

Rosner

Mathe gut erklärt Abitur 2023

Baden-Württemberg
Basisfach Mathematik
Allgemeinbildende Gymnasien

9. Auflage

Freiburger
Verlag

Inhaltsverzeichnis

I. Grundlagen Analysis	8
1 Funktionen (Mindmap)	8
1.1 Ganzrationale Funktionen (Polynome)	8
1.2 Der Nullstellenansatz und die Vielfachheit von Nullstellen	10
1.3 Exponentialfunktionen	12
1.4 Trigonometrische Funktionen	14
1.5 Übersicht: Spiegeln, Strecken und Verschieben	16
1.6 Symmetrie zur y -Achse bzw. zum Ursprung	18
1.7 Umgang mit Funktionen: Rechenansätze	19
2 Gleichungen (Mindmap)	20
2.1 Gleichungstypen: Übersicht	22
2.2 Gleichungstypen: Konkretes Lösungsvorgehen	24
2.3 Goldene Regeln zum Lösen von Gleichungen	30
2.4 Lineare Gleichungssysteme	32
2.5 Ungleichungen	34
3 Differenzialrechnung (Mindmap)	36
3.1 Ableitungsregeln	38
3.2 Tangente und Normale	41
3.3 Monotonie	44
3.4 Krümmung	45
3.5 Extrempunkte (Hoch- und Tiefpunkte)	46
3.6 Wendepunkte	47
3.7 Sattelpunkte	48
3.8 Zusammenhang zwischen den Schaubildern von Funktion und Ableitung	52
3.9 Ermittlung von Funktionsgleichungen	54
3.10 Extremwertaufgaben	56
3.11 Wachstum und Zerfall	58
4 Integralrechnung (Mindmap)	61
4.1 Integrationsregeln („Aufleitungsregeln“)	62
4.2 Flächeninhaltsberechnung zwischen Schaubild und x -Achse	66
4.3 Flächeninhaltsberechnung zwischen zwei Schaubildern	68
4.4 Zusatz: Wichtiges für Anwendungsorientierte Aufgaben	72
II. Grundlagen Vektorgeometrie (Mindmap)	76
1 Vorwissen	78
1.1 Punkte (im \mathbb{R}^3)	78
1.2 Vektoren (im \mathbb{R}^3)	78

1.3	Rechnen mit Vektoren (Addition, Subtraktion, Betrag, Skalare Multiplikation, Linearkombination, Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit, Skalarprodukt, Vektorprodukt)	79
2	Geraden	82
2.1	Geradengleichungen in Parameterform	82
2.2	Gegenseitige Lage von Geraden	84
3	Ebenen	86
3.1	Ebenengleichungen in Parameterform	86
3.2	Ebenengleichungen in Koordinatenform	88
3.3	Spurpunkte, Spurgeraden und die Lage im Koordinatensystem	90
3.4	In welcher Situation ist welche Ebenenform zu empfehlen?	91
3.5	Umwandlungen der Ebenenformen	92
4	Gegenseitige Lage	94
4.1	Ebene-Gerade	94
4.2	Ebene-Ebene	96
5	Schnittwinkel	99
6	Abstandsberechnungen	100
7	Spiegelungen	106
III.	Grundlagen Stochastik (Mindmap)	108
1	Baumdiagramm, Pfadregeln und Erwartungswert	110
1.1	Einführung	110
1.2	Aufgabentypen	113
1.3	Zufallsgröße, Erwartungswert und Standardabweichung	116
2	Bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit, Vierfeldertafel	120
2.1	Bedingte Wahrscheinlichkeit	120
2.2	Unabhängigkeit	122
2.3	Vierfeldertafel	123
2.4	Zusammenhänge und Vernetzung	124
3	Binomialverteilung	130
3.1	Bernoulliformel	130
2.2	Binomialverteilung und kumulierte Binomialverteilung	132
3.3	Aufgabentypen	134
3.4	Erwartungswert und Standardabweichung	139
4	Normalverteilung	140
4.1	Unterschied zur Binomialverteilung	140
4.2	Normalverteilung und Gaußsche Glockenkurve	140
4.3	Aufgabentypen	142

