parabelgleichung überein.
Die gezeichnete Gerade g hat die Steigung $m = \frac{1}{2}$ und den y-Achsenabschnitt $c = -2$. Sie hat damit die Gleichung $g\colon\ y = \frac{1}{2}x - 2$. Diese Gleichung stimmt nicht mit der gegebenen Geradengleichung überein.
Somit hat Lukas nicht Recht.

Lösungen Teil A2 2014

1) Die bekannten Maße und Winkel werden in eine Skizze eingetragen:
   Den Umfang des Dreiecks EBC erhält man, indem man die Seiten $\overline{CE}$, $\overline{BC}$ und $\overline{BE}$ berechnet.
   Im Dreieck AED kann man zuerst die Seite $\overline{DE}$ bestimmen:



$$\begin{aligned}
\cos(\varepsilon_1) &= \frac{\overline{AE}}{\overline{DE}} \\
\cos(\varepsilon_1)\cdot\overline{DE} &= \overline{AE} \\
\overline{DE} &= \frac{\overline{AE}}{\cos(\varepsilon_1)} \\
\overline{DE} &= \frac{3,2}{\cos(54,6^\circ)} \\
\overline{DE} &\approx 5,52\,\text{cm}
\end{aligned}$$

Im Dreieck CDE kann man nun den Winkel ε_2 bestimmen:

$$\begin{aligned}
\tan(\varepsilon_2) &= \frac{\overline{CD}}{\overline{DE}} \\
\tan(\varepsilon_2) &= \frac{5,8}{5,52} \\
\varepsilon_2 &= \tan^{-1}\left(\frac{5,8}{5,52}\right) \\
\varepsilon_2 &\approx 46,42^\circ
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich der Winkel ε_3 bei Punkt E:

$$\varepsilon_3 = 180 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 180 - 54,6 - 46,42 = 78,98^\circ$$

Im Dreieck CDE kann man mithilfe des Satzes des Pythagoras die Seite $\overline{CE}$ bestimmen:

$$\begin{aligned}
\overline{CE}^2 &= \overline{CD}^2 + \overline{DE}^2 \\
\overline{CE} &= \sqrt{\overline{CD}^2 + \overline{DE}^2} \\
\overline{CE} &= \sqrt{5,8^2 + 5,52^2} \\
\overline{CE} &\approx 8,01\,\text{cm}
\end{aligned}$$

Im Dreieck BCE kann man nun noch die Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{BE}$ bestimmen:

$$\begin{aligned}\sin(\varepsilon_3) &= \frac{\overline{BC}}{\overline{CE}}\\ \sin(\varepsilon_3)\cdot\overline{CE} &= \overline{BC}\\ \sin(78{,}98^\circ)\cdot 8{,}01 &= \overline{BC}\\ \overline{BC} &\approx 7{,}86\,\text{cm}\end{aligned}$$

und

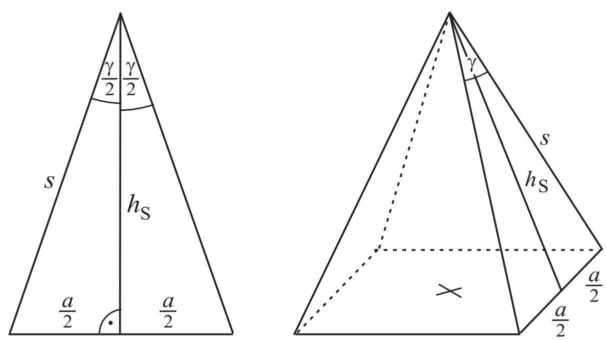
$$\begin{aligned}\cos(\varepsilon_3) &= \frac{\overline{BE}}{\overline{CE}}\\ \cos(\varepsilon_3)\cdot\overline{CE} &= \overline{BE}\\ \cos(78{,}98^\circ)\cdot 8{,}01 &= \overline{BE}\\ \overline{BE} &\approx 1{,}53\,\text{cm}\end{aligned}$$

Damit erhält man den Umfang des Dreiecks EBC:

$$U_{EBC} = \overline{CE}+\overline{BC}+\overline{BE} = 8{,}01+7{,}86+1{,}53 = 17{,}4\,\text{cm}$$

Der Umfang des Dreiecks EBC beträgt 17,4 cm.

2) Man kann die Situation wie folgt skizzieren:



Zuerst berechnet man im rechtwinkligen Dreieck $\frac{a}{2}$ und h_S:

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) &= \frac{\frac{a}{2}}{s}\\ \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)\cdot s &= \frac{a}{2}\\ \sin(17^\circ)\cdot 11{,}2 &= \frac{a}{2}\\ \frac{a}{2} &\approx 3{,}27\,\text{cm}\end{aligned}$$

und

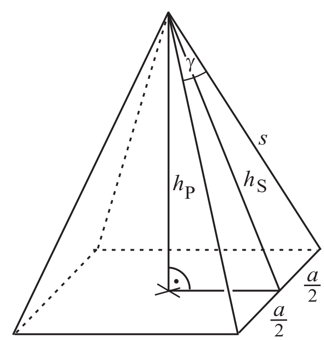
$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) &= \frac{h_S}{s}\\ \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)\cdot s &= h_S\\ \cos(17^\circ)\cdot 11,2 &= h_S\\ h_S &\approx 10,71\,\text{cm}\end{aligned}$$

