

# Analytische Geometrie

---

## Einführung

### Die didaktische Konzeption

Wer lässt sich schon gern überraschen? Wer ist begeistert, wenn er an die Hand genommen, einem ihm unbekanntem Ziel zusteuern soll? Wer plant eine Entdeckungsreise in 50 km Abschnitten vom Heimatort aus, um erst am unbekanntem Ziel seine möglichen Zielvorstellungen zu erleben und die Hilfen während der Etappen zum Ziel für diese Entdeckungen erst am Ende würdigen zu können?

Die analytische Geometrie vermittelt Problemlösungsstrategien im Umgang mit unserem Verständnis, dreidimensionale Objekte auf der Basis von Abbildungstechniken in die Ebene abzubilden und hier mit der Bereitstellung von Rechentechniken quantitative Aussagen für Teilbereiche dieser Objekte zu formulieren. Dreidimensionale Objekte stehen hier im Mittelpunkt. Dann beginnen wir doch unsere Reise durch die analytische Geometrie damit! Das bedeutet: „Vom Ziel her gedacht“ starten wir mit einem Objekt im  $\mathbb{R}^3$  und der Fragestellung: was benötige ich, um mich hier zu Recht zu finden?

„Vom Ziel her gedacht“ konfrontiert also zunächst mit einem Objekt in seiner gesamten Komplexität und die einzelnen Bausteine der notwendigen Erkenntnisgewinnung zum tieferen Verständnis der sich ergebenden Problemstellungen werden dann „sehenden Auges“ zielgerecht erarbeitet.

„Vom Ziel her gedacht“ schafft Klarheit bezüglich der wirklich wichtigen Bestandteile der analytischen Geometrie (Punkt, Gerade und Ebene) und macht die Bedeutung für den Einsatz notwendiger Hilfsmittel (z.B. Gauß-Algorithmus, Skalar- oder Vektorprodukt) und für die Verwendung einiger Verfahren zur Vereinfachung von Problemlösungsstrategien (z.B. die unterschiedlichen Darstellungen einer Ebene oder die „Hesse'sche Normalenform“) deutlich.

„Vom Ziel her gedacht“ ist aber auch eine Konzeption, die die Beteiligten (die Schülerinnen und Schüler) viel stärker in den Unterrichtsablauf einbindet:

- wir wissen wohin es geht, aber wir haben eine Menge von Fragen auf dem Weg zum Ziel.
- wir müssen nicht abwarten, welche „Häppchen“ uns vorgesetzt werden.
- wir können uns mit unseren „zielgerichteten Fragen“ einbringen.
- wir haben eine Perspektive, den Weg mitzugestalten.
- wir benötigen gezielte Inputs zur Entwicklung von Problemlösungsstrategien.

### Was habe ich, als Schüler, „davon“?

Es liegt ein Arbeitsbuch vor. Dies soll:

- Selbständiges Arbeiten fördern
- Raum zu Nachfragen ermöglichen

# Analytische Geometrie

---

- Möglichkeiten zur Entwicklung von mathematischen Kompetenzen deutlich machen.

Es geht zunächst um die konsequente Einlassung der Schülerinnen und Schüler auf das ICH/DU/WIR-Konzept.

**ICH:** Welche Fragen, welche Lösungsideen habe ich zu den einzelnen Fragestellungen? Welche Problemlösungsstrategien werde ich einsetzen, welche Interpretationen möglicher eigener Lösungen formuliere ich?

