Gruber | Neumann | Rosner | Schumm

Realschule Mathemathik Prüfung 2022

Originalaufgaben

Mathe gut erklärt

Maßgeschneidert für die neue Realschulprüfung

Realschulprüfung Baden-Württemberg

Übungsbuch

Mit vielen hilfreichen Tipps und ausführlichen Lösungen

Freiburger Verlag

Realschulabschlussprüfung 2016

Tipps ab Seite 9, Lösungen ab Seite 14

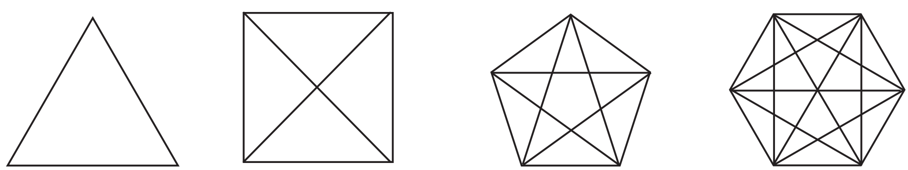
Realschulabschlussprüfung 2016, Teil A1 *

Im Teil A 1 (10 P) sind alle Aufgaben zu bearbeiten.
Zugelassene Hilfsmittel: Parabelschablone, Zeichengeräte

1) Bestimmen Sie die Lösung folgender Gleichung: 1 P

$$\frac{4}{2x+3} = \frac{2}{9}$$

2) In der Zeichnung sind die Verbindungslinien der Eckpunkte im 3-, 4-, 5- und 6-Eck dargestellt. 2 P

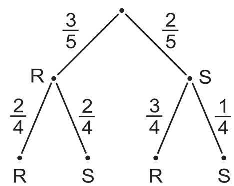


Wie viele Verbindungslinien hat ein 10-Eck?

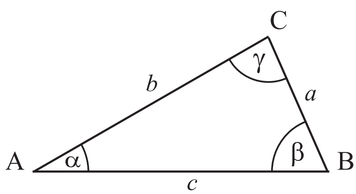
3) Ein Quader der Breite $3,0$ cm und der Tiefe $4,0$ cm sowie der Höhe $5,0$ cm ist vollständig mit Wasser gefüllt. 2 P
Das Wasser wird in einen Würfel mit Kantenlänge $3,0$ cm gegossen, bis er vollständig gefüllt ist.
Wie hoch steht das Wasser anschließend im Quader?
Die gesamte im Quader verbliebene Wassermenge wird in eine quadratische Pyramide mit der Grundkante $3,0$ cm gefüllt. Diese Pyramide ist nun ebenfalls vollständig mit Wasser gefüllt. Berechnen Sie die Höhe dieser Pyramide.

* Der Aufgabenteil A1 wurde ergänzt. Bei der Bearbeitung dieses Teils sind keine weiteren Hilfsmittel erlaubt.

4) Geben Sie eine Situation an, die durch das rechts abgebildete Baumdiagramm beschrieben werden kann. 1 P

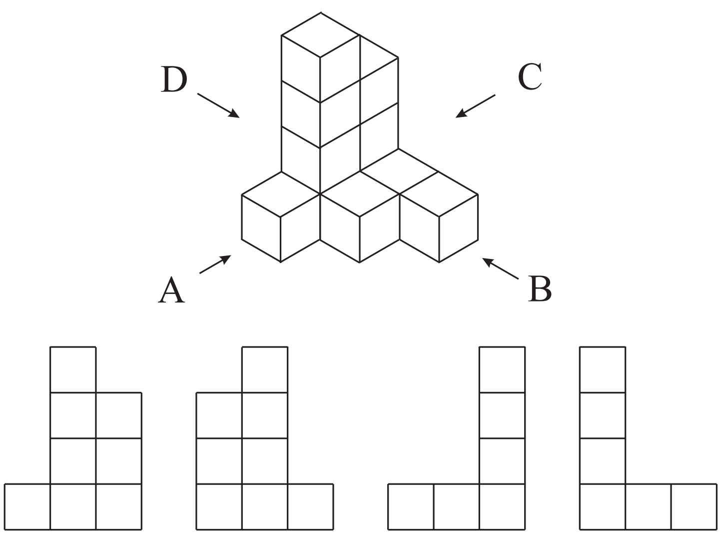


5) Die Zeichnung zeigt ein Dreieck mit einem Umfang von 10 cm (Zeichnung nicht maßstäblich). In diesem Dreieck ist die Seite *c* die längste Seite. Entscheiden Sie, welche Aussagen richtig sind und kreuzen Sie diese an: 1 P



☐ $a = 5\,\text{cm}$ ☐ $\gamma < \alpha$
☐ $a = 10\,\text{cm}$ ☐ $\gamma > \alpha$
☐ $a > 5\,\text{cm}$ ☐ $\gamma = \alpha$
☐ $a < 5\,\text{cm}$ ☐ $\gamma = \beta$

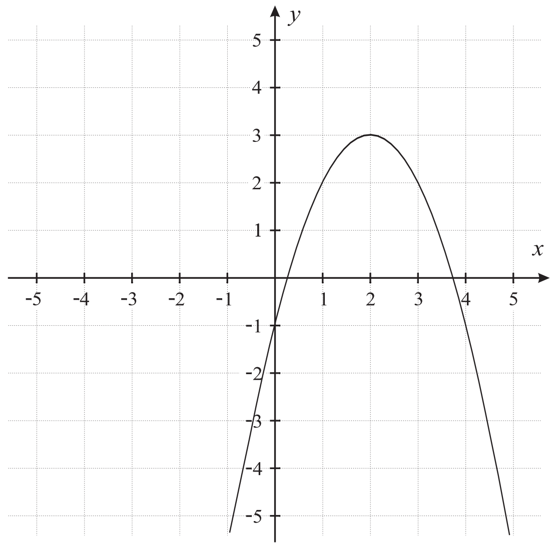
6) Ordnen Sie die vier Ansichten des Körpers, der aus gestapelten Würfeln besteht, den vier Ansichten unten zu. 1 P



....

7) Christoph behauptet, die abgebildete Normalparabel p und die Gerade g mit der Gleichung $g: \ y = x + 1$ haben 2 Schnittpunkte. Hat er Recht? Begründen Sie.

2 P



Tipps ab Seite 9, Lösungen ab Seite 17

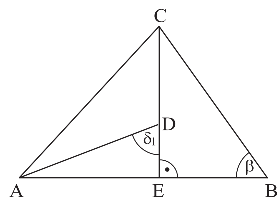
Realschulabschlussprüfung 2016, Teil A 2

Im Teil A 2 (20 P) sind alle sechs Aufgaben zu bearbeiten.
Zugelassene Hilfsmittel: Formelsammlung, wissenschaftlicher Taschenrechner (nicht programmierbar), Parabelschablone, Zeichengeräte

1) Gegeben ist das Dreieck ABC. **3 P**

Es gilt:

$$\overline{BC} = 9{,}0\,\text{cm}$$
$$\overline{AD} = 7{,}3\,\text{cm}$$
$$\beta = 55{,}0^\circ$$
$$\delta_1 = 69{,}4^\circ$$

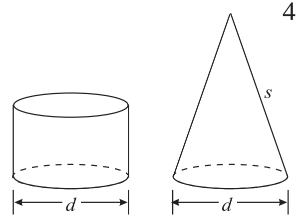


Berechnen Sie die Länge $\overline{CD}$ und den Flächeninhalt des Dreiecks ADC.

2) Ein Zylinder und ein Kegel haben gleich große Mantelflächen. Die Durchmesser der beiden Grundflächen sind ebenfalls gleich. **4 P**

Es gilt:

$$M_{Zyl} = M_{Ke} = 340\,\text{cm}^2$$
$$s = 18{,}0\,\text{cm}$$



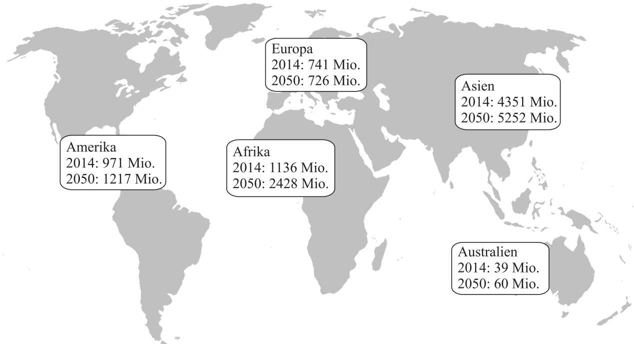
Berechnen Sie die Differenz der beiden Rauminhalte.

3) Die Parabel p hat die Gleichung $y = x^2 - 6x + 10{,}5$. **3 P**

Die Gerade g mit der Steigung $m = 2$ geht durch den Scheitelpunkt der Parabel p.

Berechnen Sie die Koordinaten des zweiten Schnittpunkts Q der Parabel p und der Geraden g.

4) In der abgebildeten Weltkarte sind die Bevölkerungszahlen der Kontinente für das Jahr 2014 und die voraussichtlichen Werte für das Jahr 2050 dargestellt. **3 P**



Um wie viel Prozent wird die Bevölkerungszahl von Europa im Zeitraum von 2014 bis 2050 voraussichtlich sinken?

In Afrika steigt die Bevölkerungszahl.
In den drei Jahren von 2014 bis 2017 nimmt sie jährlich durchschnittlich um 2,5 % zu.

Wie hoch ist die zu erwartende Bevölkerungszahl in Afrika im Jahr 2017?

Eine Zeitungsmeldung lautet:

„Im Jahr 2050 ist etwa jeder vierte Mensch ein Afrikaner“

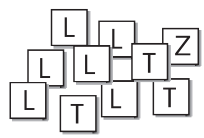
Stimmt diese Aussage? Begründen Sie Ihre Antwort.

5) Hannah legt Buchstabenkärtchen. 3 P

Auf dem Tisch liegen bereits folgende vier Buchstabenkärtchen.

S C H A ☐ ☐

In einem Beutel befinden sich die rechts abgebildeten zehn Buchstabenkärtchen.
Daraus zieht Hannah zwei Buchstabenkärtchen gleichzeitig.



Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit den beiden gezogenen Buchstaben

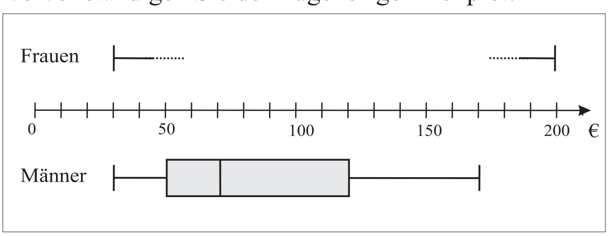
- das Wort S C H A L L legen zu können?
- das Wort S C H A T Z legen zu können?