Damit erhält man die Grundseite des Quadrats:

$$a = 2\cdot\frac{a}{2} = 2\cdot 3,27 = 6,54\,\text{cm}$$

Die Höhe h_P der quadratischen Pyramide erhält man mithilfe des Satzes des Pythagoras:

$$\begin{aligned}h_P^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 &= h_S^2\\ h_P^2 &= h_S^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\\ h_P &= \sqrt{h_S^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}\\ h_P &= \sqrt{10,71^2 - 3,27^2}\\ h_P &\approx 10,20\,\text{cm}\end{aligned}$$



Das Volumen der Pyramide erhält man mit der Formel $V_P = \frac{1}{3}\cdot G_P\cdot h_P$.
Für die Grundfläche gilt: $G_P = a\cdot a = a^2 = 6,54^2 \approx 42,77\,\text{cm}^2$
Damit ergibt sich das Volumen der Pyramide:

$$V_P = \frac{1}{3}\cdot G_P\cdot h_P = V_P = \frac{1}{3}\cdot 42,77\cdot 10,20 = 145,42\,\text{cm}^3$$

Da die Kugel das gleiche Volumen wie die Pyramide hat, kann man den Radius r der Kugel mit der Volumenformel $V_{Ku} = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3$ durch Gleichsetzen mit dem Pyramidenvolumen bestimmen:

$$\begin{aligned}\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3 &= 145,42\\ 4\cdot\pi\cdot r^3 &= 145,42\cdot 3\\ r^3 &= \frac{145,42\cdot 3}{4\cdot\pi}\\ r &= \sqrt[3]{\frac{145,42\cdot 3}{4\cdot\pi}}\\ r &\approx 3,26\end{aligned}$$

Der Radius der Kugel beträgt etwa $3,26\,\text{cm}$.

3) Die Gleichung der nach oben geöffneten verschobenen Normalparabel p mit den Nullstellen $x_1 = -2$ und $x_2 = 4$ erhält man mit Hilfe der Normalform $y = x^2 + bx + c$. Setzt man die Koordinaten der Punkte $(-2 \mid 0)$ und $(4 \mid 0)$ in die Normalform ein, ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{llcccccc} \text{I} & 0 & = & (-2)^2 & + & b\cdot(-2) & + & c \\ \text{II} & 0 & = & 4^2 & + & b\cdot 4 & + & c \end{array}$$

bzw.

$$\begin{array}{llcccccc} \text{I} & 0 & = & 4 & - & 2b & + & c \\ \text{II} & 0 & = & 16 & + & 4b & + & c \end{array}$$

Subtrahiert man Gleichung II von Gleichung I, erhält man:

$$0 = -12 - 6b \;\Rightarrow\; b = -2$$

Setzt man $b = -2$ in Gleichung I ein, ergibt sich:

$$0 = 4 - 2\cdot(-2) + c \;\Rightarrow\; c = -8$$

Damit hat die Parabel p die Gleichung: $y = x^2 - 2x - 8$.
Ebenso kann man den Nullstellenansatz verwenden:

$$p\colon\; y = (x-(-2))\cdot(x-4) = (x+2)\cdot(x-4) = x^2 - 4x + 2x - 8 = x^2 - 2x - 8$$

Die Gleichung der Geraden g, die durch den Punkt $\mathrm{R}(2{,}5 \mid -4)$ geht und die Steigung $m = -2$ hat, erhält man mit der Hauptform $y = mx + c$. Setzt man die Koordinaten von R und m in diese ein, ergibt sich:

$$-4 = -2\cdot 2{,}5 + c \;\Rightarrow\; c = 1$$

Damit hat die Gerade g die Gleichung:

$$g\colon\; y = -2x + 1$$

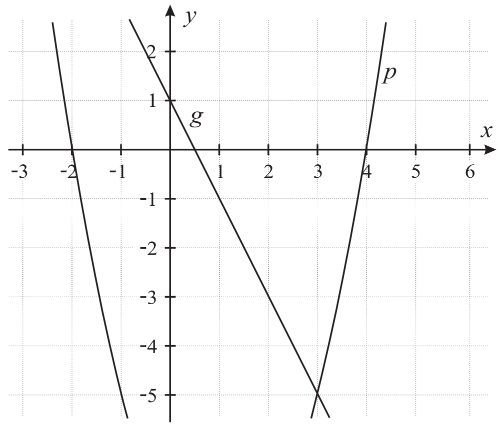
Die Koordinaten der Schnittpunkte Q_1 und Q_2 von p und g erhält man durch Gleichsetzen der Gleichungen von p und g:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 8 &= -2x + 1 \\ x^2 &= 9 \\ x_{1,2} &= \pm 3 \end{aligned}$$

Die zugehörigen y-Werte erhält man, indem man die x-Werte in die Gleichung von g einsetzt:

$$y_1 = -2 \cdot (-3) + 1 = 7$$
$$y_2 = -2 \cdot 3 + 1 = -5$$

Damit haben die Schnittpunkte von p und g die Koordinaten $Q_1(-3 \mid 7)$ und $Q_2(3 \mid -5)$.