**DU:** Ich bin bereit

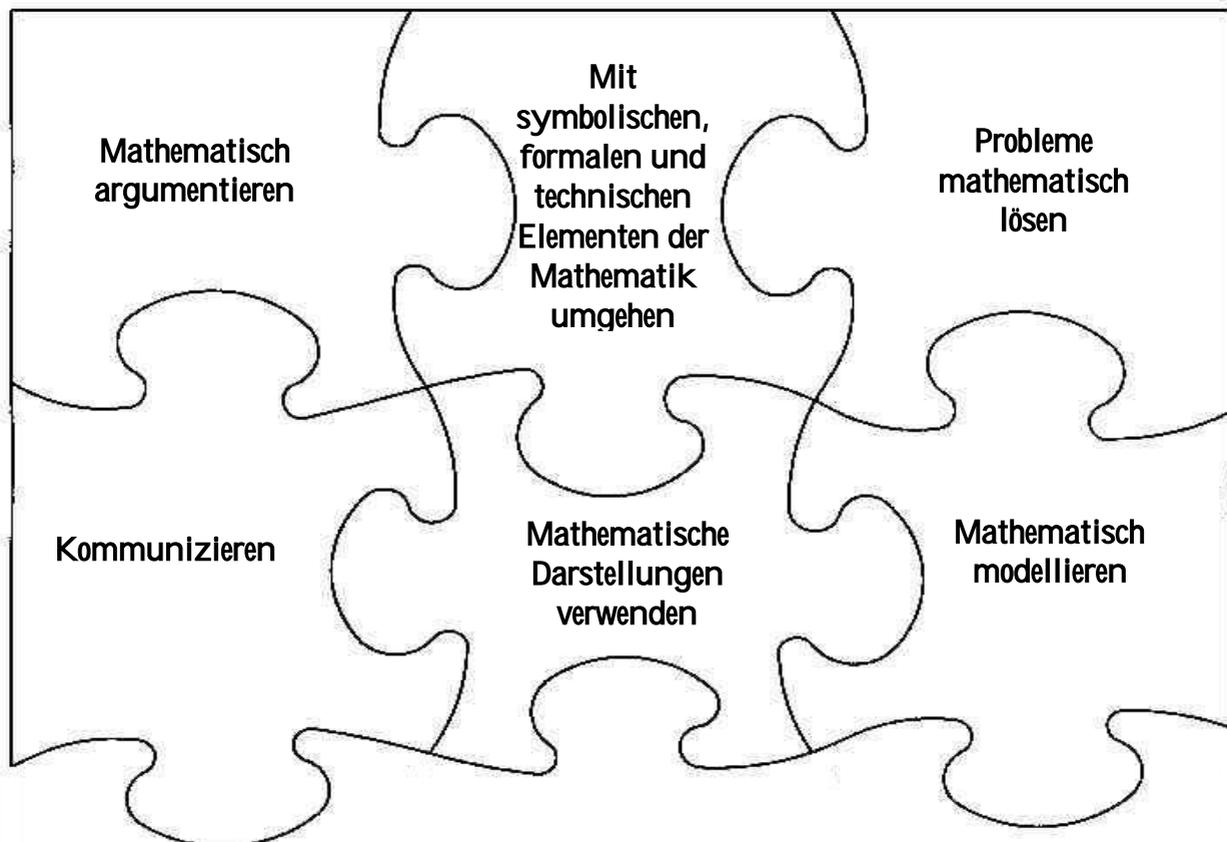
- zu einer Konfrontation meiner Ideen mit einem DU,
- meine eigenen Ideen sachkompetent zu verteidigen,
- andere Ideen zu respektieren und einer gründlichen Prüfung zu unterziehen,
- notwendige Kompromisse ein zu gehen,
- meine Ergebnisse im Bedarfsfall zu revidieren.

**WIR:** Welchen Bestand hat unsere Lösungsidee in der Gruppe?

Wie könnte eine Lösung formuliert werden, die von der Gruppe akzeptiert wird?

Wie hält diese Lösung Stand zu den bisher veröffentlichten Lösungen?

Es geht aber auch um die Chance, Kompetenzen zu erwerben. Die Kompetenzen im Fach Mathematik beziehen sich auf



# Analytische Geometrie

---

## Wie arbeite ich mit dem workbook?

Das vorliegende workbook ist für den *Unterrichtseinsatz* konzipiert, eignet sich aber ebenso für die individuelle *Unterrichtsnachbereitung* oder die *Vorbereitung auf die Abiturprüfung*.