6) Bei einer Umfrage wurden Frauen und Männer getrennt befragt. 4 P

«Wie viele Euro haben Sie für Ihr zuletzt gekauftes Paar Schuhe bezahlt?»
Preise der Frauenschuhe in Euro (gerundet):

30	30	50	60	70	70	80	90	90	100	120	140	140	150	160	180	200

Vervollständigen Sie den zugehörigen Boxplot.



Zum Boxplot der Preise der Männerschuhe gehört die unvollständig ausgefüllte Rangliste. Ergänzen Sie passende Werte.
Preise der Männerschuhe in Euro (gerundet):

Rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Preis		30			50	50					120	140	

Tipps ab Seite 11, Lösungen ab Seite 24

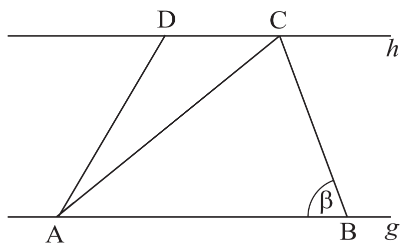
Realschulabschlussprüfung 2016, Teil B

Hinweis: Im Teil B (20 P) sind zwei der drei Aufgaben zu bearbeiten.
Zugelassene Hilfsmittel: Formelsammlung, wissenschaftlicher Taschenrechner (nicht programmierbar), Parabelschablone, Zeichengeräte

Aufgabe 1

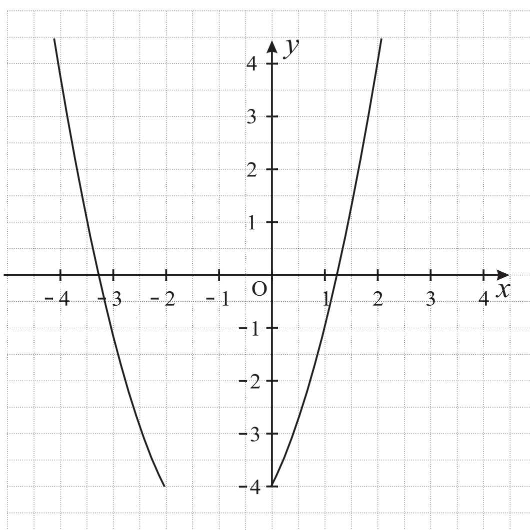
a) Die Eckpunkte des Vierecks ABCD liegen auf den Parallelen g und h. **5 P**
Die Parallelen haben einen Abstand von $9{,}0\,\text{cm}$.
Es gilt:

$$\overline{\text{AD}} = 10{,}4\,\text{cm}$$
$$\beta = 70{,}0^\circ$$
$$\overline{\text{AB}} = \overline{\text{AC}}$$



Berechnen Sie den Umfang des Vierecks ABCD.

b) Das Schaubild zeigt einen Ausschnitt der verschobenen Normalparabel p_1. **5 P**
Die Punkte $A(-3 \mid -1)$ und $B(1 \mid -1)$ liegen auf p_1.
Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel p_1.



Die nach unten geöffnete Normalparabel p_2 hat den Scheitelpunkt $S_2(0 \mid 8)$.
Durch die beiden Scheitelpunkte verläuft eine Gerade g.
Berechnen Sie die Gleichung der Geraden g.
Eine Gerade h verläuft parallel zu g und geht durch einen der beiden Schnittpunkte von p_1 und p_2.
Berechnen Sie eine mögliche Gleichung der Geraden h.

Aufgabe 2 *

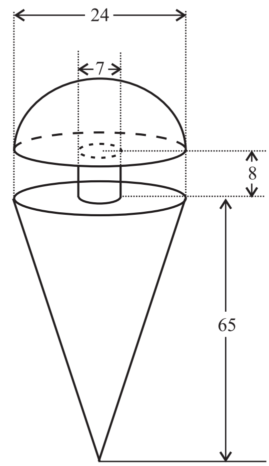
a) Der abgebildete Flaschenverschluss ist zusammengesetzt aus einem Kegel, einem Zylinder und einer Halbkugel (siehe Abbildung; Maße in mm.) 5 P

Der Flaschenverschluss ist aus Stahl hergestellt.

Berechne das Gewicht des Flaschenverschlusses, wenn $1\,\text{cm}^3$ Stahl $7{,}9\,\text{g}$ wiegt.

Wie tief steckt der Verschluss in einem Flaschenhals mit dem Innendurchmesser 18 mm?

Welchen Flächeninhalt hat der Teil des Kegelmantels, der sich dann innerhalb der Flasche befindet?



b) Eine Parabel p_1 hat die Gleichung $y = \frac{1}{4}x^2 + c$ und geht durch den Punkt $\mathrm{R}(4 \mid 0)$. 5 P

Eine nach unten geöffnete Normalparabel p_2 hat die Gleichung $y = -x^2 + 1$.

Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte P und Q von p_1 und p_2.

Die Scheitelpunkte S_1 und S_2 sowie die Schnittpunkte P und Q der beiden Parabeln bilden das Viereck $\mathrm{S}_1\mathrm{PS}_2\mathrm{Q}$.

Mia behauptet: «Das Viereck $\mathrm{S}_1\mathrm{PS}_2\mathrm{Q}$ hat zwei rechte Winkel.»

Hat Mia Recht?

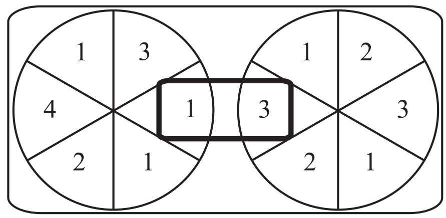
Begründen Sie Ihre Antwort durch Rechnung.

* Aufgabe an die neuen Prüfungsvorgaben angepasst

Aufgabe 3

a) Bei einer Wohltätigkeitsveranstaltung werden zwei Glücksräder eingesetzt. 5 P

Beide Glücksräder werden gedreht.
Wenn sie stehen bleiben, erkennt man im Sichtfenster eine zweistellige Zahl.
Die Abbildung zeigt die Zahl 13.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist im Sichtfenster eine Zahl mit zwei gleichen Ziffern zu sehen?



Die Glücksräder werden für ein Glücksspiel eingesetzt. Dazu wird nebenstehender Gewinnplan geprüft.
Berechnen Sie den Erwartungswert.

Gewinnplan	
Ergebnisse	**Gewinn**
zwei gleiche Ziffern	3,00 €
Zahl größer als 40	5,00 €
restliche Möglichkeiten	kein Gewinn
Einsatz 2,00 €	

Bei der Wohltätigkeitsveranstaltung soll ein höherer Erlös erzielt werden.
Dazu soll beim rechten Glücksrad eine der beiden Dreien durch eine Fünf ersetzt werden.
Der Gewinnplan bleibt gleich.
Wäre dies vorteilhaft?
Begründen Sie durch Rechnung oder Argumentation.

b) Dirk wirft im Basketballtraining auf den Korb (siehe Skizze). 5 P

Die annähernd parabelförmige Flugkurve des Balles lässt sich mit der Gleichung
$y = ax^2 + c$ beschreiben.
Geben Sie eine mögliche Gleichung der zugehörigen Parabel p an.
Trifft Dirk bei diesem Wurf direkt in den Korb, der in einer Höhe von $3,05\,\text{m}$ hängt?
Begründen Sie durch Rechnung.

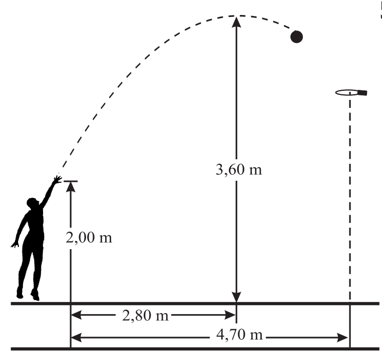


Bild: https://vecteezy.com

Vor Dirk steht der Abwehrspieler Dennis im Abstand von $0,60\,\text{m}$. Mit nach oben gestreckten Armen erreicht Dennis eine Höhe von $2,30\,\text{m}$.

Berührt er den Ball ohne hochzuspringen?
Begründen Sie durch Rechnung.

Tipps

Teil A1 2016

1) Multipliziere mit den Nennern, um die Gleichung zu lösen.
2) Überlege, wie viele Linien von einem Schritt zum anderen dazu kommen, wenn sich die Eckenzahl vergrößert. Erstelle eine Tabelle.
3) Das Volumen eines Quaders erhältst Du mit der Formel $V_{\text{Quader}} = a \cdot b \cdot c$. Das Volumen eines Würfels erhältst Du mit der Formel $V_{\text{Würfel}} = a^3$. Das Restvolumen im Quader erhältst Du, indem Du das Würfelvolumen vom Quadervolumen subtrahierst. Du erhältst die Höhe des Wassers im Quader, indem Du die Daten in die Volumenformel des Quaders einsetzt und die entstandene Gleichung nach c auflöst. Das Volumen einer Pyramide erhältst Du mit der Formel $V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$. Die Grundfläche der Pyramide erhältst Du mit der Formel $G = a^2$. Du erhältst die Höhe der quadratischen Pyramide, indem Du in die Volumenformel der Pyramide einsetzt und die entstandene Gleichung nach h auflöst.
4) Bezeichne mit R: Rote Kugel und mit S: Schwarze Kugel, und überlege, wie viele rote und schwarze Kugeln in einem Behälter sein könnten, wie oft gezogen wird und ob es sich um Ziehen mit oder ohne Zurücklegen handelt.
5) Beachte, welches die längste Seite ist und welcher Winkel dieser gegenüber liegt.
6) Versuche, dich in die jeweilige Position hineinzuversetzen. Überlege, welche Anordnung von Quadraten jeweils zu sehen ist.
7) Bestimme die Steigung m und den y-Achsenabschnitt c der Geraden g und zeichne sie in das Koordinatensystem ein. Bestimme die Koordinaten der Schnittpunkte.

Teil A 2 2016

1) Trage alle bekannten Maße und Winkel in eine Skizze ein. Im Dreieck EBC kannst Du die Seite $\overline{CE}$ mithilfe des Sinusverhältnisses bestimmen. Im Dreieck AED kannst Du die Seiten $\overline{DE}$ und $\overline{AE}$ mithilfe des Kosinus- und Sinusverhältnisses bestimmen. Damit erhältst Du $\overline{CD} = \overline{CE} - \overline{DE}$. Den Flächeninhalt des Dreiecks ADC erhältst Du mit der Formel $A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$. Wähle als Grundseite $g = \overline{CD}$ und als zugehörige Höhe $h = \overline{AE}$. Alternativ erhältst Du den Flächeninhalt des Deiecks ADC, indem Du den Flächeninhalt des Dreiecks AED vom Flächeninhalt des Dreiecks AEC subtrahierst. Den Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks bestimmst Du mit der Formel $A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$, wobei die Seiten a und b den rechten Winkel bilden.
2) Zuerst berechnest Du mithilfe der gegebenen Mantelfläche M_{Ke} des Kegels den Radius r des Kegels (und damit auch des Zylinders) mit der Formel $M_{\text{Ke}} = \pi \cdot r \cdot s$. Mithilfe des

Satzes des Pythagoras kannst Du nun die Höhe h_{Ke} des Kegels bestimmen. Skizziere dazu das zugehörige rechtwinklige Dreieck. Das Volumen des Kegels erhältst Du mit der Formel $\text{V}_{\text{Ke}} = \frac{1}{3} \cdot \text{G}_{\text{Ke}} \cdot h_{\text{Ke}}$. Mithilfe der gegebenen Mantelfläche des Zylinders kannst Du die Höhe h_{Zyl} des Zylinders mithilfe der Formel $\text{M}_{\text{Zyl}} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h_{\text{Zyl}}$ berechnen. Das Volumen des Zylinders erhältst Du mit der Formel $\text{V}_{\text{Zyl}} = \text{G}_{\text{Zyl}} \cdot h_{\text{Zyl}}$. Subtrahiere das Kegelvolumen vom Zylindervolumen.