4) Man erhält den Prozentsatz der kontrollierten Zweiräder, indem man 75% (Pkw) und 7,5% (Lkw) sowie 2,5% (Busse) von 100% subtrahiert:

$$100\% - 75\% - 7{,}5\% - 2{,}5\% = 15\%$$

Also wurden 15% Zweiräder kontrolliert.
Man erhält die Anzahl der kontrollierten Zweiräder, indem man 15% von insgesamt 640 Fahrzeugen berechnet:

$$15\% \text{ von } 640 = \frac{15}{100} \cdot 640 = 0{,}15 \cdot 640 = 96$$

Ebenso kann man den Dreisatz verwenden:

$$\begin{aligned} 100\% &\mathrel{\widehat{=}} 640 \\ 1\% &\mathrel{\widehat{=}} \frac{640}{100} \\ 15\% &\mathrel{\widehat{=}} \frac{640}{100} \cdot 15 = 96 \end{aligned}$$

Somit wurden 96 Zweiräder kontrolliert.

Man erhält die Anzahl der kontrollierten Pkw-Fahrer, indem man 75% von insgesamt 640 Fahrzeugen berechnet:

$$75\% \text{ von } 640 = \frac{75}{100} \cdot 640 = 0{,}75 \cdot 640 = 480$$

Ebenso kann man den Dreisatz verwenden:

$$\begin{aligned} 100\% &\mathrel{\widehat{=}} 640 \\ 1\% &\mathrel{\widehat{=}} \frac{640}{100} \\ 75\% &\mathrel{\widehat{=}} \frac{640}{100} \cdot 75 = 480 \end{aligned}$$

Somit wurden 480 Pkw kontrolliert.
Da jeder Achte der Pkw-Fahrer die zulässige Höchstgeschwindigkeit überschritt, teilt man die Anzahl der kontrollierten Pkw-Fahrer durch acht:

$$\frac{480}{8} = 60$$

Damit haben 60 Pkw-Fahrer die zulässige Höchstgeschwindigkeit überschritten.
Man erhält die Anzahl der Pkw-Fahrer, die mit einem zeitweiligen Fahrverbot rechnen müssen, indem man 5 % von 60 Pkw-Fahrern, die die zulässige Höchstgeschwindigkeit überschritten haben, berechnet:

$$5\% \text{ von } 60 = \frac{5}{100} \cdot 60 = 0,05 \cdot 60 = 3$$

Ebenso kann man den Dreisatz verwenden:

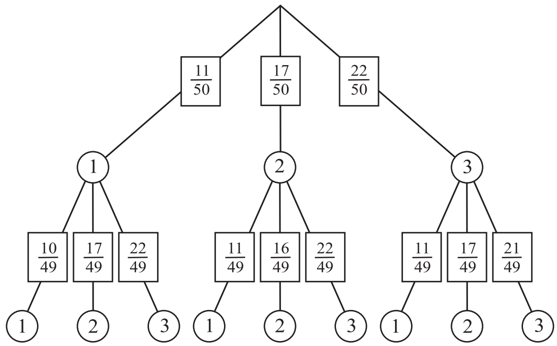
$$\begin{aligned} 100\% &\mathrel{\widehat{=}} 60 \\ 1\% &\mathrel{\widehat{=}} \frac{60}{100} \\ 5\% &\mathrel{\widehat{=}} \frac{60}{100} \cdot 5 = 3 \end{aligned}$$

Somit müssen drei Pkw-Fahrer mit einem zeitweiligen Fahrverbot rechnen.

5) Anhand des gegebenen Baumdiagramms kann man ablesen, dass im Behälter 11 Kugeln mit der Zahl «1» und 17 Kugeln mit der Zahl «2» sind. Damit erhält man die Anzahl der Kugeln mit «3», indem man 11 und 17 von 50 subtrahiert:

$$50 - 11 - 17 = 22$$

Somit sind 22 Kugeln mit der Zahl «3» im Behälter.
Damit beträgt die Wahrscheinlichkeit, beim ersten Zug eine Kugel mit der Zahl «3» zu ziehen, $\frac{22}{50}$.
Da zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen werden, ändern sich die Wahrscheinlichkeiten beim zweiten Zug.
Damit ergibt sich folgendes Baumdiagramm:



Die Wahrscheinlichkeit, dass man zwei Kugeln zieht, die mit der gleichen Zahl beschriftet sind, erhält man mithilfe der Pfadregeln (Produkt- und Summenregel):

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\text{Kugeln mit zwei gleichen Zahlen}) &= \mathrm{P}(11) + \mathrm{P}(22) + \mathrm{P}(33) \\
&= \frac{11}{50} \cdot \frac{10}{49} + \frac{17}{50} \cdot \frac{16}{49} + \frac{22}{50} \cdot \frac{21}{49} \\
&= \frac{422}{1225} \\
&\approx 0{,}344
\end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, zwei Kugeln zu ziehen, die mit der gleichen Zahl beschriftet sind, beträgt etwa $34{,}4\,\%$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass die erste gezogene Zahl größer als die zweite ist, erhält man ebenfalls mithilfe der Pfadregeln:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\text{erste Zahl ist größer als die zweite}) &= \mathrm{P}(21) + \mathrm{P}(31) + \mathrm{P}(32) \\
&= \frac{17}{50} \cdot \frac{11}{49} + \frac{22}{50} \cdot \frac{11}{49} + \frac{22}{50} \cdot \frac{17}{49} \\
&= \frac{803}{2450} \\
&\approx 0{,}328
\end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die erste gezogene Zahl größer als die zweite ist, beträgt etwa $32{,}8\,\%$.