Am besten ist, wenn Sie das workbook zusammen mit mehreren Lernpartnern bearbeiten – ob im Unterricht oder außerhalb. Nur im *Dialog* mit einem Gegenüber lässt sich erkennen, ob Sie die Inhalte wirklich verstanden haben und ob Sie in der Lage sind, mathematische Sachverhalte adäquat darzustellen, zu erläutern und zu bearbeiten. Vergessen Sie aber nicht, dass Sie in einer ersten Phase immer erst versuchen sollten, Aufgabenstellungen *alleine* zu verstehen und Lösungen bzw. Lösungsideen *selbständig* zu entwickeln – nicht zuletzt im Hinblick auf die anstehende Abiturprüfung.

Machen Sie sich klar, dass Lernprozesse bei jedem Einzelnen unterschiedlich verlaufen. Es liegt daher an Ihnen, dass Sie Ihren individuellen Lernprozess optimal gestalten. Das vorliegende workbook macht hierzu unterschiedliche Angebote.

Inhaltlicher Schwerpunkt des workbooks ist der klassische Bereich der *Analytischen Geometrie*. Es geht also um Objekte im dreidimensionalen Raum, deren Lagen und Abstände – bearbeitet mit dem Instrumentarium der *Vektorrechnung*. Anders als Ihr Lehrbuch, ist das workbook aber *strikt „genetisch“* aufgebaut, d.h. neue Instrumente werden erst dann eingeführt, wenn sie zur Lösung eines bereits aufgeworfenen Problems notwendig sind. Sie sollten daher versuchen, das workbook *von vorne nach hinten* durchzuarbeiten, wenn Sie sich das Gebiet der Analytischen Geometrie neu erschließen wollen. Nur wenn Sie das workbook zur Wiederholung oder Vertiefung einsetzen, sollten Sie die Aufgaben des workbooks in loser Reihenfolge verwenden. In diesem Fall gibt die Übersicht zur Inhaltsstruktur mit den Hinweisen zu Inhalten, aber auch Fach- und Methodenkompetenzen wertvolle Hilfestellungen.

Die im workbook verwendeten Aufgabenformate sollen Ihnen helfen, den Lehrstoff zu *durchdringen*. Sie werden aufgefordert, eigene Aufgaben zu entwerfen, „rückwärts“ zu denken, zu systematisieren, zu strukturieren usw.. Nicht selten werden Sie aufgefordert, sich Kenntnisse mithilfe Ihres Lehrbuchs anzueignen. In solchen Fällen setzt die Aufgabe im workbook diese Kenntnisse voraus und bietet Möglichkeiten, diese zu vertiefen oder zu verknüpfen.

Zudem finden Sie *komplexe Aufgaben*, die sich in Art, Umfang und Aufbau an den Prüfungsaufgaben im Abitur orientieren. Eindimensionale Aufgabenstellungen finden Sie zu genüge in Ihrem Lehrbuch. Diese sollten Sie zur Einübung bestimmter, eng umrissener Fähigkeiten (z.B. Punktproben bei Geraden, Schnittpunktbestimmungen, Lösen Linearer Gleichungssysteme) nutzen. Aber erst wenn Sie in der Lage sind, die Aufgaben dieses workbooks zu lösen, haben Sie den Stoff richtig verstanden. Nur auf den ersten Blick erscheint dies als Mehrarbeit. Denn wenn Sie z.B. verstanden haben, dass vielen Problemen zur Abstandsbestimmung dieselbe Lösungsidee zugrunde liegt, genügt es, dieses eine Verfahren zu beherrschen; anstatt – wie ungünstigstenfalls – zu jedem Problem ein eigenes Verfahren zu lernen.