Vorwort

Liebe Schülerinnen und Schüler,

dieses Buch und die Videos sollen Sie dabei unterstützen,

- sich in den letzten beiden Schuljahren optimal auf Klausuren und auf das **mündliche Abitur** in Mathematik vorzubereiten.
- sich alle Lehrplaninhalte anhand verständlicher und übersichtlicher Stoffzusammenfassungen anzueignen.
- durch Erfolge neue Motivation für das Fach Mathematik zu bekommen.

Liebe Fachkolleginnen und Fachkollegen,

dieses Buch und die Videos sollen Sie dabei unterstützen,

- die zeitintensive Stoffwiederholung, Klausur- und Abiturvorbereitung teilweise aus dem Unterricht auslagern zu können.
- auf diese Weise mehr Zeit für verständnisorientierten Unterricht zu gewinnen.
- sicherzustellen, dass Ihre Schülerinnen und Schüler über ausreichendes Basiswissen verfügen.

NEU

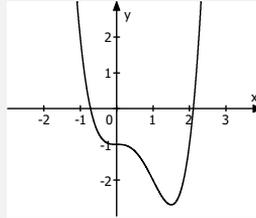
Über **60 Videos** des Autors, in welchen alle Stoffzusammenfassungen nochmals erklärt werden. Zugriff über Kurzadresse oder QR-Code aus dem Buch.

Mindmaps zu Beginn des jeweiligen Kapitels.

**Ganzrationale
Funktion**

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 1$$

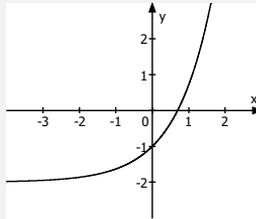
(S. 8)



Exponentialfunktion

$$f(x) = e^x - 2$$

(S. 12)

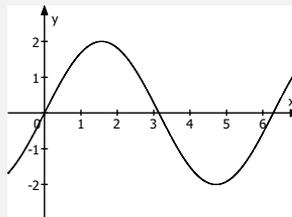


Funktionstypen

**Trigonometrische
Funktion**

$$f(x) = 2 \cdot \sin(x)$$

(S. 14)



Analysis Funktionen

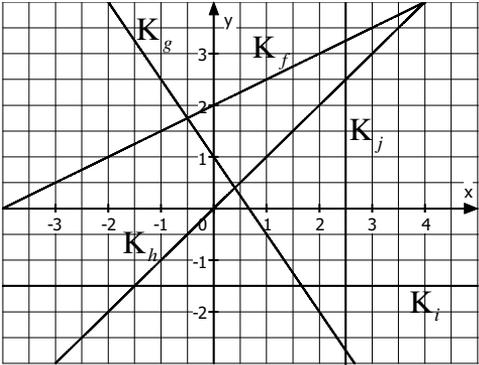
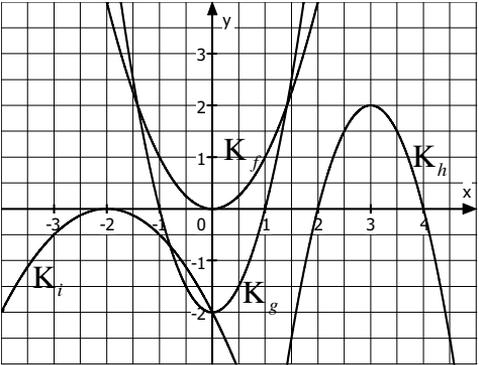
Nullstellenansatz
 $f(x) = (x+1)^2 \cdot (x-1)$
(S. 10)

Symmetrie
...zur y-Achse
...zum Ursprung
(S.18)

Spiegeln, Strecken
und Verschieben
(S.16)