3) Bestimme zuerst die Koordinaten des Scheitelpunkts von p durch quadratische Ergänzung. Bestimme die Gleichung der Geraden g mit der gegebenen Steigung mithilfe der Hauptform $y = mx + c$. Setze dazu m und die Koordinaten des Scheitels von p in diese ein. Die Koordinaten des zweiten Schnittpunkts Q von p und g erhältst Du durch Gleichsetzen der Gleichungen von p und g. Löse die entstandene quadratische Gleichung mithilfe der bc-Formel. Überlege, zu welchem x-Wert der Scheitelpunkt gehört. Den y-Wert des zweiten Schnittpunkts Q erhältst Du, indem Du den anderen x-Wert in die Gleichung von g einsetzt.

4) Bestimme die Abnahme der Bevölkerungszahl von Europa im Zeitraum von 2014 bis 2050. Um die prozentuale Abnahme zu bestimmen, teilst Du die Abnahme der Bevölkerung durch die Bevölkerungszahl in Europa im Jahr 2014. Alternativ kannst Du auch die Prozentformel $\text{P} = \text{G} \cdot \frac{p}{100}$ oder den Dreisatz verwenden. Um die zu erwartende Bevölkerungszahl in Afrika im Jahr 2017 zu erhalten, bestimmst Du für jedes Folgejahr ab 2014 die Bevölkerungszahl, indem Du jeweils $102{,}5\,\%$ der vorherigen Bevölkerungszahl berechnest. Alternativ kannst Du die voraussichtliche Bevölkerungszahl in Afrika auch mithilfe der Wachstumsformel $\text{G}_n = \text{G}_0 \cdot q^n$ mit $q = 1 + \frac{p}{100}$ direkt berechnen. Um die voraussichtliche Gesamtbevölkerung G im Jahr 2050 zu erhalten, addierst Du die voraussichtlichen Bevölkerungszahlen aller Kontinente im Jahr 2050. Den Anteil der Afrikaner an der Gesamtbevölkerung im Jahr 2050 erhältst Du, indem Du die Bevölkerungszahl in Afrika durch die Gesamtbevölkerung G teilst. Forme das Ergebnis in einen Bruch um, um die Aussage der Zeitungsmeldung zu beurteilen.

5) Beachte, dass es sich beim gleichzeitigen Ziehen um Ziehen ohne Zurücklegen handelt, so dass sich die Wahrscheinlichkeiten bei jedem Zug ändern. Bestimme die Anzahl der Kärtchen im Beutel und die Anzahlen der einzelnen Buchstaben. Skizziere damit ein Baumdiagramm. Die Wahrscheinlichkeit, mit den beiden gezogenen Buchstaben das Wort SCHALL legen zu können, erhältst Du mithilfe der 1. Pfadregel (Produktregel). Die Wahrscheinlichkeit, mit den beiden gezogenen Buchstaben das Wort SCHATZ legen zu können, erhältst Du mithilfe der 1. und 2. Pfadregel (Produkt- und Summenregel).

6) Zuerst bestimmst Du anhand der gegebenen Tabelle mit 17 Rangwerten die entsprechenden Kennwerte, um den Boxplot für die Preise der Frauenschuhe zu vervollständigen. Bestimme die Kennwerte des dargestellten Boxplots für die Preise der Männerschuhe. Die Werte von x_{min} und x_{max} kannst Du direkt in die Tabelle bei Rang 1 bzw. Rang 13 eintragen. Da es in der Rangliste 13 Werte gibt, kannst Du den Zentralwert z bei Rang 7

eintragen. Berechne, an welcher Stelle sich das untere Quartil befindet, und trage den zugehörigen Wert in die Tabelle ein. Für den Rang unterhalb des unteren Quartils kannst du einen Zwischenwert wählen. Berechne, an welcher Stelle sich das obere Quartil befindet, und trage den zugehörigen Wert in die Tabelle ein. Für die beiden Ränge unterhalb des oberen Quartils kannst du Zwischenwerte wählen.

Teil B 2016

Aufgabe 1

a) Um den Umfang des Vierecks ABCD zu berechnen, benötigst Du noch die Seiten $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{BC}}$ und $\overline{\mathrm{CD}}$. Trage die bekannten Maße und Winkel sowie zwei Hilfslinien in eine Skizze (siehe Lösung) ein. Im Dreieck BCF kannst Du die Seiten $\overline{\mathrm{BF}}$ und $\overline{\mathrm{BC}}$ mithilfe des Tangens- bzw. Sinusverhältnisses bestimmen. Beachte, dass das Dreieck ABC wegen $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{AC}}$ gleichschenklig ist, so dass gilt: $\gamma = \beta$. Mithilfe der Winkelsumme im Dreieck ergibt sich $\alpha_1$bei Punkt A. Im Dreieck AFC kannst Du die Seite $\overline{\mathrm{AF}}$ mithilfe des Tangensverhältnisses berechnen. Im Dreieck AGD kannst Du die Seite $\overline{\mathrm{AG}}$ mithilfe des Satzes des Pythagoras berechnen. Damit erhältst Du die Seiten $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{AF}} + \overline{\mathrm{BF}}$ und $\overline{\mathrm{GF}} = \overline{\mathrm{AF}} - \overline{\mathrm{AG}}$. Beachte, dass $\overline{\mathrm{CD}} = \overline{\mathrm{GF}}$ ist und berechne damit den Umfang U des Vierecks ABCD.

b) Als Ansatz für die Gleichung einer nach oben geöffneten Normalparabel p_1 verwendest Du die Normalform $y = x^2 + bx + c$. Setze die Koordinaten der gegebenen Punkte A und B in diese Gleichung ein und löse das entstandene Gleichungssystem, indem Du die eine Gleichung von der anderen subtrahierst. Damit erhältst Du die Gleichung von p_1. Den Scheitel von p_1 erhältst Du durch quadratische Ergänzung. Bestimme die Gleichung der nach unten geöffneten Normalparabel p_2 mit dem Scheitelpunkt S_2 mithilfe der Scheitelpunktsformel: $y = -(x-d)^2 + e$. Die Gleichung der Geraden g, welche durch die beiden Scheitelpunkte S_1 und S_2 verläuft, erhältst Du mit der Hauptform $y = mx + c$. Die Steigung m von g erhältst Du mit der Steigungsformel $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Setze die erhaltene Steigung m und die Koordinaten von S_2 in die Hauptform ein, um die Gleichung von g zu erhalten. Die Koordinaten der Schnittpunkte Q_1 und Q_2 von p_1 und p_2 erhältst Du, indem Du die Gleichungen von p_1 und p_2 gleichsetzt. Löse die entstandene quadratische Gleichung mit der *bc*-Formel. Die zugehörigen y-Werte erhältst Du, indem Du die erhaltenen x-Werte in die Gleichung von p_2 einsetzt. Beachte, dass die Gerade h parallel zu g verläuft und damit dieselbe Steigung wie g hat. Setze die Steigung m und die Koordinaten von Q_1 oder Q_2 in die Hauptform $y = mx + c$ ein. Beachte, dass es zwei mögliche Lösungen gibt.

Aufgabe 2

a) Bestimme zuerst das Volumen des Flaschenverschlusses, indem du die Volumina der einzelnen Teilkörper mithilfe folgender Formeln berechnest: $V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2_{\text{Kegel}} \cdot h_{\text{Kegel}}$, $V_{\text{Zylinder}} = \pi \cdot r^2_{\text{Zylinder}} \cdot h_{\text{Zylinder}}$ und $V_{\text{Halbkugel}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3_{\text{Kugel}}$.
Beachte, dass $1000\,\text{mm}^3 = 1\,\text{cm}^3$ und bestimme damit das Volumen in cm^3, indem Du das Volumen in mm^3 durch 1000 teilst. Multipliziere das Gesamtvolumen in cm^3 mit 7,9 g. Skizziere die Problemstellung (siehe Lösung). Berechne mithilfe des Tangensverhältnisses die Winkel α und β im großen rechtwinkligen Dreieck. Berechne mithilfe des Tangensverhältnisses die Höhe h des Teilkegels. Die Mantelfläche M erhältst Du mithilfe der Formel $M = \pi \cdot r \cdot s$. Die Länge der Mantellinie s erhältst du mithilfe des Satzes des Pythagoras: $s^2 = r^2 + h^2$.

b) Die Gleichung der Parabel p_1 erhältst Du, indem Du die Koordinaten des Punktes R in die Gleichung $y = \frac{1}{4}x^2 + c$ einsetzt. Die Koordinaten der Schnittpunkte P und Q von p_1 und p_2 erhältst Du durch Gleichsetzen der Gleichungen von p_1 und p_2. Löse die entstandene Gleichung durch Wurzelziehen. Die zugehörigen y-Werte erhältst Du, indem Du die erhaltenen x-Werte in die Gleichung von p_2 einsetzt. Die Scheitel S_1 und S_2 von p_1 bzw. p_2 erhältst Du jeweils durch Umformen in die Scheitelform. Zeichne das Viereck S_1PS_2Q und einen Hilfspunkt T in Höhe von P und Q. Um zu prüfen, ob das Viereck S_1PS_2Q bei P einen rechten Winkel hat, berechnest Du zuerst die Längen der Seiten $\overline{S_1S_2}$, $\overline{PS_1}$ und $\overline{PS_2}$ und verwendest anschließend den Satz des Pythagoras. Beachte, dass das Viereck S_1PS_2Q achsensymmetrisch ist. Alternativ kannst Du auch die Steigungen m_1 zwischen P und S_1 bzw. m_2 zwischen P und S_2 mithilfe der Steigungsformel $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ berechnen. Falls m_1 der negative Kehrwert von m_2 ist, hat das Viereck S_1PS_2Q bei P einen rechten Winkel.