Am Ende des workbooks finden Sie *Kommentierungen, Hilfen und Musterlösungen* zu den mit \* gekennzeichneten Materialien. In den Kommentaren finden Sie

# Analytische Geometrie

---

Bemerkungen zu den Zielen der Aufgabe und zu den Voraussetzungen für die erfolgreiche Bearbeitung der Fragestellung. Zudem wird in einem *Kompetenzraster* geklärt, welche mathematische Kompetenz mit der Aufgabenstellung schwerpunktmäßig gefördert werden soll. Insbesondere beim Umgang mit den Lösungshinweisen bzw. den Musterlösungen ist Ihre Eigenverantwortung gefragt. *Vergessen Sie nicht, dass Sie Ihre Kompetenz zur Lösung mathematischer Probleme nur dadurch stärken, dass Sie mathematische Probleme auch selbständig lösen!* Sie sollten also nicht zu früh resignieren und die Lösungshinweise nur dann verwenden, wenn Sie (und Ihre Lernpartner) selbst bei längerer Auseinandersetzung mit der Problematik nicht weiter kommen.

Gleichzeitig wird mit der Auswahl der Aufgaben gewährleistet, dass Sie auch methodisch vielfältig lernen. Die Zuordnung der geförderten Methodenkompetenz zu den Aufgaben können Sie der Übersicht der Inhaltsstruktur entnehmen.

Alle Aufgaben eignen sich - wenn nicht anders gekennzeichnet – für Grund- und LeistungskursschülerInnen.

Inhaltlich abgerundet wird das workbook durch die Herstellung von Zieltransparenz zu Beginn und durch Angebote zur Reflexion des erreichten Lernstandes am Ende der einzelnen Kapiteln. Hier bieten Selbsteinschätzungsbögen und Partnerarbeitbögen Hilfen, die Sie nutzen sollten. Auch dies soll die Eigenverantwortung für Ihren Lernprozess Unterricht stärken – unabhängig davon, ob Sie das workbook im Unterricht oder flankierend verwenden.

Und nun viel Erfolg (und vielleicht auch ein bisschen Spaß) bei der Arbeit mit dem workbook!

## Zieltransparenz

### I. Der dreidimensionale Raum

**Ziele dieses Kapitels:**

Ausgehend von dem dreidimensionalen Modell eines Hauses lernen Sie, wie sich räumliche Objekte in der Zeichenebene darstellen lassen. Damit trainieren Sie auch Ihr räumliches Vorstellungsvermögen. Sie werden am konkreten räumlichen Objekt mathematische Fragestellungen entwickeln und überprüfen, welche dieser Fragen sich mit aus der Sekundarstufe I bekannten Instrumenten beantworten lassen. Offen gebliebene Fragen motivieren Sie, die neuen Instrumente der Analytischen Geometrie kennen zu lernen bzw. zu entwickeln.

II. Objekte im  $\mathbb{R}^3$

III. Rechnen mit Punkten, Geraden und Ebenen

Lagebeziehungen, Abstände, Schnittwinkel

IV. Allmählicher Abschied von der Geometrie

V. Lineare Abbildungen

VI. Kreis und Kugel

VII. Verallgemeinerung und Ausblick

VIII. Komplexe Aufgaben zum Wiederholen und

Vertiefen

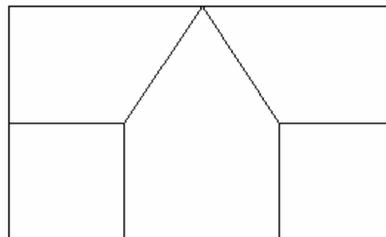
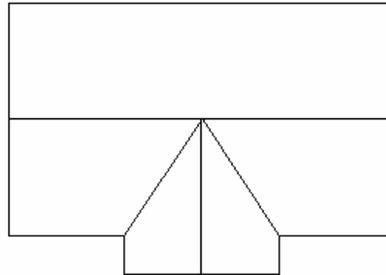
# Analytische Geometrie

---

## Material 1\*

### Von Grund- und Aufriss zum Schrägbild

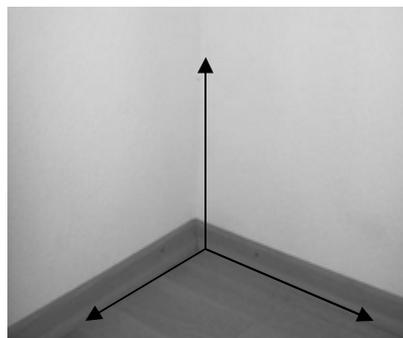
Aus dem Faltmodell des Hauses lassen sich folgender Grund- und Aufriss ermitteln. Diese ergeben sich, wenn man direkt von oben bzw. von vorne das Haus(modell) betrachtet.