1. Funktionen

1.1 Ganzrationale Funktionen (Polynome)

1. Grades (Geraden)	2. Grades (Parabeln)
<p>Hauptform: $y = mx + b$</p> <p>Vorgehen zum Einzeichnen: $y = \frac{\text{hoch} / \text{runter}}{\text{rechts}} \cdot x + \text{y-Achsen- abschnitt}$</p> <p>Steigung aus 2 Punkten: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$</p> <p>Steigungswinkel aus Steigung bestimmen: $m = \tan(\alpha)$</p> <p>Parallele Geraden: $m_1 = m_2$ (gleiche Steigung)</p> <p>Senkrechte (orthogonale) Geraden: Steigungen sind negative Kehrwerte voneinander: $m_2 = -\frac{1}{m_1}$ bzw. $m_1 \cdot m_2 = -1$</p> <p>1. Winkelhalbierende: $y = x$ ($m = 1$) 2. Winkelhalbierende: $y = -x$ ($m = -1$)</p>  <p> $K_f: y = \frac{1}{2}x + 2$ $K_g: y = -\frac{3}{2}x + 1$ $K_h: y = x$ (1. Winkelhalbierende) $K_i: y = -1,5$ $K_j: x = 2,5$ </p>	<p>Allg.: $f(x) = ax^2 + bx + c$</p> <p>Scheitelpunkt-Ansatz: $f(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$ mit $S(x_s y_s)$</p> <p>$a > 0$: nach oben geöffnet bzw. Verlauf von II nach I</p> <p>$a < 0$: nach unten geöffnet bzw. Verlauf von III nach IV</p> <p>Schnittpunkt mit y-Achse: $S_y(0 c)$</p> <p>Bei Symmetrie zur y-Achse: $f(x) = ax^2 + c$ (nur gerade Hochzahlen)</p>  <p> $K_f: f(x) = x^2$ $K_g: g(x) = 2x^2 - 2$ $K_h: h(x) = -2(x - 3)^2 + 2$ $K_i: i(x) = -0,5x^2 - 2x - 2$ </p>



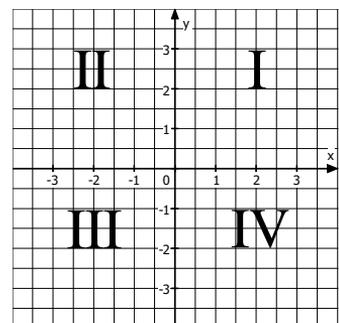
3. Grades	4. Grades
<p>Allg.: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$</p> <p>$a > 0$: Verlauf von III nach I</p> <p>$a < 0$: Verlauf von II nach IV</p> <p>Schnittpunkt mit y-Achse: $S_y(0 d)$</p> <p>Ansatz bei Symmetrie zum Ursprung: $f(x) = ax^3 + cx$ (nur ungerade Hochzahlen)</p>	<p>Allg.: $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$</p> <p>$a > 0$: Verlauf von II nach I</p> <p>$a < 0$: Verlauf von III nach IV</p> <p>Schnittpunkt mit y-Achse: $S_y(0 e)$</p> <p>Ansatz bei Symmetrie zur y-Achse: $f(x) = ax^4 + cx^2 + e$ (nur gerade Hochzahlen)</p>
<p>$K_f: f(x) = x^3 - x^2 + 2$</p> <p>$K_g: g(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{4}x$</p> <p>$K_h: h(x) = -x^3 + 5x^2 - 7x + 3$</p>	<p>$K_f: f(x) = x^4$</p> <p>$K_g: g(x) = 0,5x^4 - 2x^2 + 3$</p> <p>$K_h: h(x) = -x^4 + 2x^3 - 1$</p>

Tipp (für alle ganzrationalen Funktionen)

$a > 0$: Verlauf von ... nach **I** („endet **oben**“)