6) Am gegebenen Boxplot kann man folgende Kennwerte ablesen:

$$\begin{aligned}
x_{\text{min}} &= 1 \\
q_u &= 7 \\
z &= 12 \\
q_o &= 14 \\
x_{\text{max}} &= 20
\end{aligned}$$

Den Wert von $x_{\max} = 20$ kann man in der Tabelle bei Rang 17 eintragen.
Da es in der Rangliste 17 Werte gibt, kann man den Zentralwert $z = 12$ bei Rang 9 eintragen.
Für das untere Quartil gilt:

$$\mathrm{n} \cdot 0,25 = 17 \cdot 0,25 = 4,25 \;\Rightarrow\; q_u = x_5$$

Damit muss in der Rangliste bei Rang 5 auf jeden Fall $q_u = 7$ eingetragen werden.
Für das obere Quartil gilt:

$$\mathrm{n} \cdot 0,75 = 17 \cdot 0,75 = 12,75 \;\Rightarrow\; q_o = x_{13}$$

Damit muss in der Rangliste bei Rang 13 auf jeden Fall $q_o = 14$ stehen, was schon der Fall ist. Somit erhält man:

Rangplatz	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Punkte	1	1		5	**7**	7	7	9	**12**	12	12	13	14		16	17	**20**

Bei Rang 3 muss ein Zwischenwert stehen, der mindestens 1 und höchstens 5 ist.
Bei Rang 14 muss ein Zwischenwert stehen, der mindestens 14 und höchstens 16 ist.
Um diese beiden Zwischenwerte zu bestimmen, ist noch der Durchschnitt zu beachten.
Da der Durchschnitt 10 Punkte beträgt und es 17 Schülerinnen und Schüler gibt, beträgt die Gesamtsumme aller Punkte 170.
Als Zwischensumme erhält man:

$$1+1+5+7+7+7+9+12+12+12+13+14+16+17+20 = 153$$

Somit bleiben für Rang 3 und Rang 14 noch $170 - 153 = 17$ Punkte übrig.
Also gibt es folgende Möglichkeiten:

Rang 3	3	**2**	1
Rang 14	14	**15**	16

Damit kann man die Rangliste beispielsweise mit dem Wertepaar (2/15) vervollständigen:

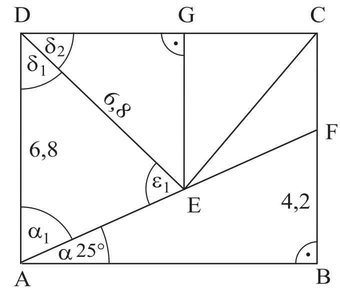
Rangplatz	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Punkte	1	1	**2**	5	**7**	7	7	9	**12**	12	12	13	14	**15**	16	17	**20**

Acht Schülerinnen und Schüler haben höchstens neun Punkte, also weniger als der Durchschnitt.
Neun Schülerinnen und Schüler haben mindestens 12 Punkte, also mehr als der Durchschnitt.
Somit hat Pauline mit ihrer Behauptung, dass mehr als die Hälfte aller Schülerinnen und Schüler besser als der Durchschnitt ist, Recht.

Lösungen Teil B 2014

Aufgabe 1

a) Die bekannten Maße und Winkel werden in eine Skizze eingetragen.
Im Dreieck ABF kann man die Seite $\overline{AB}$ bestimmen:



$$\tan(\alpha) = \frac{\overline{BF}}{\overline{AB}}$$
$$\tan(\alpha) \cdot \overline{AB} = \overline{BF}$$
$$\overline{AB} = \frac{\overline{BF}}{\tan(\alpha)}$$
$$\overline{AB} = \frac{4,2}{\tan(25^\circ)}$$
$$\overline{AB} \approx 9,01\,\text{cm}$$

Im Dreieck AED kann man alle Winkel bestimmen, da es sich wegen $\overline{AD} = \overline{DE}$ um ein gleichschenkliges Dreieck handelt:

$$\alpha_1 = 90 - \alpha = 90 - 25 = 65^\circ$$
$$\varepsilon_1 = \alpha_1 = 65^\circ$$
$$\delta_1 = 180 - \alpha_1 - \varepsilon_1 = 180 - 65 - 65 = 50^\circ$$

Damit ergibt sich im Dreieck EGD:

$$\delta_2 = 90 - \delta_1 = 90 - 50 = 40^\circ$$

Im Dreieck EGD kann man die Seiten $\overline{DG}$ und $\overline{EG}$ bestimmen:

$$\cos(\delta_2) = \frac{\overline{DG}}{\overline{DE}}$$
$$\cos(\delta_2) \cdot \overline{DE} = \overline{DG}$$
$$\cos(40^\circ) \cdot 6,8 = \overline{DG}$$
$$\overline{DG} \approx 5,21\,\text{cm}$$

und

$$\sin(\delta_2) = \frac{\overline{EG}}{\overline{DE}}$$
$$\sin(\delta_2) \cdot \overline{DE} = \overline{EG}$$
$$\sin(40^\circ) \cdot 6,8 = \overline{EG}$$
$$\overline{EG} \approx 4,37\,\text{cm}$$