Aufgabe 3

a) Bestimme zuerst die Wahrscheinlichkeiten für die beiden Glücksräder, beim Drehen eine 1, 2, 3 oder 4 zu erhalten. Erstelle damit ein Baumdiagramm. Die Wahrscheinlichkeit, im Sichtfenster eine Zahl mit zwei gleichen Ziffern zu sehen, erhältst Du mithilfe der Pfadregeln (Produkt- und Summenregel). Die Wahrscheinlichkeit, im Sichtfenster eine Zahl größer als 40 zu sehen, erhältst Du ebenfalls mithilfe der Pfadregeln (Produkt- und Summenregel). Den Erwartungswert E_1 für den Gewinn eines Spielers erhältst Du, indem Du die Gewinne für das jeweilige Ergebnis mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten multiplizierst und den Einsatz subtrahierst. Beachte, dass sich die Wahrscheinlichkeiten beim Drehen des rechten Glücksrads ändern, wenn auf dem rechten Glücksrad eine Drei durch eine Fünf ersetzt wird. Bestimme die geänderten Wahrscheinlichkeiten und zeichne ein neues Baumdiagramm. Bestimme die Wahrscheinlichkeiten, dass zwei gleiche Ziffern oder eine Zahl größer als 40 zu sehen ist, mithilfe der Pfadregeln (Produkt- und Summenregel). Berechne damit den neuen Erwartungswert E_2 für den Gewinn eines Spielers. Überlege, bei welcher Variante bei der Wohltätigkeitsveranstaltung ein höherer Erlös erzielt wird.

b) Lege das Koordinatensystem am geschicktesten so fest, dass die x-Achse auf dem Boden liegt und die y-Achse durch den Scheitelpunkt S geht. Bestimme die Koordinaten des Scheitels S der Parabel p und die Koordinaten des Abwurfpunkts A. Setze die Koordinaten von S in den Ansatz $y = ax^2 + c$ ein. Anschließend setzt Du die Koordinaten von A in den Ansatz ein, um die Gleichung von p zu erhalten. Bestimme die Koordinaten des Korbs K, der in einer Höhe von $3{,}05\,\text{m}$ und in x-Richtung $4{,}70\,\text{m}$ vom Abwurfpunkt entfernt ist. Um zu prüfen, ob Dirk bei diesem Wurf direkt in den Korb trifft, setzt Du die Koordinaten von K in die Gleichung von p ein. Bei einer wahren Aussage liegt K auf der Parabel p. Bestimme die Koordinaten des Punktes D, in welchem die ausgestreckten Arme von Dennis enden. Um zu prüfen, ob Dennis den Ball ohne hochzuspringen berührt, berechnest Du die Flughöhe des Balls an Dennis' Stelle, indem Du den entsprechenden x-Wert in die Gleichung von p einsetzt.

Lösungen Teil A1 2016

Teil A 1

1) Die gegebene Bruchgleichung wird durch Multiplikation mit den Nennern gelöst:

$$\begin{aligned}\frac{4}{2x+3} &= \frac{2}{9}\\ 4\cdot 9 &= 2\cdot(2x+3)\\ 36 &= 4x+6\\ 30 &= 4x\\ \frac{30}{4} &= x\\ \frac{15}{2} &= x\end{aligned}$$

2) Jede neu hinzukommende Ecke wird mit allen vorhandenen Ecken verbunden, also kommen beim Schritt vom 3-Eck zum 4-Eck 3 Linien hinzu, beim Schritt vom 4-Eck zum 5-Eck sind es 4 Linien usw... Damit ergibt sich:

Anzahl der Ecken	3	4	5	6	7	8	9	10
Anzahl der Verbindungslinien	3	6	10	15	21	28	36	45

Das 10-Eck hat also 45 Verbindungslinien.

3) Das Volumen eines Quaders erhält man mit der Formel $\mathrm{V}_{\mathrm{Quader}} = a\cdot b\cdot c$.
Damit gilt für einen Quader der Breite $3{,}0\,\mathrm{cm}$, der Tiefe $4{,}0\,\mathrm{cm}$ sowie der Höhe $5{,}0\,\mathrm{cm}$:

$$\mathrm{V}_{\mathrm{Quader}} = 3\cdot 4\cdot 5 = 60\,\mathrm{cm}^3$$

Das Volumen eines Würfels erhält man mit der Formel $\mathrm{V}_{\mathrm{Würfel}} = a^3$.
Damit gilt für einen Würfel mit Kantenlänge $3{,}0\,\mathrm{cm}$:

$$\mathrm{V}_{\mathrm{Würfel}} = 3^3 = 27\,\mathrm{cm}^3$$

Das Restvolumen im Quader erhält man, indem man das Würfelvolumen vom Quadervolumen subtrahiert:

$$\mathrm{V}_{\mathrm{Rest}} = \mathrm{V}_{\mathrm{Quader}} - \mathrm{V}_{\mathrm{Würfel}} = 60\,\mathrm{cm}^3 - 27\,\mathrm{cm}^3 = 33\,\mathrm{cm}^3$$

Man erhält die Höhe des Wassers im Quader, indem man die Daten in die Volumenformel des Quaders einsetzt und die entstandene Gleichung nach c auflöst:

$$\begin{aligned}\mathrm{V} &= a\cdot b\cdot c\\ 33 &= 3\cdot 4\cdot c\end{aligned}$$

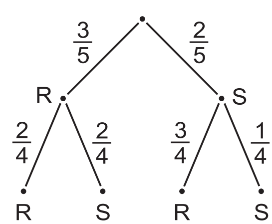
$$33 = 12 \cdot c$$
$$\frac{33}{12} = c$$
$$\frac{11}{4} = c$$
$$c = 2{,}75$$

Das Wasser steht anschließend $2{,}75\,\text{cm}$ hoch im Quader.
Das Volumen einer Pyramide erhält man mit der Formel $\text{V}_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot \text{G} \cdot h$.
Die Grundfläche der Pyramide erhält man mit der Formel $\text{G} = a^2$, also $\text{G} = 3^2 = 9\,\text{cm}^2$.
Man erhält die Höhe der quadratischen Pyramide mit der Grundkante $3{,}0\,\text{cm}$, indem man die gegebenen Daten in die Volumenformel der Pyramide einsetzt und die entstandene Gleichung nach h auflöst:

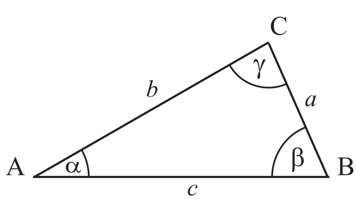
$$\text{V}_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot \text{G} \cdot h$$
$$33 = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot h$$
$$33 = 3 \cdot h$$
$$11 = h$$

Somit hat die Pyramide eine Höhe von $11{,}0\,\text{cm}$.

4) Bezeichnet man mit R: Rote Kugel und mit S: Schwarze Kugel, so gehört das abgebildete Baumdiagramm zu folgender Situation: In einem Behälter sind fünf Kugeln, drei rote und zwei schwarze Kugeln. Es wird zwei Mal ohne Zurücklegen gezogen, da sich die Wahrscheinlichkeiten beim zweiten Zug ändern.

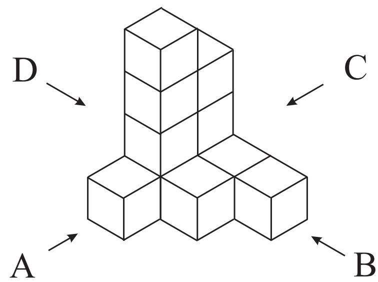


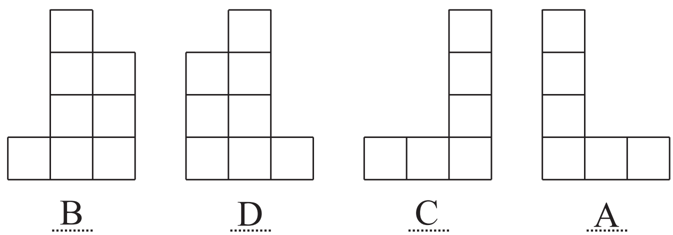
5) Da c die längste Seite ist und der Umfang des Dreiecks $10\,\text{cm}$ beträgt, muss die Länge der Seite a zwangsläufig kleiner als $5\,\text{cm}$ sein, da sonst a die längste Seite wäre.
Da der längsten Seite c der größte Winkel γ gegenüberliegt, muss gelten: $\gamma > \alpha$.
Die richtigen Antworten sind also:



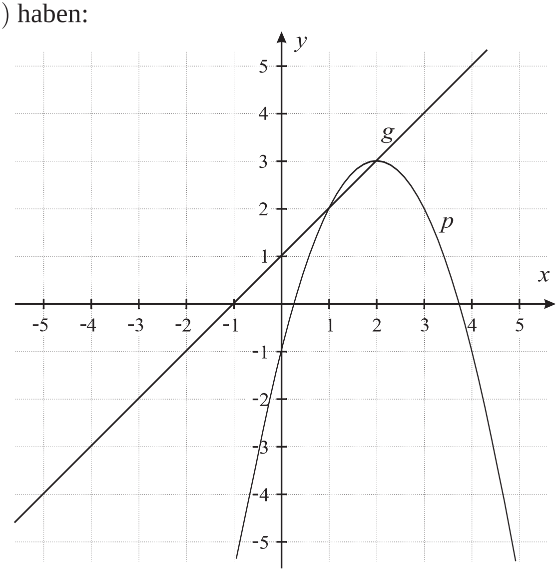
☐ $a = 5\,\text{cm}$	☐ $\gamma < \alpha$
☐ $a = 10\,\text{cm}$	☒ $\gamma > \alpha$
☐ $a > 5\,\text{cm}$	☐ $\gamma = \alpha$
☒ $a < 5\,\text{cm}$	☐ $\gamma = \beta$

6) Wenn man von der jeweiligen Position schaut, sieht man nur die Flächen, die in diese Richtung zeigen, als Quadrate:





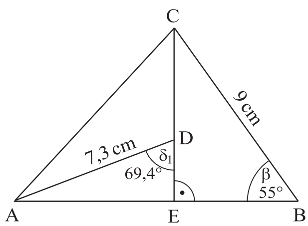
7) Die Gerade g mit der Gleichung $g\colon\ y = x + 1$ hat die Steigung $m = 1$ und den y-Achsenabschnitt $c = 1$.
Zeichnet man die Gerade g in das Koordinatensystem ein, kann man erkennen, dass die abgebildete Normalparabel p und die Gerade g zwei Schnittpunkte mit den Koordinaten $(1 \mid 2)$ und $(2 \mid 3)$ haben:



Somit hat Christoph Recht.