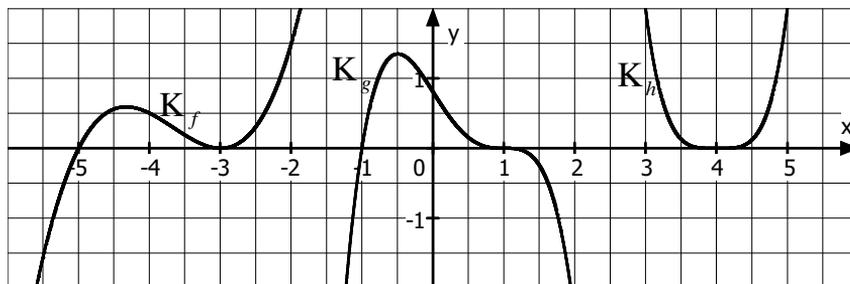
$a < 0$: Verlauf von ... nach **IV** („endet **unten**“)

Die Quadranten



1.2 Der Nullstellenansatz und die Vielfachheit von Nullstellen

Beispiele



$K_f: f(x) = 0,5 \cdot (x+5) \cdot (x+3)^2$ $K_g: g(x) = -0,8 \cdot (x+1) \cdot (x-1)^3$ $K_h: h(x) = 2 \cdot (x-4)^4$

Aufbau des Nullstellenansatzes (am Beispiel)

$$g(x) = -0,8 \cdot (x+1) \cdot (x-1)^3$$

Verlauf von III nach IV $x_0 = -1$ ist einfache Nullstelle $x_{1/2/3} = +1$ ist dreifache Nullstelle

Übersicht (für ganzrationale Funktionen)

Vielfachheit Nullstelle	Faktor im Nullstellenansatz	Skizze	Beschreibung
Einfache Nullstelle: x_0	$f(x) = \dots \cdot (x - x_0) \cdot \dots$		Schaubild schneidet x-Achse (mit Vorzeichenwechsel VZW)
Doppelte Nullstelle: x_0	$f(x) = \dots \cdot (x - x_0)^2 \cdot \dots$		Schaubild berührt x-Achse (ohne VZW)
Dreifache Nullstelle: x_0	$f(x) = \dots \cdot (x - x_0)^3 \cdot \dots$		Schaubild schneidet und berührt x-Achse (mit VZW)
Vierfache Nullstelle: x_0	$f(x) = \dots \cdot (x - x_0)^4 \cdot \dots$		Schaubild berührt x-Achse (ohne VZW) („breiter“ geformt als doppelte Nullstelle)



Beispiel

Gesucht ist der Funktionsterm zum nebenstehenden Schaubild.

Lösung

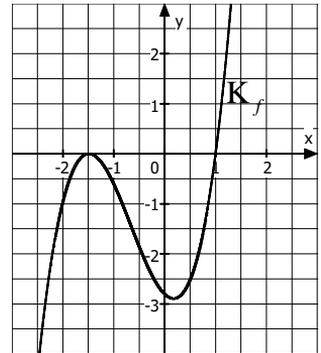
Da die Nullstellen ($x_{1/2} = -1,5$; $x_3 = 1$) des Schaubildes ablesbar sind, kann der Nullstellenansatz der Funktion weitgehend aufgestellt werden:

$$f(x) = a \cdot (x + 1,5)^2 \cdot (x - 1)$$

Dann werden die Koordinaten eines weiteren Punktes, der kein Schnittpunkt mit der x -Achse ist, eingesetzt:

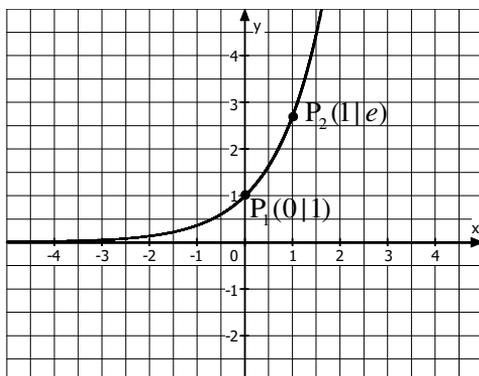
$$\begin{aligned} P(0,5 | -2,5): \quad f(x) &= a \cdot (x + 1,5)^2 \cdot (x - 1) \\ -2,5 &= a \cdot (0,5 + 1,5)^2 \cdot (0,5 - 1) \\ -2,5 &= -2a \\ \frac{5}{4} &= a \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{5}{4} \cdot (x + 1,5)^2 \cdot (x - 1)$$