Damit ergibt sich:

$$\overline{\mathrm{CD}} = \overline{\mathrm{AB}} = 9,01\,\mathrm{cm}$$
$$\overline{\mathrm{CG}} = \overline{\mathrm{CD}} - \overline{\mathrm{DG}} = 9,01 - 5,21 = 3,80\,\mathrm{cm}$$

Im Dreieck CGE kann man nun die Seite $\overline{\mathrm{CE}}$ mithilfe des Satzes des Pythagoras berechnen:

$$\overline{\mathrm{CE}}^2 = \overline{\mathrm{CG}}^2 + \overline{\mathrm{EG}}^2$$
$$\overline{\mathrm{CE}} = \sqrt{\overline{\mathrm{CG}}^2 + \overline{\mathrm{EG}}^2}$$
$$\overline{\mathrm{CE}} = \sqrt{3,80^2 + 4,37^2}$$
$$\overline{\mathrm{CE}} \approx 5,79\,\mathrm{cm}$$

Die Seite $\overline{\mathrm{CE}}$ hat eine Länge von etwa $5,8\,\mathrm{cm}$.

b) Aus der Wertetabelle kann man die Punkte $\mathrm{A}(-2 \mid 3)$ und $\mathrm{B}(0 \mid 3)$ ablesen.
Als Ansatz für die Gleichung einer verschobenen nach oben geöffneten Normalparabel p_1 verwendet man $y = x^2 + bx + c$.
Setzt man die Koordinaten von B in den Ansatz ein, ergibt sich:

$$3 = 0^2 + b \cdot 0 + c \;\Rightarrow\; c = 3$$

Damit erhält man:

$$y = x^2 + bx + 3$$

Setzt man die Koordinaten von A in diese Gleichung ein, erhält man:

$$3 = (-2)^2 + b \cdot (-2) + 3 \;\Rightarrow\; b = 2$$

Somit hat die Parabel p_1 die Gleichung:

$$p_1 : y = x^2 + 2x + 3$$

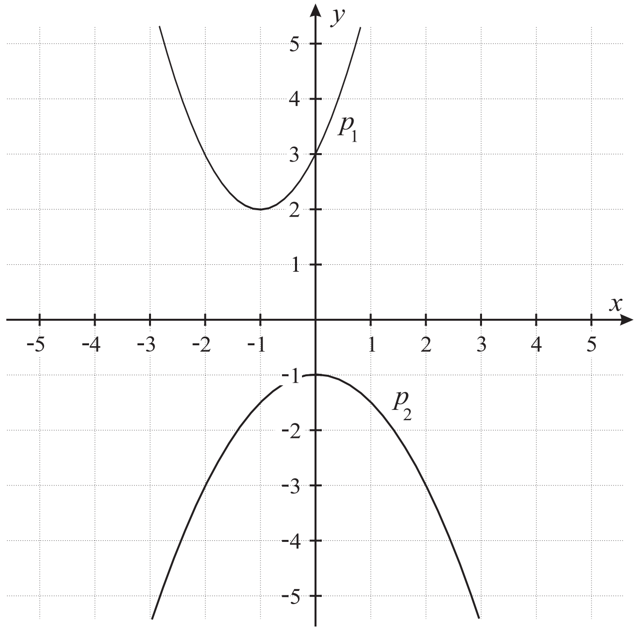
Mithilfe des Taschenrechners kann man die Wertetabelle für p_1 vervollständigen:

x	-3	-2	-1	0	1	2
y	6	3	2	3	6	11

Um die beiden Parabeln p_1 und p_2 in ein Koordinatensystem zu zeichnen, verwendet man jeweils die Wertetabellen. Alternativ kann man auch die Koordinaten des Scheitels S_1 von p_1 aus der Tabelle ablesen: $\mathrm{S}_1(-1 \mid 2)$ und p_1 mit der Parabelschablone zeichnen.
Für p_2 mit der Gleichung $y = -\frac{1}{2}x^2 - 1$ ergibt sich folgende Wertetabelle:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-9	$-5,5$	-3	$-1,5$	-1	$-1,5$	-3	$-5,5$	-9

Damit erhält man folgende Zeichnung:



Die Parabel p_3 mit der Gleichung $y = ax^2$ hat den Scheitel $S_3(0 \mid 0)$.
Damit p_3 weder mit p_1 noch mit p_2 einen gemeinsamen Punkt hat, muss die Parabel p_3 beispielsweise nach unten geöffnet und gleich oder mehr als p_2 gestaucht sein, d.h. $-\frac{1}{2} \leqslant a < 0$. Beispielsweise kann man $a = -\frac{1}{2}$ wählen.
Damit ergibt sich: $p_3\colon\, y = -\frac{1}{2}x^2$.
Um nachzuweisen, dass p_3 weder mit p_1 noch mit p_2 einen gemeinsamen Punkt hat, setzt man die Gleichungen von p_1 und p_3 bzw. von p_2 und p_3 gleich:

$$
\begin{aligned}
p_1 &= p_3 \\
x^2 + 2x + 3 &= -\frac{1}{2}x^2 \\
\frac{3}{2}x^2 + 2x + 3 &= 0 \\
x^2 + \frac{4}{3}x + 2 &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_{1,2} &= -\frac{\frac{4}{3}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\frac{4}{3}}{2}\right)^2 - 2} \\
x_{1,2} &= -\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} - 2} \\
x_{1,2} &= -\frac{2}{3} \pm \sqrt{-\frac{14}{9}}
\end{aligned}
$$

und

$$\begin{aligned} p_2 &= p_3 \\ -\frac{1}{2}x^2 - 1 &= -\frac{1}{2}x^2 \\ -1 &= 0 \end{aligned}$$

Aufgrund des Widerspruchs und da unter der Wurzel eine negative Zahl steht, gibt es keine reelle Lösung.
Somit haben sowohl p_1 und p_3 als auch p_2 und p_3 keine gemeinsamen Punkte.