Teil A2 2016

1) Die bekannten Maße und Winkel werden in eine Skizze eingetragen:



Im Dreieck EBC kann man die Seite $\overline{CE}$ bestimmen:

$$\begin{aligned} \sin(\beta) &= \frac{\overline{CE}}{\overline{BC}} \\ \sin(\beta)\cdot\overline{BC} &= \overline{CE} \\ \sin(55^\circ)\cdot 9{,}0 &= \overline{CE} \\ \overline{CE} &\approx 7{,}37\,\text{cm} \end{aligned}$$

Im Dreieck AED kann man die Seiten $\overline{DE}$ und $\overline{AE}$ bestimmen:

$$\begin{aligned} \cos(\delta_1) &= \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}} \\ \cos(\delta_1)\cdot\overline{AD} &= \overline{DE} \\ \cos(69{,}4^\circ)\cdot 7{,}3 &= \overline{DE} \\ \overline{DE} &\approx 2{,}57\,\text{cm} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \sin(\delta_1) &= \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} \\ \sin(\delta_1)\cdot\overline{AD} &= \overline{AE} \\ \sin(69{,}4^\circ)\cdot 7{,}3 &= \overline{AE} \\ \overline{AE} &\approx 6{,}83\,\text{cm} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\overline{CD} = \overline{CE} - \overline{DE} = 7{,}37 - 2{,}57 = 4{,}80\,\text{cm}$$

Somit beträgt die Länge $\overline{CD}$ etwa $4{,}8\,\text{cm}$.

Den Flächeninhalt des Deiecks ADC erhält man mit der Formel $A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2}\cdot g\cdot h$. Wählt man als Grundseite $g = \overline{CD}$ und als zugehörige Höhe $h = \overline{AE}$, erhält man:

$$A_{\text{ADC}} = \frac{1}{2}\cdot\overline{CD}\cdot\overline{AE} = \frac{1}{2}\cdot 4{,}80\cdot 6{,}83 \approx 16{,}39\,\text{cm}^2$$

Alternativ erhält man den Flächeninhalt des Dreiecks ADC, indem man den Flächeninhalt des Dreiecks AED vom Flächeninhalt des Dreiecks AEC subtrahiert. Den Flächeninhalt

eines rechtwinkligen Dreiecks bestimmt man mit der Formel $A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$, wobei die Seiten a und b den rechten Winkel bilden.
Damit erhält man:

$$A_{AEC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AE} \cdot \overline{CE} = \frac{1}{2} \cdot 6{,}83 \cdot 7{,}37 \approx 25{,}17\,\text{cm}^2$$

und

$$A_{AED} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AE} \cdot \overline{DE} = \frac{1}{2} \cdot 6{,}83 \cdot 2{,}57 \approx 8{,}78\,\text{cm}^2$$

Daraus ergibt sich:

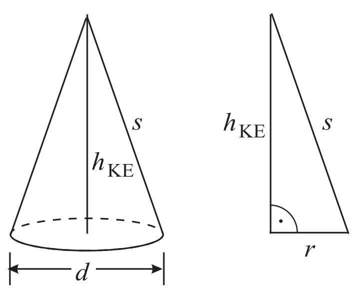
$$A_{ADC} = A_{AEC} - A_{AED} = 25{,}17 - 8{,}78 = 16{,}39\,\text{cm}^2$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks ADC beträgt etwa $16{,}4\,\text{cm}^2$.

2) Zuerst berechnet man mithilfe der gegebenen Mantelfläche M_{Ke} des Kegels den Radius r des Kegels (und damit auch des Zylinders):

$$\begin{aligned} M_{Ke} &= \pi \cdot r \cdot s \\ \frac{M_{Ke}}{\pi \cdot s} &= r \\ \frac{340}{\pi \cdot 18} &= r \\ r &\approx 6{,}01\,\text{cm} \end{aligned}$$

Mithilfe des Satzes des Pythagoras kann man nun die Höhe h_{Ke} des Kegels bestimmen:



$$\begin{aligned} h_{Ke}^2 + r^2 &= s^2 \\ h_{Ke}^2 &= s^2 - r^2 \\ h_{Ke} &= \sqrt{s^2 - r^2} \\ h_{Ke} &= \sqrt{18^2 - 6{,}01^2} \\ h_{Ke} &\approx 16{,}97\,\text{cm} \end{aligned}$$

Das Volumen des Kegels erhält man mit der Formel $V_{Ke} = \frac{1}{3} \cdot G_{Ke} \cdot h_{Ke}$:

$$V_{Ke} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h_{Ke} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6{,}01^2 \cdot 16{,}97 \approx 641{,}89\,\text{cm}^3$$

Mithilfe der gegebenen Mantelfläche des Zylinders kann man die Höhe h_{Zyl} des Zylinders berechnen:

$$\begin{aligned} \mathrm{M}_{\text{Zyl}} &= 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h_{\text{Zyl}} \\ \frac{\mathrm{M}_{\text{Zyl}}}{2 \cdot \pi \cdot r} &= h_{\text{Zyl}} \\ \frac{340}{2 \cdot \pi \cdot 6{,}01} &= h_{\text{Zyl}} \\ h_{\text{Zyl}} &\approx 9{,}00\,\text{cm} \end{aligned}$$

Das Volumen des Zylinders erhält man mit der Formel $\mathrm{V}_{\text{Zyl}} = \mathrm{G}_{\text{Zyl}} \cdot h_{\text{Zyl}}$:

$$\mathrm{V}_{\text{Zyl}} = \pi \cdot r^2 \cdot h_{\text{Zyl}} = \pi \cdot 6{,}01^2 \cdot 9{,}00 \approx 1021{,}27\,\text{cm}^3$$

Damit ergibt sich die Differenz der beiden Rauminhalte:

$$\mathrm{V} = \mathrm{V}_{\text{Zyl}} - \mathrm{V}_{\text{Ke}} = 1021{,}27 - 641{,}89 = 379{,}38\,\text{cm}^3$$

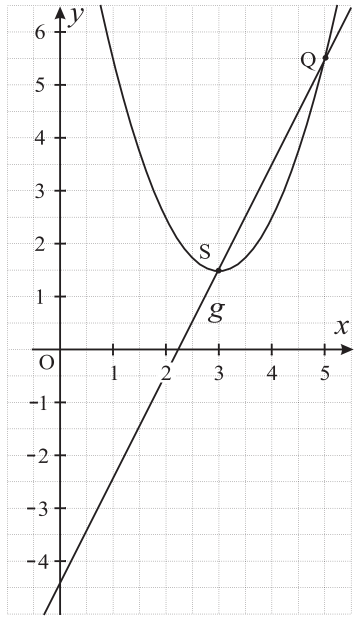
Somit beträgt die Differenz der beiden Rauminhalte etwa $379{,}4\,\text{cm}^3$.

3) Die Parabel p hat die Gleichung $y = x^2 - 6x + 10{,}5$.
Die Koordinaten des Scheitelpunkts von p kann man durch quadratische Ergänzung ermitteln:

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 6x + 10{,}5 \\ y &= x^2 - 6x + 9 - 9 + 10{,}5 \\ y &= (x-3)^2 + 1{,}5 \end{aligned}$$

Also hat der Scheitel von p die Koordinaten $\mathrm{S}(3 \mid 1{,}5)$. Zum besseren Überblick ist es sinnvoll, eine Skizze der Parabel und der Geraden anzufertigen. Die Gleichung der Geraden g mit der Steigung $m = 2$, die durch den Scheitelpunkt der Parabel p geht, erhält man mit der Hauptform $y = mx + c$. Setzt man $m = 2$ und die Koordinaten von $\mathrm{S}(3 \mid 1{,}5)$ in diese ein, ergibt sich:

$$\begin{aligned} y &= mx + c \\ 1{,}5 &= 2 \cdot 3 + c \\ -4{,}5 &= c \end{aligned}$$



Damit hat die Gerade g die Gleichung $y = 2x - 4,5$.

Die Koordinaten des zweiten Schnittpunkts Q der Parabel p und der Geraden g erhält man, indem man die Gleichungen von p und g gleichsetzt:

$$x^2 - 6x + 10,5 = 2x - 4,5$$
$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

Mithilfe der bc-Formel ($b = -8$ und $c = 15$) erhält man:

$$x_{1,2} = -\frac{-8}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-8}{2}\right)^2 - 15}$$

Daraus ergeben sich die Lösungen $x_1 = 3$ und $x_2 = 5$.
Zu $x_1 = 3$ gehört der gegebene Scheitelpunkt $\mathrm{S}(3 \mid 1,5)$.
Den y-Wert des zweiten Schnittpunkts Q erhält man, indem man $x_2 = 5$ in die Gleichung von g einsetzt:

$$y = 2 \cdot 5 - 4,5 = 5,5$$

Damit hat der Punkt Q die Koordinaten $\mathrm{Q}(5 \mid 5,5)$.

4) Die Bevölkerungszahl von Europa wird im Zeitraum von 2014 bis 2050 voraussichtlich von 741 Mio. auf 726 Mio. sinken, also um $741 - 726 = 15$ Mio abnehmen. Um die prozentuale Abnahme zu bestimmen, teilt man die Abnahme der Bevölkerung durch die Bevölkerungszahl im Jahr 2014:

$$\frac{15}{741} \approx 0,02 = 2\%$$

Alternativ kann man auch die Prozentformel verwenden:

$$\begin{aligned} \mathrm{P} &= \mathrm{G} \cdot \frac{p}{100} \\ \frac{\mathrm{P} \cdot 100}{\mathrm{G}} &= p \\ \frac{15 \cdot 100}{741} &= p \\ 2{,}02 &\approx p \end{aligned}$$

Ebenso kann man den Dreisatz verwenden:

$$\begin{aligned} 741 &\mathrel{\widehat{=}} 100\% \\ 1 &\mathrel{\widehat{=}} \frac{100\%}{741} \\ 15 &\mathrel{\widehat{=}} \frac{100\%}{741} \cdot 15 \approx 2{,}02\% \end{aligned}$$

Somit wird die Bevölkerungszahl in Europa um etwa 2 % sinken.

In Afrika beträgt im Jahr 2014 die Bevölkerungszahl 1 136 Mio.
Um die zu erwartende Bevölkerungszahl in Afrika im Jahr 2017 zu erhalten, bestimmt man für jedes Folgejahr ab 2014 die Bevölkerungszahl, indem man jeweils 102,5 % der vorherigen Bevölkerungszahl berechnet:

Jahr	Bevölkerungszahl in Mio.
2014	1 136
2015	$1{,}025 \cdot 1\,136 \approx 1\,164$
2016	$1{,}025 \cdot 1\,164 \approx 1\,193$
2017	$1{,}025 \cdot 1\,193 \approx 1223$

Alternativ kann man die voraussichtliche Bevölkerungszahl in Afrika auch mithilfe der Wachstumsformel direkt berechnen:

$$\mathrm{G}_3 = 1\,136\,\text{Mio.} \cdot \left(1 + \frac{2{,}5}{100}\right)^3 = 1\,136\,\text{Mio.} \cdot 1{,}025^3 \approx 1\,223\,\text{Mio.}$$

Somit beträgt die voraussichtliche Bevölkerungszahl in Afrika etwa 1 223 Mio.