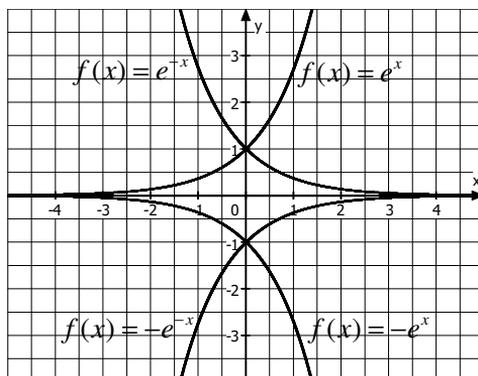


1.3 Exponentialfunktionen

1. Verlauf : $f(x) = e^x$



2. Spiegelungen



3. Koeffizienten in : $f(x) = a \cdot e^{b(x-c)} + d$

- | | |
|---|---|
| a - Streckung / Stauchung in y-Richtung | $a > 1$: „steiler“
$0 < a < 1$: „flacher“
$(a < 0$: an der x-Achse gespiegelt) |
| b - ansteigendes oder fallendes Schaubild | $b > 0$: ansteigendes Schaubild
$b < 0$: fallendes Schaubild
(bzw. an der y-Achse gespiegelt) |
| c - Verschiebung in x-Richtung | $c > 0$: nach rechts
$c < 0$: nach links |
| d - Verschiebung in y-Richtung
($y = d$ ist Asymptote) | $d > 0$: nach oben
$d < 0$: nach unten |

Vorsicht beim Koeffizienten c

Das Schaubild zu $f(x) = e^{x-3}$ wurde um 3 Einheiten nach *rechts* verschoben!

Der Koeffizient c hat hier den Wert $+3$, das Minuszeichen kommt vom allgemeinen Ansatz der Funktion.

Entsprechend $f(x) = e^{x+2}$: Verschiebung um 2 nach *links*!



4. Asymptoten (Naherungsgeraden)

Beispielfunktion	Asymptote	Schaubilder
$f(x) = e^x$	$y = 0$ (x -Achse) fur $x \rightarrow -\infty$	
$g(x) = e^x + 2,7$	$y = 2,7$ fur $x \rightarrow -\infty$	
$h(x) = e^{-x} + 1,5$	$y = 1,5$ fur $x \rightarrow +\infty$	
$i(x) = 2e^{-x-1} - 1,3$	$y = -1,3$ fur $x \rightarrow +\infty$	
$j(x) = -e^{x-1} - 2,6$	$y = -2,6$ fur $x \rightarrow -\infty$	

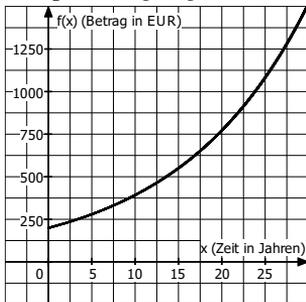
Regeln :

1. Asymptotengleichung : $y =$ „Exponentialgleichung ohne $e^{\dots x}$ “
2. Annaherungsrichtung : Bei e^{+x} fur $x \rightarrow -\infty$ bzw. bei e^{-x} fur $x \rightarrow +\infty$