Nun stellt sich die Frage, ob wir ein dreidimensionales Objekt auch in einem einzigen Bild, also nicht separat als Grund- und Aufriss darstellen können. Dies führt uns zu dem Problem der Schrägbilder.

### Das dreidimensionale Koordinatensystem

Aus der Mittelstufe kennen wir das zweidimensionale, „kartesische“ Koordinatensystem. Hier stehen zwei Achsen senkrecht zueinander, die die Fläche, also den zweidimensionalen Raum ( $\mathbb{R}^2$ ) erschließen. Es erscheint einleuchtend, dass man im dreidimensionalen Raum drei Achsen benötigt, die paarweise senkrecht zueinander stehen. In den Ecken eines jeden rechtwinkligen Raums lässt sich ein solches Koordinatensystem leicht finden:



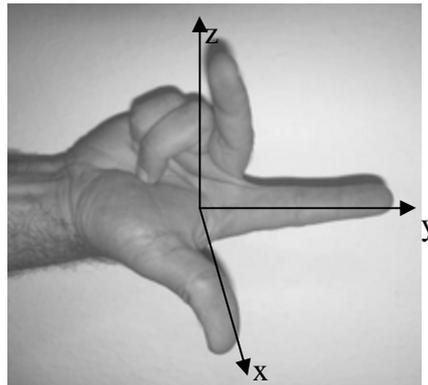
\* Zu diesem Material finden Sie ergänzende Hinweise und Hilfen am Ende des workbooks.

# Analytische Geometrie

---

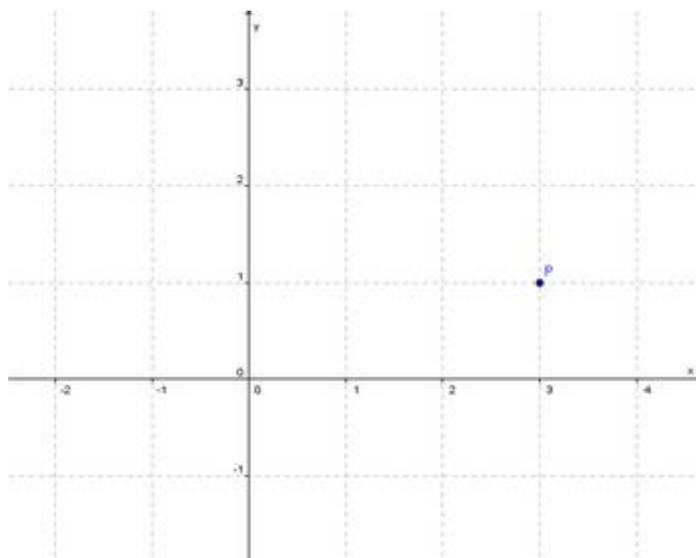
Ausgehend von diesem Koordinatensystem lässt sich nun jeder beliebige Punkt im Raum beschreiben. Man muss nur – analog der Vorgehensweise im zweidimensionalen Koordinatensystem – angeben, wie weit man vom Ursprung aus in x-, in y- und in z-Richtung „gehen“ muss, um den Punkt zu erreichen. Selbstverständlich sind hier auch negative Werte möglich. Diese Werte – die Koordinaten des Punktes P – fasst man zusammen als  $P(x; y; z)$ .