Addiert man die voraussichtlichen Bevölkerungszahlen aller Kontinente im Jahr 2050, so erhält man die voraussichtliche Gesamtbevölkerung G im Jahr 2050:

$$\mathrm{G} = 726 + 5\,252 + 1\,217 + 2\,428 + 60 = 9\,683\,\text{Mio.}$$

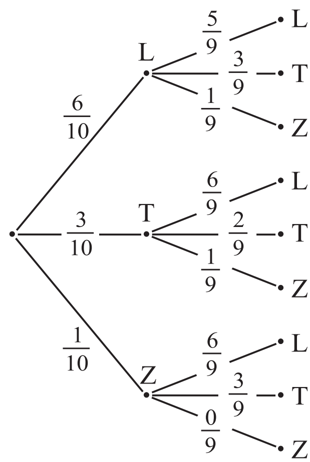
Den Anteil der Afrikaner an der Gesamtbevölkerung im Jahr 2050 erhält man, indem man die Bevölkerungszahl in Afrika durch die Gesamtbevölkerung teilt:

$$\frac{2\,428}{9\,683} \approx 0{,}25 = \frac{1}{4}$$

Somit ist im Jahr 2050 voraussichtlich jeder vierte Mensch ein Afrikaner.
Die Aussage der Zeitungsmeldung stimmt.

5) Da Hannah zwei Kärtchen gleichzeitig zieht, handelt es sich um Ziehen ohne Zurücklegen.

Damit ändern sich die Wahrscheinlichkeiten bei jedem Zug. Im Beutel befinden sich insgesamt 10 Buchstabenkärtchen, sechs Kärtchen mit dem Buchstaben L, drei Kärtchen mit dem Buchstaben T und ein Kärtchen mit dem Buchstaben Z.
Damit kann man ein Baumdiagramm zeichnen.
Die Wahrscheinlichkeit, mit den beiden gezogenen Buchstaben das Wort SCHALL legen zu können, erhält man mithilfe der 1. Pfadregel (Produktregel):



$$P(\text{SCHALL}) = P(\text{LL}) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{1}{3}$$

Die Wahrscheinlichkeit, SCHALL zu legen, beträgt $\frac{1}{3}$.
Die Wahrscheinlichkeit, mit den beiden gezogenen Buchstaben das Wort SCHATZ legen zu können, erhält man mithilfe der 1. und 2. Pfadregel (Produkt- und Summenregel):

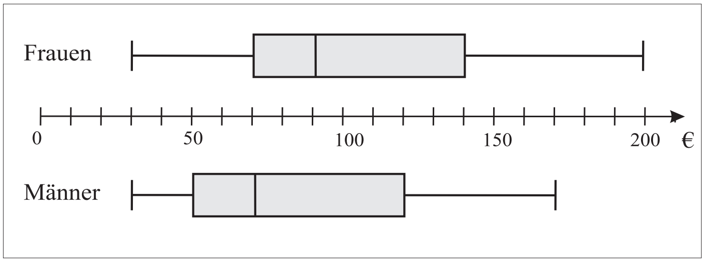
$$P(\text{SCHATZ}) = P(\text{TZ}) + P(\text{ZT}) = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{1}{15}$$

Die Wahrscheinlichkeit, SCHATZ zu legen, beträgt $\frac{1}{15}$.

6) Anhand der gegebenen Tabelle mit 17 Rangwerten kann man folgende Kennwerte ablesen bzw. bestimmen:

$$x_{\text{min}} = 30\,€$$
$$q_u : \text{n} \cdot 0{,}25 = 17 \cdot 0{,}25 = 4{,}25 \;\Rightarrow\; q_u = x_5 = 70\,€$$
$$z : \text{n} \cdot 0{,}5 = 17 \cdot 0{,}5 = 8{,}5 \;\Rightarrow\; z = x_9 = 90\,€$$
$$q_o : \text{n} \cdot 0{,}75 = 17 \cdot 0{,}75 = 12{,}75 \;\Rightarrow\; q_o = x_{13} = 140\,€$$
$$x_{\text{max}} = 200\,€$$

Damit kann man den Boxplot für die Preise der Frauenschuhe vervollständigen:



Am Boxplot der Preise der Männerschuhe kann man ablesen:

$$x_{\min} = 30\,€$$
$$q_u = 50\,€$$
$$z = 70\,€$$
$$q_o = 120\,€$$
$$x_{\max} = 170\,€$$

Die Werte von $x_{\min} = 30\,€$ und $x_{\max} = 170\,€$ kann man in der Tabelle bei Rang 1 bzw. Rang 13 eintragen.
Da es in der Rangliste 13 Werte gibt, kann man den Zentralwert $z = 70\,€$ bei Rang 7 eintragen.
Für das untere Quartil gilt:

$$\mathrm{n} \cdot 0,25 = 13 \cdot 0,25 = 3,25 \;\Rightarrow\; q_u = x_4$$

Damit muss in der Rangliste bei Rang 4 auf jeden Fall $q_u = 50\,€$ eingetragen werden.
Bei Rang 3 muss ein Zwischenwert stehen, der mindestens 30 und höchstens 50 ist, also z.B. 40.
Für das obere Quartil gilt:

$$\mathrm{n} \cdot 0,75 = 13 \cdot 0,75 = 9,75 \;\Rightarrow\; q_o = x_{10}$$

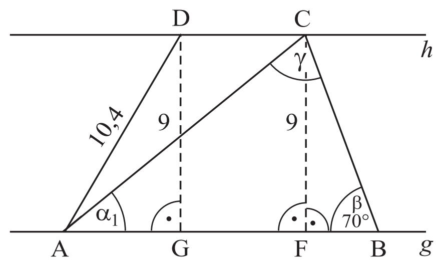
Damit muss in der Rangliste bei Rang 10 auf jeden Fall $q_o = 120\,€$ eingetragen werden.
Bei Rang 8 und 9 müssen Zwischenwerte in aufsteigender Reihenfolge stehen, die mindestens 70 und höchstens 120 sind, also z.B. 90 und 100.
Damit erhält man folgende Rangliste für die Preise der Männerschuhe:

Rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Preis	**30**	30	40	**50**	50	50	**70**	90	100	**120**	120	140	**170**

Teil B 2016

Aufgabe 1

a) Um den Umfang des Vierecks ABCD zu berechnen, benötigt man noch die Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{CD}$.
Die bekannten Maße und Winkel sowie zwei Hilfslinien werden in eine Skizze eingetragen:



Es gilt:

$$\begin{aligned} \overline{AD} &= 10{,}4\,\text{cm} \\ \beta &= 70{,}0^\circ \\ \overline{AB} &= \overline{AC} \end{aligned}$$

Im Dreieck BCF kann man die Seiten $\overline{BF}$ und $\overline{BC}$ bestimmen:

$$\begin{aligned} \tan(\beta) &= \frac{\overline{CF}}{\overline{BF}} \\ \tan(\beta)\cdot\overline{BF} &= \overline{CF} \\ \overline{BF} &= \frac{\overline{CF}}{\tan(\beta)} \\ \overline{BF} &= \frac{9}{\tan(70^\circ)} \\ \overline{BF} &\approx 3{,}28\,\text{cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(\beta) &= \frac{\overline{CF}}{\overline{BC}} \\ \sin(\beta)\cdot\overline{BC} &= \overline{CF} \\ \overline{BC} &= \frac{\overline{CF}}{\sin(\beta)} \\ \overline{BC} &= \frac{9}{\sin(70^\circ)} \\ \overline{BC} &\approx 9{,}58\,\text{cm} \end{aligned}$$

und Wegen $\overline{AB} = \overline{AC}$ ist das Dreieck ABC gleichschenklig, so dass gilt: $\gamma = \beta = 70^\circ$.
Damit ergibt sich:

$$\alpha_1 = 180^\circ - \beta - \gamma = 180^\circ - 70^\circ - 70^\circ = 40^\circ$$

Im Dreieck AFC kann man damit die Seite $\overline{AF}$ berechnen:

$$\begin{aligned} \tan(\alpha_1) &= \frac{\overline{CF}}{\overline{AF}} \\ \tan(\alpha_1)\cdot\overline{AF} &= \overline{CF} \\ \overline{AF} &= \frac{\overline{CF}}{\tan(\alpha_1)} \\ \overline{AF} &= \frac{9}{\tan(40^\circ)} \\ \overline{AF} &\approx 10{,}73\,\text{cm} \end{aligned}$$

Im Dreieck AGD kann man die Seite $\overline{AG}$ mithilfe des Satzes des Pythagoras berechnen:

$$\begin{aligned}\overline{AG}^2+\overline{DG}^2&=\overline{AD}^2\\ \overline{AG}^2&=\overline{AD}^2-\overline{DG}^2\\ \overline{AG}&=\sqrt{\overline{AD}^2-\overline{DG}^2}\\ \overline{AG}&=\sqrt{10,4^2-9^2}\\ \overline{AG}&\approx 5,21\end{aligned}$$

Damit erhält man die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{GF}$:

$$\begin{aligned}\overline{AB}&=\overline{AF}+\overline{BF}=10,73+3,28=14,01\,\text{cm}\\ \overline{GF}&=\overline{AF}-\overline{AG}=10,73-5,21=5,52\,\text{cm}\end{aligned}$$

Mit $\overline{CD}=\overline{GF}=5,52\,\text{cm}$ erhält man den Umfang U des Vierecks ABCD:

$$U=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{AD}=14,01+9,58+5,52+10,4=39,51\,\text{cm}$$

Der Umfang des Vierecks ABCD beträgt etwa $39,5\,\text{cm}$.

b) Als Ansatz für die Gleichung einer nach oben geöffneten Normalparabel p_1 verwendet man die Normalform $y=x^2+bx+c$.
Da die Punkte $A(-3\,|\,-1)$ und $B(1\,|\,-1)$ auf p_1 liegen, kann man diese in die Normalform einsetzen und erhält folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrcccccc}\text{I} & -1 & = & (-3)^2 & + & b\cdot(-3) & + & c\\ \text{II} & -1 & = & 1^2 & + & b\cdot 1 & + & c\end{array}$$

bzw.

$$\begin{array}{lrcccccc}\text{I} & -1 & = & 9 & - & 3b & + & c\\ \text{II} & -1 & = & 1 & + & b & + & c\end{array}$$

Subtrahiert man Gleichung II von I, ergibt sich:

$$0=8-4b\ \Rightarrow\ b=2$$

Setzt man $b=2$ in Gleichung II ein, erhält man:

$$-1=1+2+c\ \Rightarrow\ c=-4$$

Somit hat die Parabel p_1 die Gleichung:

$$p_1:\ y=x^2+2x-4$$

Den Scheitel von p_1 erhält man durch quadratische Ergänzung:

$$\begin{aligned} y &= x^2 + 2x - 4 \\ y &= x^2 + 2x + 1 - 1 - 4 \\ y &= (x+1)^2 - 5 \end{aligned}$$