5. Anwendungen

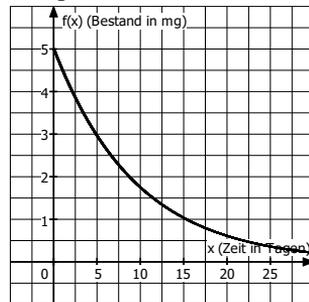
Wachstum mit $f(x) = e^{+x}$

Beispiel: Angelegter Geldbetrag vermehrt sich



Zerfall mit $f(x) = e^{-x}$

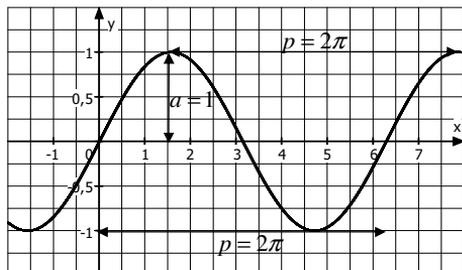
Beispiel: Chemischer Stoff zerfallt



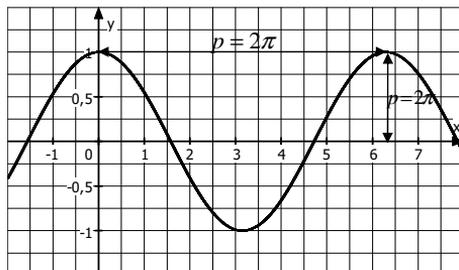
1.4 Trigonometrische Funktionen

1. Verlauf

$$f(x) = \sin(x)$$



$$f(x) = \cos(x)$$



2. Koeffizienten: $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x - c)) + d$ und $f(x) = a \cdot \cos(b \cdot (x - c)) + d$

a - Amplitude

($|a|$, also „Zahl a ohne Vorzeichen“, gibt max. Abstand zur „Mittellinie“ an)
(Streckung in y -Richtung)

($a < 0$: an der x -Achse gespiegelt)

$$\left(a = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2} \right)$$

b - entscheidet Periodenlänge

(„Dauer eines Durchlaufes“)

(Streckung in x -Richtung um $\frac{1}{b}$)

$$b = \frac{2\pi}{p} \quad \left(p \text{ entspricht der Periodenlänge} \right)$$

c - Verschiebung in x -Richtung

$c > 0$: nach rechts

$c < 0$: nach links

d - Verschiebung in y -Richtung

(„Höhe der Mittellinie“)

$d > 0$: nach oben

$d < 0$: nach unten

$$\left(d = \frac{y_{\max} + y_{\min}}{2} \right)$$

Vorsicht beim Koeffizienten c

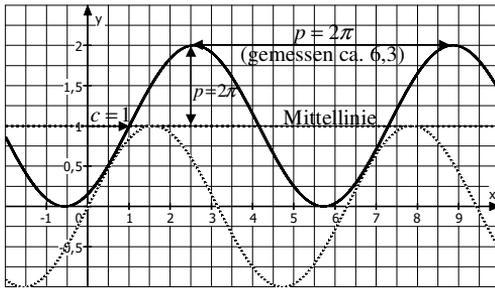
Das Schaubild zu $f(x) = \sin(x - 3)$ wurde um 3 Einheiten nach *rechts* verschoben!

Der Koeffizient c hat den Wert $+3$, das Minuszeichen kommt vom allgemeinen Ansatz der Funktion.

Entsprechend $f(x) = \sin(x + 2)$: Verschiebung um 2 nach *links*!



Beispiel 1 (Zusätzlich ist das Schaubild von $f(x) = \sin(x)$ gestrichelt eingezeichnet.)

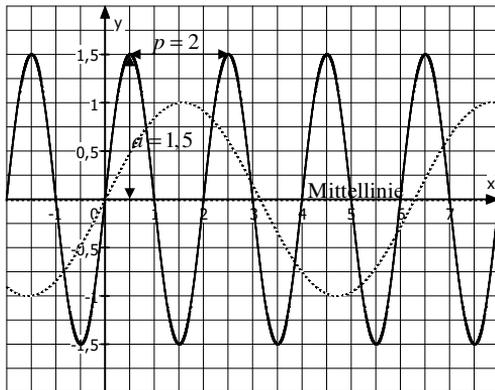


$\Rightarrow f(x) = \sin(x-1) + 1$
 (Alternativ: $f(x) = \cos(x-2,57) + 1$)