Aufgabe 2

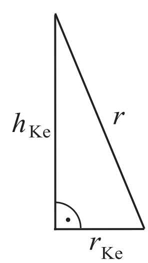
a) Zuerst bestimmt man die Bogenlänge b des Kreisausschnitts, der die Mantelfläche des Kegels bildet, mithilfe der Formel $b = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$:

$$b = 2 \cdot \pi \cdot 20 \cdot \frac{152^\circ}{360^\circ} \approx 53{,}06\,\text{cm}$$

Die Bogenlänge b des Kreisausschnitts ist gleich groß wie der Umfang U der Grundfläche des Kegels. Damit kann man den Radius r_{Ke} des Kegels durch Gleichsetzen bestimmen:

$$\begin{aligned} b &= \text{U} \\ b &= 2 \cdot \pi \cdot r_{\text{Ke}} \\ \frac{b}{2 \cdot \pi} &= r_{\text{Ke}} \\ \frac{53{,}06}{2 \cdot \pi} &= r_{\text{Ke}} \\ r_{\text{Ke}} &\approx 8{,}44\,\text{cm} \end{aligned}$$

Die Mantellinie s des Kegels ist gleich groß wie der Radius r des gegebenen Kreises: $s = r = 20{,}0\,\text{cm}$.
Mithilfe des Satzes des Pythagoras kann man damit die Höhe h_{Ke} des Kegels berechnen:



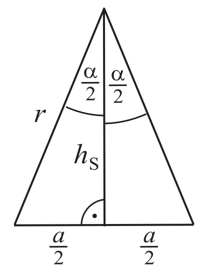
$$\begin{aligned} h_{\text{Ke}}^2 + r_{\text{Ke}}^2 &= s^2 \\ h_{\text{Ke}}^2 &= s^2 - r_{\text{Ke}}^2 \\ h_{\text{Ke}} &= \sqrt{s^2 - r_{\text{Ke}}^2} \\ h_{\text{Ke}} &= \sqrt{20^2 - 8{,}44^2} \\ h_{\text{Ke}} &\approx 18{,}13\,\text{cm} \end{aligned}$$

Nun bestimmt man die Höhe h_{Py} der quadratischen Pyramide.
Den spitzen Winkel α eines Seitenflächendreiecks erhält man, indem man 152° von 360° subtrahiert und das Ergebnis durch vier teilt:

$$\alpha = \frac{360 - 152}{4} = 52^\circ$$

Im rechtwinkligen Dreieck kann man $\frac{a}{2}$ und h_S bestimmen:

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{\frac{a}{2}}{r} \\ \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot r &= \frac{a}{2} \\ \sin(26^\circ) \cdot 20 &= \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} &\approx 8{,}77\,\text{cm} \end{aligned}$$

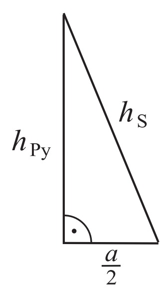


und:

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{h_S}{r} \\ \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot r &= h_S \\ \cos(26^\circ) \cdot 20 &= h_S \\ h_S &\approx 17{,}98\,\text{cm} \end{aligned}$$

Mithilfe des Satzes des Pythagoras erhält man:

$$\begin{aligned} h_{\text{Py}}^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 &= h_S^2 \\ h_{\text{Py}}^2 &= h_S^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\ h_{\text{Py}} &= \sqrt{h_S^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} \\ h_{\text{Py}} &= \sqrt{17{,}98^2 - 8{,}77^2} \\ h_{\text{Py}} &\approx 15{,}70\,\text{cm} \end{aligned}$$



Damit ergibt sich die Differenz d der beiden Körperhöhen:

$$d = h_{\text{Ke}} - h_{\text{Py}} = 18{,}13 - 15{,}70 = 2{,}43\,\text{cm}$$

Die Differenz der beiden Körperhöhen beträgt etwa $2{,}4\,\text{cm}$.

b) Die Gleichung der Parabel p_1 der Form $y = x^2 + bx - 1$ erhält man, indem man die Koordinaten des Punktes $A(-1 \mid 2)$ in diese einsetzt:

$$2 = (-1)^2 + b \cdot (-1) - 1 \;\Rightarrow\; b = -2$$

Somit hat die Parabel p_1 die Gleichung:

$$p_1: y = x^2 - 2x - 1$$

Die Gleichung der Parabel p_2 der Form $y = -x^2 + c$ erhält man, indem man ebenfalls die Koordinaten des Punktes $\mathrm{A}(-1 \mid 2)$ in diese einsetzt:

$$2 = -(-1)^2 + c \;\Rightarrow\; c = 3$$

Somit hat die Parabel p_2 die Gleichung:

$$p_1: y = -x^2 + 3$$

Die Koordinaten des zweiten Schnittpunkts B der beiden Parabeln erhält man durch Gleichsetzen der Gleichungen von p_1 und p_2:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 1 &= -x^2 + 3 \\ 2x^2 - 2x - 4 &= 0 \\ x^2 - x - 2 &= 0 \end{aligned}$$