Damit diese Angaben eindeutig sind, benötigen wir eine weitere Vereinbarung: Die drei Achsen bilden ein „Rechtssystem“. Zur Benennung der Achsen hilft die „Rechte-Hand-Regel“, dabei zeigt der Daumen in Richtung der x-Achse, der Zeigefinger in Richtung der y-Achse und der Mittelfinger in Richtung der z-Achse:



## Wie zeichnet man einen Punkt in ein dreidimensionales Koordinatensystem?

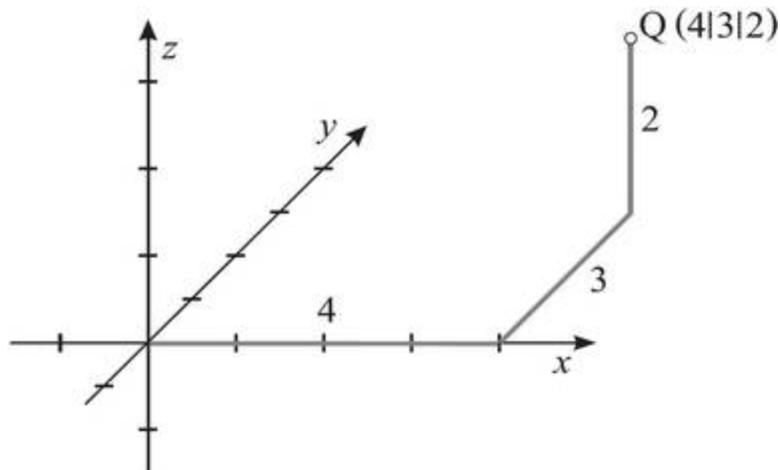
Um diese Frage zu beantworten, hilft es, sich die Methode im zweidimensionalen Fall zu vergegenwärtigen. Um den Punkt  $P(3; 1)$  einzuzichnen, startet man im Ursprung, geht drei Schritte in x-Richtung und einen Schritt in y-Richtung. (Sie können auch zuerst die Schritte in y-Richtung und dann in x-Richtung gehen.)



Genauso geht man im dreidimensionalen Fall vor. Um beispielsweise den Punkt  $Q(4; 3; 2)$  einzuzichnen, startet man im Ursprung, geht vier Schritte in x-Richtung, drei Schritte in y-Richtung und zwei Schritte in z-Richtung.

# Analytische Geometrie

Auf kariertem Papier wählt man als Einheit nach „rechts/links“ und „oben/unten“ zwei Kästchen. Der Weg nach „hinten“ wird verkürzt dargestellt; dies geschieht, indem man pro Schritt nur eine Kästchendiagonale geht.)

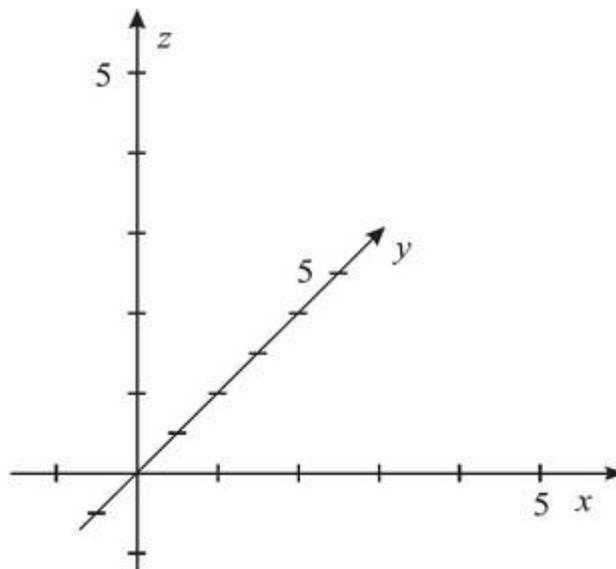


Beachten Sie, dass aus der Lage eines Punktes im dreidimensionalen Koordinatensystem nur dann dessen Koordinaten ermittelt werden können, wenn der Weg zu diesem Punkt bekannt ist.