Mit $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x-c)) + d$:

- $d = 1$ Mittellinie auf Höhe +1
 (oder mit $\frac{2+0}{2} = \frac{2}{2} = 1$)
- $a = 1$ (max. Abstand von 1 zur Mittellinie) (oder mit $\frac{2-0}{2} = \frac{2}{2} = 1$)
- $c = 1$ Verschiebung um 1 nach rechts
- $b = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$

Beispiel 2



$\Rightarrow f(x) = 1,5 \cdot \sin(\pi \cdot x)$
 (Alternativ: $f(x) = 1,5 \cdot \cos(\pi \cdot (x-0,5))$)

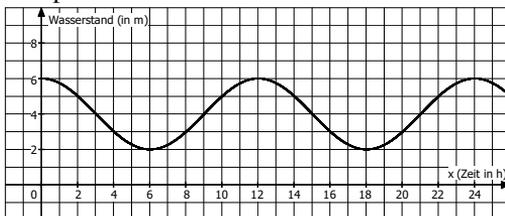
Mit $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x-c)) + d$:

- $d = 0$ Mittellinie auf Höhe 0
 (oder mit $\frac{1,5+(-1,5)}{2} = \frac{0}{2} = 0$)
- $a = 1,5$ max. Abstand von 1,5 zur Mittellinie (oder mit $\frac{1,5-(-1,5)}{2} = \frac{3}{2}$)
- $c = 0$ keine Verschiebung bei sin
- $b = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

3. Anwendungen

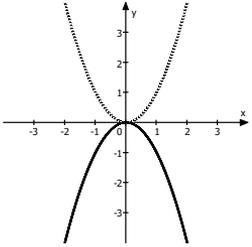
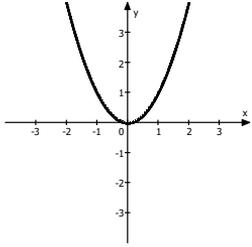
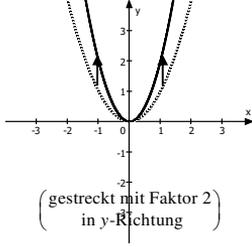
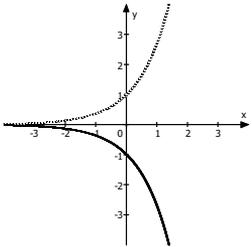
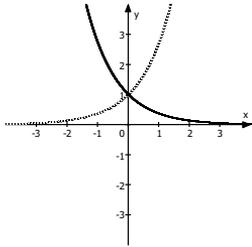
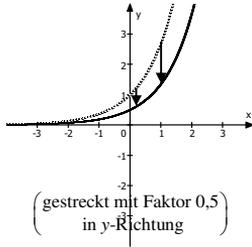
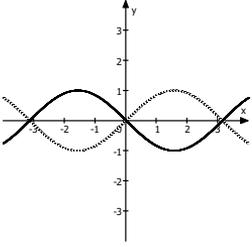
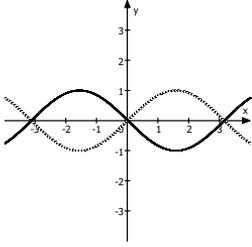
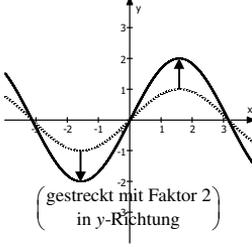
Periodische Vorgänge, also Vorgänge, die sich in gleichen Zeitabschnitten wiederholen, werden oft mit trigonometrischen Funktionen modelliert.