Mithilfe der *bc*-Formel ($b = -1$ und $c = -2$) erhält man:

$$x_{1,2} = -\frac{-1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 - (-2)}$$

Es ergeben sich die Lösungen $x_1 = -1$ (x-Wert von Punkt A) und $x_2 = 2$.
Den zugehörigen y-Wert des Punktes B erhält man, indem man $x = 2$ in die Gleichung von p_1 einsetzt:

$$y = 2^2 - 2 \cdot 2 - 1 = -1$$

Somit hat der weitere Schnittpunkt B die Koordinaten $\mathrm{B}(2 \mid -1)$.
Die Koordinaten des Scheitels S_1 der Parabel p_1 erhält man durch quadratische Ergänzung:

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 2x - 1 \\ y &= x^2 - 2x + 1 - 1 - 1 \\ y &= (x-1)^2 - 2 \end{aligned}$$

Damit hat der Scheitel S_1 die Koordinaten $\mathrm{S}_1(1 \mid -2)$.

Die Koordinaten des Scheitels S_2 der Parabel p_2 erhält man durch Umschreiben in die Scheitelform:

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + 3 \\ y &= -(x-0)^3 + 3 \end{aligned}$$

Damit hat der Scheitel S_2 die Koordinaten $S_2(0 \mid 3)$.

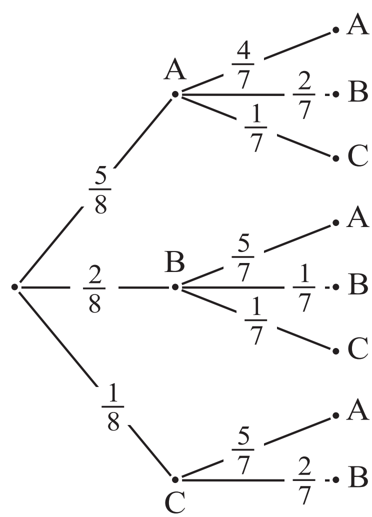
Um zu prüfen, ob die Gerade S_1B parallel zur Geraden S_2A ist, berechnet man jeweils die Steigungen zwischen den Punkten $S_1(1 \mid -2)$ und $B(2 \mid -1)$ bzw. $S_2(0 \mid 3)$ und $A(-1 \mid 2)$ mit der Steigungsformel $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$:

$$m_{S_1B} = \frac{-1-(-2)}{2-1} = 1$$
$$m_{S_2A} = \frac{2-3}{-1-0} = 1$$

Da beide Steigungen gleich sind, ist die Gerade S_1B parallel zur Geraden S_2A.
Somit hat Luca mit ihrer Behauptung Recht.

Aufgabe 3

a) Es gibt acht Karten, von denen fünf mit dem Buchstaben A, zwei mit dem Buchstaben B und eine mit dem Buchstaben C beschriftet sind. Damit kann man die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten beim ersten Zug bestimmen: $P(A) = \frac{5}{8}$, $P(B) = \frac{2}{8}$ und $P(C) = \frac{1}{8}$. Da zwei Karten gleichzeitig gezogen werden, handelt es sich um «Ziehen ohne Zurücklegen», d.h. die Wahrscheinlichkeiten ändern sich beim zweiten Zug. Damit erhält man folgendes Baumdiagramm:



Die Wahrscheinlichkeit, zwei Karten mit verschiedenen Buchstaben zu ziehen, erhält man mithilfe der Pfadregeln (Produkt- und Summenregel):

$$\begin{aligned} P(\text{zwei verschiedene Buchstaben}) &= P(AB) + P(BA) + P(AC) + P(CA) + P(BC) + P(CB) \\ &= \frac{5}{8}\cdot\frac{2}{7} + \frac{2}{8}\cdot\frac{5}{7} + \frac{5}{8}\cdot\frac{1}{7} + \frac{1}{8}\cdot\frac{5}{7} + \frac{2}{8}\cdot\frac{1}{7} + \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{7} \\ &= \frac{17}{28} \\ &\approx 0,607 \end{aligned}$$

Somit beträgt die Wahrscheinlichkeit, zwei Karten mit verschiedenen Buchstaben zu ziehen, etwa $60,7\%$.

Um den Erwartungswert für den Gewinn des Spielers zu bestimmen, berechnet man zuerst die Wahrscheinlichkeiten für die möglichen Ergebnisse, bei denen Gewinne erzielt werden.

Mithilfe der Pfadregeln ergibt sich:

$$\mathrm{P}(\text{zwei gleiche Buchstaben}) = \mathrm{P}(\mathrm{AA}) + \mathrm{P}(\mathrm{BB}) + \mathrm{P}(\mathrm{CC}) = \frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7} + \frac{2}{8}\cdot\frac{1}{7} + \frac{1}{8}\cdot\frac{0}{7} = \frac{11}{28}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\text{C wird gezogen}) &= \mathrm{P}(\mathrm{AC}) + \mathrm{P}(\mathrm{CA}) + \mathrm{P}(\mathrm{BC}) + \mathrm{P}(\mathrm{CB})\\ &= \frac{5}{8}\cdot\frac{1}{7} + \frac{1}{8}\cdot\frac{5}{7} + \frac{2}{8}\cdot\frac{1}{7} + \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{7} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Den Erwartungswert E_1 für den Gewinn eines Spielers beim Gewinnplan 1 erhält man, indem man die Gewinne für das jeweilige Ergebnis mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten multipliziert und den Einsatz subtrahiert:

$$E_1 = 3\,€\cdot\frac{11}{28} + 5\,€\cdot\frac{1}{4} - 2{,}50\,€ \approx -0{,}07\,€$$

Somit beträgt der Erwartungswert für den Gewinn eines Spielers beim Gewinnplan 1 etwa $-0{,}07$ Euro, d.h. der Betreiber macht auf lange Sicht pro Spiel einen Gewinn von $0{,}07$ Euro.