Damit hat die Parabel p_1 den Scheitel $S_1(-1 \mid -5)$.
Die Gleichung der nach unten geöffneten Normalarabel p_2 mit dem Scheitelpunkt $S_2\,(0 \mid 8)$ erhält man mit der Scheitelform:

$$p_2\colon\ y = -(x-0)^2 + 8 = -x^2 + 8$$

Die Gleichung der Geraden g, welche durch die beiden Scheitelpunkte $S_1(-1 \mid -5)$ und $S_2(0 \mid 8)$ verläuft, erhält man mit der Hauptform $y = mx + c$. Die Steigung m von g erhält man mit der Steigungsformel:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8 - (-5)}{0 - (-1)} = \frac{13}{1} = 13$$

Setzt man $m = 13$ und die Koordinaten von S_2 in die Hauptform ein, ergibt sich:

$$8 = 13 \cdot 0 + c \ \Rightarrow\ c = 8$$

Damit hat die Gerade g die Gleichung:

$$g\colon\ y = 13x + 8$$

Die Koordinaten der Schnittpunkte von p_1 und p_2 erhält man, indem man die Gleichungen von p_1 und p_2 gleichsetzt:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 4 &= -x^2 + 8 \\ 2x^2 + 2x - 12 &= 0 \\ x^2 + x - 6 &= 0 \end{aligned}$$

Mithilfe der *bc*-Formel ($b = 1$ und $c = -6$) erhält man:

$$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - (-6)}$$

Daraus ergeben sich die Lösungen $x_1 = -3$ und $x_2 = 2$.
Die zugehörigen y-Werte erhält man, indem man die erhaltenen x-Werte in die Gleichung von p_2 einsetzt:

$$\begin{aligned} y_1 &= -(-3)^2 + 8 = -1 \\ y_2 &= -2^2 + 8 = 4 \end{aligned}$$

Damit haben die Schnittpunkte von p_1 und p_2 die Koordinaten $Q_1(-3 \mid -1)$, d.h. Punkt A und $Q_2(2 \mid 4)$.
Da die Gerade h parallel zu g verläuft, hat h dieselbe Steigung wie g, also $m = 13$.
Setzt man $m = 13$ und die Koordinaten von Q_1 oder Q_2 in die Hauptform $y = mx + c$ ein, ergibt sich:

$$-1 = 13 \cdot (-3) + c \Rightarrow c = 38$$

bzw.

$$4 = 13 \cdot 2 + c \Rightarrow c = -22$$

Somit gibt es für die Gerade h zwei mögliche Gleichungen:

$$h_1 : y = 13x + 38$$
$$h_2 : y = 13x - 22$$

Aufgabe 2

a) Zuerst bestimmt man das Volumen des Flaschenverschlusses, indem man die Volumina der einzelnen Teilkörper berechnet:

$$\begin{aligned} \mathrm{V}_{\text{Kegel}} &= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r_{\text{Kegel}}^2 \cdot h_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (12\,\text{mm})^2 \cdot 65\,\text{mm} \approx 9801,77\,\text{mm}^3 \\ \mathrm{V}_{\text{Zylinder}} &= \pi \cdot r_{\text{Zylinder}}^2 \cdot h_{\text{Zylinder}} = \pi \cdot (3,5\,\text{mm})^2 \cdot 8\,\text{mm} \approx 307,88\,\text{mm}^3 \\ \mathrm{V}_{\text{Halbkugel}} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r_{\text{Kugel}}^3 = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot (12\,\text{mm})^3 \approx 3619,11\,\text{mm}^3 \end{aligned}$$

Das Volumen V des Flaschenverschlusses beträgt somit:

$$\mathrm{V} = \mathrm{V}_{\text{Kegel}} + \mathrm{V}_{\text{Zylinder}} + \mathrm{V}_{\text{Halbkugel}} \approx 13728,76\,\text{mm}^3$$

Da $1000\,\text{mm}^3 = 1\,\text{cm}^3$, muss man die erhaltene Zahl durch 1000 teilen:

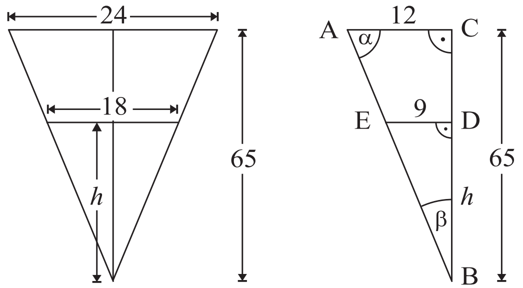
$$\mathrm{V} = \frac{13728,76\,\text{mm}^3}{1000} \approx 13,73\,\text{cm}^3$$

Da $1\,\text{cm}^3$ Stahl $7,9\,\text{g}$ wiegt, gilt für das Gewicht G des Flaschenverschlusses:

$$\mathrm{G} \approx 13,73 \cdot 7,9\,\text{g} \approx 108,47\,\text{g}$$

Der Flaschenverschluss wiegt also etwa $108,5\,\text{g}$.

Um zu berechnen, wie tief der Verschluss in einem Flaschenhals mit 18 mm Innendurchmesser steckt, skizziert man die Problemstellung:



Im Dreieck ABC kann man den Winkel α bestimmen:

$$\tan(\alpha) = \frac{65}{12}$$
$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{65}{12}\right)$$
$$\alpha \approx 79{,}54^\circ$$

Daraus ergibt sich:

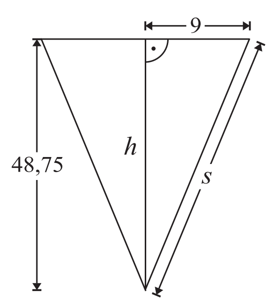
$$\beta = 180^\circ - 90^\circ - \alpha = 180^\circ - 90^\circ - 79{,}54^\circ = 10{,}46^\circ$$

Im Dreieck BDE kann man damit h berechnen:

$$\tan(\beta) = \frac{9}{h}$$
$$\tan(\beta) \cdot h = 9$$
$$h = \frac{9}{\tan(\beta)}$$
$$h = \frac{9}{\tan(10{,}46^\circ)}$$
$$h \approx 48{,}75\,\text{mm}$$

Der Verschluss steckt $48{,}75\,\text{mm}$ tief in der Flasche.

Für den Flächeninhalt des Kegelmantels gilt: $M = \pi \cdot r \cdot s$.
Der in der Flasche sitzende Kegel hat einen Radius von $r = 9\,\text{mm}$ und eine Höhe von $h = 48{,}75\,\text{mm}$.



Die Länge der Mantellinie s erhält man mit dem Satz des Pythagoras:

$$\begin{aligned} s^2 &= r^2 + h^2 \\ s &= \sqrt{r^2 + h^2} \\ s &= \sqrt{9^2 + 48{,}75^2} \\ s &\approx 49{,}57\,\text{mm} \end{aligned}$$

Damit erhält man den Flächeninhalt des Kegelmantels:

$$\mathrm{M} = \pi \cdot r \cdot s = \pi \cdot 9 \cdot 49{,}57 \approx 1401{,}56\,\text{mm}^2$$

Der Kegelmantel hat somit einen Flächeninhalt von etwa $1402\,\text{mm}^2$.

b) Die Gleichung der Parabel p_1 erhält man, indem man die Koordinaten des Punktes $\mathrm{R}(4 \mid 0)$ in die Gleichung $y = \frac{1}{4}x^2 + c$ einsetzt:

$$0 = \frac{1}{4} \cdot 4^2 + c \;\Rightarrow\; c = -4$$

Damit hat die Parabel p_1 die Gleichung:

$$p_1\colon\, y = \frac{1}{4}x^2 - 4$$

Die Normalparabel p_2 hat die Gleichung $y = -x^2 + 1$.

Die Koordinaten der Schnittpunkte P und Q von p_1 und p_2 erhält man durch Gleichsetzen der Gleichungen von p_1 und p_2:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}x^2 - 4 &= -x^2 + 1 \\ \frac{5}{4}x^2 &= 5 \\ x^2 &= 4 \\ x_{1,2} &= \pm 2 \end{aligned}$$

Die zugehörigen y-Werte erhält man, indem man die erhaltenen x-Werte in die Gleichung von p_2 einsetzt:

$$\begin{aligned} y_1 &= -2^2 + 1 = -3 \\ y_2 &= -(-2)^2 + 1 = -3 \end{aligned}$$

Somit haben die Schnittpunkte von p_1 und p_2 die Koordinaten $\mathrm{P}(-2 \mid -3)$ und $\mathrm{Q}(2 \mid -3)$.

Den Scheitel S_1 von $p_1\colon\, y = \frac{1}{4}x^2 - 4$ erhält man durch Umformen in die Scheitelform:

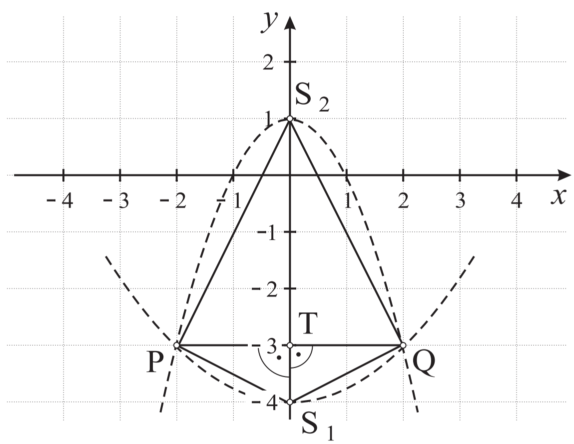
$$y = \frac{1}{4} \cdot (x-0)^2 - 4 \;\Rightarrow\; \mathrm{S}_1(0 \mid -4)$$

Den Scheitel S_2 von $p_2\colon\, y = -x^2 + 1$ erhält man ebenfalls durch Umformen in die Scheitelform:

$$y = -(x-0)^2 + 1 \;\Rightarrow\; \mathrm{S}_2(0 \mid 1)$$

Um zu prüfen, ob das Viereck S_1PS_2Q bei $P(-2 \mid -3)$ einen rechten Winkel hat, berechnet man zuerst die Längen der Seiten $\overline{S_1S_2}$, $\overline{PS_1}$ und $\overline{PS_2}$ und verwendet anschließend den Satz des Pythagoras.

