Inhaltsverzeichnis

1 Zufallsvariable X, Erwartungswert E(X), Varianz V(X)

1.1 Zufallsvariable oder Zufallsgröße

Vom Ereignis zur Zahl

Betrachten Sie folgende Kartenkombinationen beim Spiel „Ozor”:
(Mathe|Politik), (Natur|Politik), (Kunst|Mathe), (Kunst|Wirtschaft) und (Wirtschaft|Mathe).

Diesen Paaren wird nun eine Zahl folgendermaßen zugeordnet:
(Mathe|Politik) $\rightarrow$ 1, (Natur|Politik) $\rightarrow$ 0, (Kunst|Mathe) $\rightarrow$ 1, (Kunst|Wirtschaft) $\rightarrow$ 0 und (Wirtschaft|Mathe) $\rightarrow$ 1

1) Beschreiben Sie mit Ihren eigenen Worten, wie die Zuordnungsvorschrift für den oben angeführten Fall zustande kommt.

2) Welches ist der maximale Wert, der bei der Zuordnung angenommen werden kann?

Beim Spiel „Zurreih” wird ebenfalls eine Zuordnung vorgenommen. Dazu werden die Motive (Stern, Hut, Smily, Face, Jimmy) des Spielautomaten verwendet: (Stern|Smily|Hut) $\rightarrow$ 1, (Jimmy|Smily|Hut) $\rightarrow$ 0, (Stern|Stern|Smily) $\rightarrow$ 2, (Hut|Smily|Hut) $\rightarrow$ 0, (Jimmy|Smily|Face) $\rightarrow$ 0, (Stern|Smily|Stern) $\rightarrow$ 2, (Face|Smily|Stern) $\rightarrow$ 1, (Stern|Stern|Stern) $\rightarrow$ 3, (Face|Smily|Stern) $\rightarrow$ 1 und (Face|Smily|Hut) $\rightarrow$ 0

3) Beschreiben Sie, wie die Zuordnungsvorschrift für den oben angeführten Fall zustande kommt.

4) Welches ist der maximale Wert, der angenommen werden kann?

Die Zuordnungen, die Sie bearbeitet haben, erhalten den Namen „diskrete Zufallsgröße”. Zur Wiederholung sind Sie aufgefordert, diese Zuordnung nochmals in ihren Eigenschaften zu erläutern:

Definition Zufallsgröße

Übungen:

1) Die Abteilung Spielentwicklung für Brettspiele macht die Überlegung für die Spiele „Zurreih”, „OzümiR” und „Kombi” beim Spielen zwei anstatt einen Würfel zu verwenden.

   a) Geben Sie eine Zufallsgröße für den Fall an, dass bei dem Zufallsexperiment nur mit einem Würfel geworfen wird.

   b) Beschreiben Sie die Zufallsgröße für den Fall, dass die Summe der Augenzahlen zweier Würfel bei einmaligem Wurf gezählt wird.

2) Die Spielentwicklung der Spiele AG überlegt, dass beim Spiel „Ozor” zu jeder Wissenskarte drei mögliche Antworten auf der Karte stehen. Außerdem soll einem Spieler die Möglichkeit eingeräumt werden, drei Fragen hintereinander zu beantworten. Ein Zufallsexperiment mit Laien, die z.T. die Antworten raten müssen, soll Aufschluss über einen interessanteren Spielablauf geben. Beschreiben Sie die Zufallsvariable für den Fall, dass ein Spieler alle Antworten raten muss. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler durch Raten zwei Richtige von drei Fragen hat.

1.2 Erwartungswert und Varianz

Nochmal Multiple-Choice

Aus dem Kapitel *Beschreibende Statistik* (Heft 1) ist folgendes Beispiel und dessen Lösung bekannt: Bei einer Klausur besteht der letzte Teil aus drei Multiple-Choice-Aufgaben. Jede Aufgabe bietet drei Antwortmöglichkeiten, bei der jeweils nur eine richtig ist. Das Ergebnis einer Klasse, bei dem die Schüler absolut unvorbereitet waren, sie also die Antworten raten mussten, ist der folgenden Häufigkeitstabelle zu entnehmen:

x_i	Absolute Häufigkeit k_i	Relative Häufigkeit $h_i = \frac{k_i}{n}$	$x_i \cdot h_i$	$(x_i - \overline{x})$	$(x_i - \overline{x})^2$	$(x_i - \overline{x})^2 \cdot h_i$
0	31	0,31	0	-0,97	0,9409	0,2917
1	44	0,44	0,44	0,03	0,0009	0,0004
2	22	0,22	0,44	1,03	1,0609	0,2334
3	3	0,03	0,09	2,03	4,1209	0,1236
	$n = 100$		$\overline{x} = 0,97$ Mittelwert			$s^2 = 0,6491$ $s \approx 0,8057$