## Aufgabe

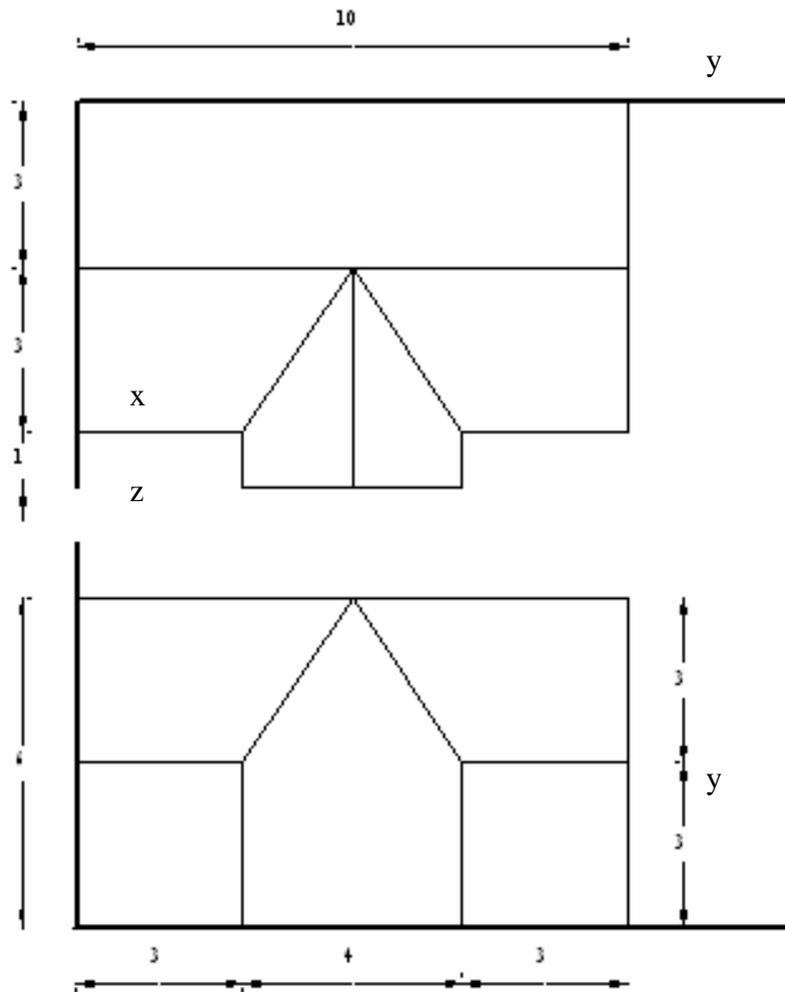
### Das Haus im Schrägbild

Nun sollten Sie die Umsetzung der neuen Erkenntnisse üben! Zeichnen Sie dazu ein Schrägbild des Hauses in das dreidimensionale Koordinatensystem der Form

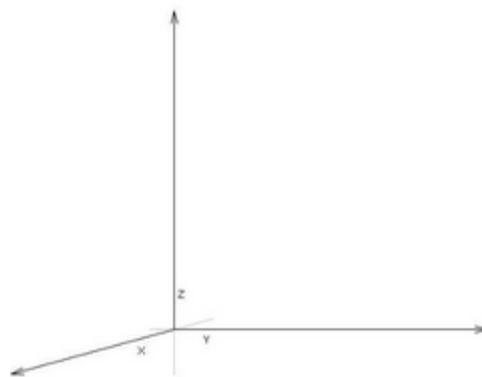


Die Maße und die Lage des Hauses im Koordinatensystem können Sie der folgenden Abbildung entnehmen, in der die jeweiligen Achsen eingezeichnet sind.

# Analytische Geometrie



Trotz der bisherigen Vereinbarungen gibt es unterschiedliche Darstellungsformen dreidimensionaler Koordinatensysteme. So kann man unter Berücksichtigung der „Rechte-Hand-Regel“ beispielsweise auch folgendes Koordinatensystem konstruieren:



Sie sollten auch den Umgang mit alternativen Varianten üben.

## Aufgabe