Für den Abstand der beiden Scheitel S_1 und S_2 gilt:



$$\overline{S_1S_2} = 1 - (-4) = 5\,\text{LE}$$

Mithilfe des Satzes des Pythagoras erhält man die Seiten $\overline{PS_1}$ und $\overline{PS_2}$:

$$\overline{PS_1}^2 = \overline{TS_1}^2 + \overline{PT}^2 \qquad \overline{PS_1}^2 = \overline{TS_1}^2 + \overline{PT}^2$$

$$\overline{PS_1} = \sqrt{\overline{TS_1}^2 + \overline{PT}^2} \qquad \overline{PS_1} = \sqrt{\overline{TS_1}^2 + \overline{PT}^2}$$

$$\overline{PS_1} = \sqrt{1^2 + 2^2} \qquad \overline{PS_1} = \sqrt{1^2 + 2^2}$$

$$\overline{PS_1} = \sqrt{5} \qquad \overline{PS_1} = \sqrt{5}$$

Damit gilt im Dreieck PS_1S_2 der Satz des Pythagoras:

$$\begin{aligned} \overline{PS_1}^2 + \overline{PS_2}^2 &= \sqrt{5}^2 + \sqrt{20}^2 \\ &= 5 + 20 \\ &= 25 \\ &= 5^2 \\ &= \overline{S_1S_2}^2 \end{aligned}$$

Damit hat das Viereck S_1PS_2Q bei P einen rechten Winkel.

Aufgrund der Symmetrie hat das Viereck S_1PS_2Q auch bei Q einen rechten Winkel.

Alternativ kann man auch die Steigungen m_1 zwischen $P(-2 \mid -3)$ und $S_1(0 \mid -4)$ bzw. m_2 zwischen P und $S_2(0 \mid 1)$ mithilfe der Steigungsformel berechnen:

$$m_1 = \frac{-4 - (-3)}{0 - (-2)} = -\frac{1}{2}$$

$$m_2 = \frac{1 - (-3)}{0 - (-2)} = 2$$

Da m_1 der negative Kehrwert von m_2 ist, hat das Viereck S_1PS_2Q bei P und aufgrund der Achsensymmetrie auch bei Q einen rechten Winkel.

Somit hat Mia mit ihrer Behauptung, dass das Viereck S_1PS_2Q zwei rechte Winkel hat, Recht.

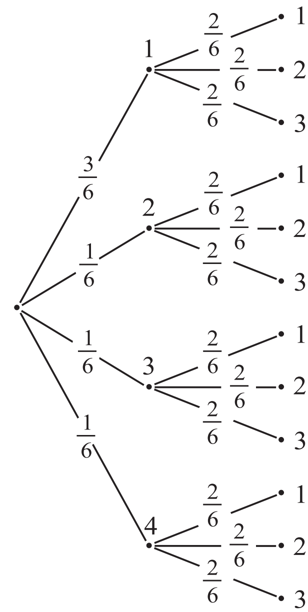
Aufgabe 3

a) Zuerst bestimmt man die Wahrscheinlichkeiten für die beiden Glücksräder, beim Drehen eine 1, 2, 3 oder 4 zu erhalten.

Für das linke Glücksrad gilt: $P(1) = \frac{3}{6}$, $P(2) = \frac{1}{6}$, $P(3) = \frac{1}{6}$ und $P(4) = \frac{1}{6}$.

Für das rechte Glücksrad gilt: $P(1) = \frac{2}{6}$, $P(2) = \frac{2}{6}$ und $P(3) = \frac{2}{6}$.

Damit kann man ein Baumdiagramm erstellen:



Die Wahrscheinlichkeit, im Sichtfenster eine Zahl mit zwei gleichen Ziffern zu sehen, erhält man mithilfe der Pfadregeln (Produkt- und Summenregel):

$$\begin{aligned} P(\text{zwei gleiche Ziffern}) &= P(11) + P(22) + P(33) \\ &= \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{5}{18} \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, im Sichtfenster zwei gleiche Ziffern zu sehen, beträgt $\frac{5}{18}$.

Die Wahrscheinlichkeit, im Sichtfenster eine Zahl größer als 40 zu sehen, erhält man ebenfalls mithilfe der Pfadregeln (Produkt- und Summenregel):

$$\begin{aligned} P(\text{Zahl größer als } 40) &= P(41) + P(42) + P(43) \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Den Erwartungswert E_1 für den Gewinn eines Spielers erhält man, indem man die Gewinne für das jeweilige Ergebnis mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten multipliziert und den Einsatz subtrahiert:

$$E_1 = 3\,€ \cdot \frac{5}{18} + 5\,€ \cdot \frac{1}{6} - 2\,€ = -\frac{1}{3}\,€ \approx -0{,}33\,€$$

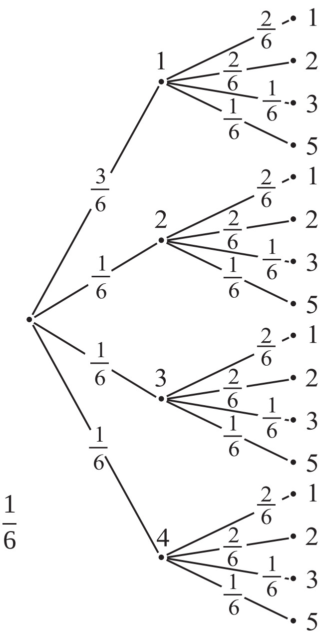
Somit beträgt der Erwartungswert für den Gewinn eines Spielers $-0{,}33$ Euro, d.h. der Spieler macht auf lange Sicht pro Spiel einen Verlust von $0{,}33$ Euro.

Wenn auf dem zweiten Glücksrad eine Drei durch eine Fünf ersetzt wird, ändern sich die Wahrscheinlichkeiten, beim Drehen eine 1, 2, 3, 4 oder 5 zu erhalten.

Für das linke Glücksrad gilt: $P(1) = \frac{3}{6}$, $P(2) = \frac{1}{6}$, $P(3) = \frac{1}{6}$ und $P(4) = \frac{1}{6}$.

Für das rechte Glücksrad gilt: $P(1) = \frac{2}{6}$, $P(2) = \frac{2}{6}$, $P(3) = \frac{1}{6}$ und $P(5) = \frac{1}{6}$.

Damit erhält man folgendes Baumdiagramm:



Somit ändern sich auch die Wahrscheinlichkeiten, dass zwei gleiche Ziffern oder eine Zahl größer als 40 zu sehen ist.
Mithilfe der Pfadregeln (Produkt- und Summenregel) ergibt sich nun:

$$\begin{aligned} P(\text{zwei gleiche Ziffern}) &= P(11) + P(22) + P(33) \\ &= \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

und

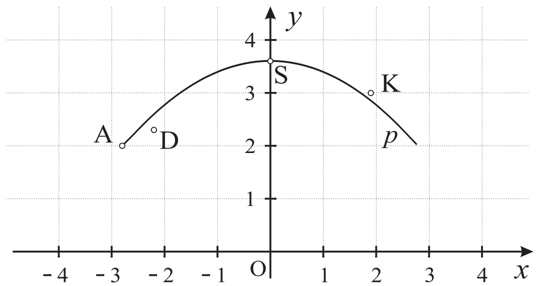
$$\begin{aligned} P(\text{Zahl größer als } 40) &= P(41) + P(42) + P(43) + P(45) \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Damit gilt nun für den neuen Erwartungswert E_2 für den Gewinn eines Spielers:

$$E_2 = 3 \text{€} \cdot \frac{1}{4} + 5 \text{€} \cdot \frac{1}{6} - 2 \text{€} = -\frac{5}{12} \text{€} \approx -0{,}42 \text{€}$$

Somit beträgt der neue Erwartungswert für den Gewinn eines Spielers $-0{,}42$ Euro, d.h. der Spieler macht auf lange Sicht pro Spiel einen Verlust von $0{,}42$ Euro.
Da der Spieler beim Ändern des rechten Glücksrads langfristig einen höheren Verlust pro Spiel macht als beim ursprünglichen rechten Glücksrad, wird bei der Wohltätigkeitsveranstaltung ein höherer Erlös erzielt.
Somit ist es vorteilhaft, beim rechten Glücksrad eine Drei durch eine Fünf zu ersetzen.
Alternativ kann man dies auch durch eine Argumentation wie folgt begründen: «Ändern der 3 zu einer 5 ändert nichts an der Wahrscheinlichkeit, eine Zahl größer als 40 zu drehen, weil dafür das rechte Rad keine Rolle spielt. Es verringert die Wahrscheinlichkeit für zwei Gleiche, denn das Ereignis 33 wird unwahrscheinlicher und das Ereignis 55 kann nicht eintreten, weil es auf dem linken Rad keine 5 gibt.
Der erwartete Gewinn wird kleiner, also wird der Erlöß größer.

b) Das Koordinatensystem wird am geschicktesten so gelegt, dass die x-Achse auf dem Boden liegt und die y-Achse durch den Scheitelpunkt S geht.
Damit hat der Scheitel S der Parabel p die Koordinaten $S(0 \mid 3,6)$ und der Abwurfpunkt A hat die Koordinaten $A(-2,8 \mid 2)$.



Setzt man die Koordinaten von S in den Ansatz $y = ax^2 + c$ ein, ergibt sich:

$$3,6 = a \cdot 0^2 + c \;\Rightarrow\; c = 3,6$$

Damit ergibt sich: $y = ax^2 + 3,6$.
Setzt man die Koordinaten von $A(-2,8 \mid 2)$ in die Gleichung von p ein, ergibt sich:

$$2 = a \cdot (-2,8)^2 + 3,6 \;\Rightarrow\; a = -\frac{1,6}{(-2,8)^2} = -\frac{10}{49}$$

Somit hat die Parabel p die Gleichung:

$$p\colon\; y = -\frac{10}{49}x^2 + 3,6$$

Der Korb K, der in einer Höhe von $3,05\,\text{m}$ und in x-Richtung $4,70\,\text{m}$ vom Abwurfpunkt entfernt ist, hat die Koordinaten $K(1,9 \mid 3,05)$.
Um zu prüfen, ob Dirk bei diesem Wurf direkt in den Korb trifft, setzt man die Koordinaten von K in die Gleichung von p ein:

$$3,05 = -\frac{10}{49} \cdot (1,9)^2 + 3,6 \;\Rightarrow\; 3,05 \neq 2,86$$

Aufgrund der falschen Aussage liegt der Punkt K nicht auf der Parabel p.
Somit trifft Dirk den Korb bei diesem Wurf nicht.

Der Abwehrspieler Dennis, der im Abstand von $0,60\,\text{m}$ vor Dirk steht und mit nach oben gestreckten Armen eine Höhe von $2,30\,\text{m}$ erreicht, hat mit ausgestreckten Armen die Koordinaten $D(-2,2 \mid 2,3)$.
Um zu prüfen, ob Dennis den Ball ohne hochzuspringen berührt, berechnet man die Flughöhe des Balls an Dennis Stelle, indem man $x = -2,2$ in die Gleichung von p einsetzt:

$$y = -\frac{10}{49} \cdot (-2,2)^2 + 3,6 = 2,61 > 2,3$$

Da die Flughöhe des Balls höher ist, als die Armlänge von Dennis reicht, berührt Dennis den Ball nicht, ohne hochzuspringen.