Beispiel: Wasserstand bei Ebbe und Flut



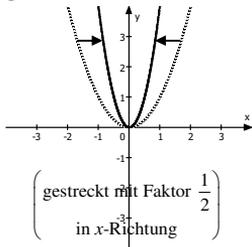
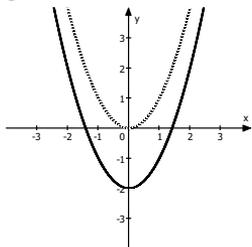
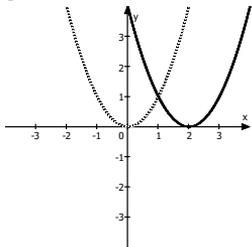
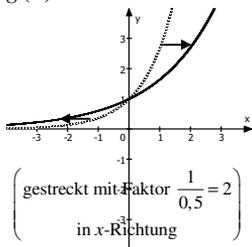
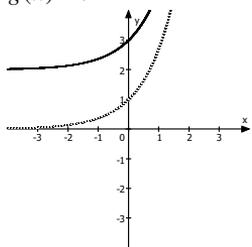
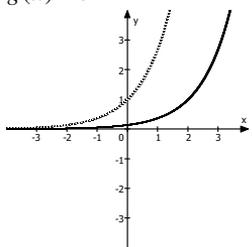
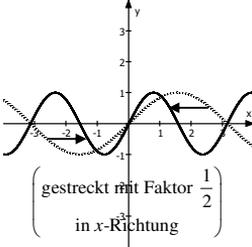
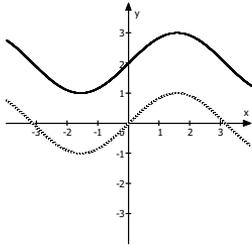
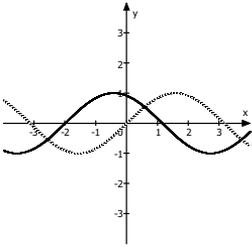
1.5 Übersicht: Spiegeln, Strecken und Verschieben

$f(x) \rightarrow$

	Spiegeln an ...		Strec-
	... x - Achse	... y - Achse	... y - Richtung
$f(x) = x^2$	$g(x) = -x^2$ 	$g(x) = (-x)^2 = x^2$ 	$g(x) = 2 \cdot x^2$  (gestreckt mit Faktor 2 in y-Richtung)
$f(x) = e^x$	$g(x) = -e^x$ 	$g(x) = e^{-x}$ 	$g(x) = 0,5 \cdot e^x$  (gestreckt mit Faktor 0,5 in y-Richtung)
$f(x) = \sin(x)$	$g(x) = -\sin(x)$ 	$g(x) = \sin(-x)$ 	$g(x) = 2 \cdot \sin(x)$  (gestreckt mit Faktor 2 in y-Richtung)
	$g(x) = -f(x)$ „-“ vor Funktionsterm	$g(x) = f(-x)$ „x“ durch „-x“ ersetzt	$g(x) = a \cdot f(x)$ Streckung mit Faktor $ a $ in y-Richtung



$$\rightarrow g(x) = a \cdot f(b \cdot (x - c)) + d$$

ken in ...	Verschieben in ...	
... x - Richtung	... y - Richtung	... x - Richtung
$g(x) = (2x)^2 = 4x^2$  <p>(gestreckt mit Faktor $\frac{1}{2}$ in x-Richtung)</p>	$g(x) = x^2 - 2$ 	$g(x) = (x - 2)^2$ 
$g(x) = e^{0,5x}$  <p>(gestreckt mit Faktor $\frac{1}{0,5} = 2$ in x-Richtung)</p>	$g(x) = e^x + 2$ 	$g(x) = e^{x-2}$ 
$g(x) = \sin(2x)$  <p>(gestreckt mit Faktor $\frac{1}{2}$ in x-Richtung)</p>	$g(x) = \sin(x) + 2$ 	$g(x) = \sin(x + 2)$ 
$g(x) = f(b \cdot x)$ <p>Streckung mit Faktor $\frac{1}{ b }$ in x-Richtung</p>	$g(x) = f(x) \pm d$ <p>z.B. $\dots + 2$: Versch. nach oben $\dots - 2$: Versch. nach unten</p>	$g(x) = f(x \pm c)$ <p>z.B. $(x - 2)$: V. nach rechts $(x + 2)$: V. nach links</p>