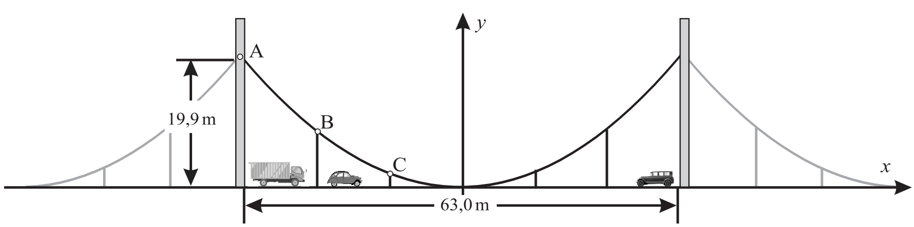
Den Erwartungswert E_2 für den Gewinn eines Spielers beim Gewinnplan 2 erhält man, indem man die Gewinne für das jeweilige Ergebnis mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten multipliziert und den Einsatz subtrahiert:

$$E_2 = 5\,€\cdot\frac{11}{28} + 3\,€\cdot\frac{1}{4} - 2{,}50\,€ \approx 0{,}21\,€$$

Damit beträgt der Erwartungswert für den Gewinn eines Spielers beim Gewinnplan 2 etwa $0{,}21$ Euro, d.h. der Betreiber macht auf lange Sicht pro Spiel einen Verlust von $0{,}21$ Euro.

Also sollte sich der Betreiber für Gewinnplan 1 entscheiden, da er nur bei diesem selbst auf lange Sicht Gewinn macht.

b) Das Koordinatensystem wird so gelegt, dass die x-Achse auf der Fahrbahn und die y-Achse durch den Scheitelpunkt S der parabelförmigen Tragseile geht.



Als Ansatz für die Parabel, die symmetrisch zur y-Achse ist, verwendet man $y = ax^2 + c$. Der Scheitel S der Parabel p hat damit die Koordinaten $\mathrm{S}(0 \mid 0)$. Setzt man die Koordinaten von S in den Ansatz $y = ax^2 + c$ ein, ergibt sich:

$$0 = a\cdot 0^2 + c \;\Rightarrow\; c = 0$$

Damit erhält man: $y = ax^2$.

Da der Abstand der beiden großen Säulen $63{,}0\,\mathrm{m}$ beträgt, hat der Punkt A die Koordinaten

$A(-31{,}5 \mid 19{,}9)$. Setzt man die Koordinaten von A in die Gleichung von p ein, ergibt sich:

$$19{,}9 = a \cdot (-31{,}5)^2 \;\Rightarrow\; a = \frac{19{,}9}{(-31{,}5)^2} \approx 0{,}02$$

Somit hat die Parabel p die Gleichung:

$$p\colon\; y = 0{,}02x^2$$

Da die vier Stahlseile auf jeder Seite in gleich großen Abständen verlaufen, hat der Punkt C den x-Wert $x_1 = \frac{-31{,}5}{3} = -10{,}5$.
Den zugehörigen y-Wert erhält man, indem man $x_1 = -10{,}5$ in die Gleichung der Parabel einsetzt:

$$y_1 = 0{,}02 \cdot (-10{,}5)^2 = 2{,}205$$

Damit hat der Punkt C die Koordinaten $C(-10{,}5 \mid 2{,}205)$.
Der Punkt B hat den x-Wert $x_2 = \frac{2}{3} \cdot (-31{,}5) = -21$.
Den zugehörigen y-Wert erhält man, indem man $x_2 = -21$ in die Gleichung der Parabel einsetzt:

$$y_2 = 0{,}02 \cdot (-21)^2 = 8{,}82$$

Damit hat der Punkt B die Koordinaten $B(-21 \mid 8{,}82)$.
Die Länge eines Stahlseils entspricht jeweils dem y-Wert des entsprechenden Punktes.
Aufgrund der symmetrischen Anordnung gibt es von jeder Seite zwei Stahlseile an einem Tragseil, z.B. bei $B(-10{,}5 \mid 2{,}205)$ und $B'(10{,}5 \mid 2{,}205)$. Da aber auch die Tragseile auf der anderen Fahrbahnseite die in der zweidimensionalen Grafik nicht zu sehen sind, gerechnet werden, gibt es von jeder Sorte insgesamt vier.
Damit ergibt sich die Gesamtlänge L der acht Stahlseile:

$$L = 4 \cdot 2{,}205 + 4 \cdot 8{,}82 = 44{,}1\,\text{m}$$

Die acht Stahlseile haben eine Gesamtlänge von $44{,}1\,\text{m}$.