Das Klassenergebnis zeigt, dass die durchschnittlich richtig beantworteten Fragen sich mit den Erwartungen decken. Beim Raten hat der Schüler die Chance eine der drei Richtigen zu treffen; bei drei Fragen kann man dann durchschnittlich eine richtig beantwortete Frage erwarten. Diese Überlegungen, die bereits vor dem Zufallsexperiment stattfinden können, sollen von Ihnen über die *Wahrscheinlichkeitsrechnung* bestätigt werden**.**

Tipp: Nutzen Sie die vorgegebene Tabelle für folgende Berechnungen.

- Beschreiben Sie die Zufallsvariable X, indem Sie sie in die untenstehende Tabelle eintragen
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten (vgl. dazu Übung 1.1.2) und bestimmen Sie, wie viele richtig gelöste Aufgaben durchschnittlich zu erwarten sind.
  Tipp: Die relative Häufigkeit ist in der Wahrscheinlichkeitsrechnung vergleichbar mit der Wahrscheinlichkeit.
- Berechnen Sie sowohl die Varianz als auch die Standardabweichung.

$X =$						
$X = x_i$						
0						
1						
2						
3						

Übungen:

1) Von 8 in einer Urne liegenden Kugeln sind 4 rot. 3 Kugeln werden nacheinander *ohne Zurücklegen* gezogen. X sei die Anzahl der roten unter den gezogenen Kugeln.

   a) Zeichnen Sie ein vollständiges Baumdiagramm.

   b) Berechnen Sie in der unteren Tabelle die Wahrscheinlichkeiten, den Erwartungswert und die Varianz.

X =					
$X = x_i$					
0					
1					
2					
3					

   c) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz für den Fall, dass *mit Zurücklegen* gezogen wird. Zeichnen Sie zur Hilfe ein neues Baumdiagramm:

X =					
$X = x_i$					
0					
1					
2					
3					

2) Zur Erinnerung an das Galton Brett:
Eine von oben startende Kugel trifft von Reihe zu Reihe rollend stets auf ein neues Hindernis und wird dort nach rechts oder nach links abgelenkt. Schließlich landet sie in einem Auffangkästchen. p sei die Wahrscheinlichkeit nach rechts zu fallen.

a) Bestimmen Sie für $n = 2$ und $p = 0,5$ den Erwartungswert zur Zufallsvariablen.

<table>
<tr><td rowspan="7">Baumdiagramm:</td><td colspan="3">X = Nummer des Auffangskästchens</td></tr>
<tr><td></td><td>$P(X = x_i)$</td><td></td></tr>
<tr><td>$x_1 =$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$x_2 =$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$x_3 =$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

b) Bestimmen Sie für $n = 3$ und $p = \frac{1}{3}$ den Erwartungswert zur Zufallsvariablen.

<table>
<tr><td rowspan="9">Baumdiagramm:</td><td colspan="3">$X =$ Nummer des Auffangskästchens</td></tr>
<tr><td></td><td>$P(X = x_i)$</td><td></td></tr>
<tr><td>$x_1 =$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$x_2 =$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$x_3 =$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$x_4 =$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3"></td></tr>
</table>

3) Der Lehrer aus dem Kapitel *„Beschreibende Statistik"* hatte mit seinen Schülern eine Wette vereinbart, bei der er jeden Einser und Zweier mit 2€ sowie jede „Drei" mit 1€ belohnt. Er vermutet, dass 5 % eine Eins und 20 % eine Zwei schreiben. Einen Dreier vermutet er in 50 % der Fälle.

a) Beschreiben Sie eine passende Zufallsgröße X und berechnen Sie den zu erwartenden Einsatz, den der Lehrer durchschnittlich pro Person zahlen muss

$X =$		
	$P(X = x_i)$	
$x_1 =$		
$x_2 =$		
$x_3 =$		

b) Da der Lehrer einen Gewinn von 1,-€ machen möchte, überlegt er sich, welchen Einsatz schlechte Schüler geben müssten. Berechnen Sie den Erwartungswert indem Sie die untere Tabelle nutzen.

$Y =$		
	$P(Y = y_i)$	
$y_1 =$		
$y_2 =$		
$y_3 =$		