

Rosner

Mathe gut erklärt Abitur 2023

Baden-Württemberg
Leistungsfach Mathematik
Allgemeinbildende Gymnasien

9. Auflage



Inhaltsverzeichnis

I. Grundlagen Analysis	8
1 Funktionen (Mindmap)	8
1.1 Ganzrationale Funktionen (Polynome)	10
1.2 Der Nullstellenansatz und die Vielfachheit von Nullstellen	12
1.3 Gebrochenrationale Funktionen	14
1.4 Exponentialfunktionen	16
1.5 Trigonometrische Funktionen	18
1.6 Wurzelfunktion	20
1.7 Natürliche Logarithmusfunktion	20
1.8 Umkehrfunktion	21
1.9 Übersicht: Spiegeln, Strecken und Verschieben	22
1.10 Funktionenscharen	24
1.11 Symmetrie zur y-Achse bzw. zum Ursprung	26
1.12 Umgang mit Funktionen: Rechenansätze	27
2 Gleichungen (Mindmap)	28
2.1 Gleichungstypen: Übersicht	30
2.2 Gleichungstypen: Konkretes Lösungsvorgehen	32
2.3 Goldene Regeln zum Lösen von Gleichungen	40
2.4 Ungleichungen	42
2.5 Lineare Gleichungssysteme	44
3 Differenzialrechnung (Mindmap)	46
3.1 Ableitungsregeln	48
3.2 Tangente und Normale	51
3.3 Schnittpunkte (Berührungspunkt, senkrechter Schnitt, Schnittwinkel)	54
3.4 Monotonie	56
3.5 Krümmung	57
3.6 Extrempunkte (Hoch- und Tiefpunkte)	58
3.7 Wendepunkte	59
3.8 Sattelpunkte	60
3.9 Ortskurve (Zusatz)	64
3.10 Zusammenhang zwischen den Schaubildern von Funktion und Ableitung	66
3.11 Ermittlung von Funktionsgleichungen	68
3.12 Extremwertaufgaben	72
3.13 Wachstum und Zerfall	74
4 Integralrechnung (Mindmap)	70
4.1 Integrationsregeln („Aufleitungsregeln“)	78
4.2 Flächeninhaltsberechnung zwischen Schaubild und x-Achse	82
4.3 Flächeninhaltsberechnung zwischen zwei Schaubildern	84

4.4	Mittelwert (durchschnittlicher y -Wert) einer Funktion	88
4.5	Flächen, die bis ins Unendliche reichen (Uneigentliche Integrale)	90
4.6	Berechnung des Rotationsvolumens: Fläche zwischen Schaubild und x -Achse rotiert um die x -Achse	92
4.7	Berechnung des Rotationsvolumens: Fläche zwischen zwei Schaubildern rotiert um die x -Achse	93
4.8	Zusatz: Wichtiges für Anwendungsorientierte Aufgaben	94
II.	Grundlagen Vektorgeometrie (Mindmap)	98
1	Vorwissen	100
1.1	Punkte (im \mathbb{R}^3)	100
1.2	Vektoren (im \mathbb{R}^3)	100
1.3	Rechnen mit Vektoren (Addition, Subtraktion, Betrag, Skalare Multiplikation, Linearkombination, Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit, Skalarprodukt, Vektorprodukt)	101
2	Geraden	104
2.1	Geradengleichungen in Parameterform	104
2.2	Gegenseitige Lage von Geraden	106
3	Ebenen	108
3.1	Ebenengleichungen in Parameterform	108
3.2	Ebenengleichungen in Normalenform	110
3.3	Ebenengleichungen in Koordinatenform	112
3.4	Spurpunkte, Spurgeraden und die Lage im Koordinatensystem	114
3.5	Umwandlungen der Ebenenformen	115
4	Gegenseitige Lage	120
4.1	Ebene-Gerade	120
4.2	Ebene-Ebene	122
5	Schnittwinkel	125
6	Abstandsberechnungen	126
6.1	Abstände zu einem Punkt	127
6.2	Abstände zu einer Geraden	130
6.3	Abstände zu einer Ebene	132
7	Zusatz: Bewegungsaufgaben (Modellieren mit Vektoren)	134
8	Spiegelungen	136
9	Das Vektorprodukt zur Flächen- und Volumenberechnung	138
III.	Grundlagen Stochastik (Mindmap)	140
1	Baumdiagramm, Pfadregeln und Erwartungswert	142
1.1	Einführung	142

1.2	Aufgabentypen	145
1.3	Zufallsgröße, Erwartungswert und Standardabweichung	148
2	Bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit, Vierfeldertafel	152
2.1	Bedingte Wahrscheinlichkeit	152
2.2	Unabhängigkeit	154
2.3	Vierfeldertafel	155
2.4	Zusammenhänge und Vernetzung	156
3	Kombinatorik	162
3.1	Übersicht: Berechnung von Anzahlen und Wahrscheinlichkeiten	162
3.2	Beispielaufgaben	164
4	Binomialverteilung	166
4.1	Bernoulliformel	166
4.2	Binomialverteilung und kumulierte Binomialverteilung	168
4.3	Aufgabentypen	170
4.4	Erwartungswert und Standardabweichung	177
5	Der einseitige Hypothesentest	178
5.1	Ausführliche Erklärung	178
5.2	Vorgehen und Beispiele	179
5.3	Fehler 1. Art und 2. Art	182
5.4	Zweiseitiger Hypothesentest	186
6	Normalverteilung	188
6.1	Unterschied zur Binomialverteilung	188
6.2	Normalverteilung und Gaußsche Glockenkurve	188
6.3	Aufgabentypen	190

Vorwort

Liebe Schülerinnen und Schüler,

dieses Buch und die Videos sollen Sie dabei unterstützen,

- sich in den letzten beiden Schuljahren optimal auf Klausuren und auf das Abitur in Mathematik vorzubereiten.
- sich alle Lehrplaninhalte anhand verständlicher und übersichtlicher Stoffzusammenfassungen anzueignen.
- die Abitursaufgaben der vergangenen Jahrgänge zu bearbeiten, da Sie hiermit ein Nachschlagewerk zur Verfügung haben.
- durch Erfolge neue Motivation für das Fach Mathematik zu bekommen.

Liebe Fachkolleginnen und Fachkollegen,

dieses Buch und die Videos sollen Sie dabei unterstützen,

- die zeitintensive Stoffwiederholung, Klausur- und Abiturvorbereitung teilweise aus dem Unterricht auslagern zu können.
- auf diese Weise mehr Zeit für verständnisorientierten Unterricht zu gewinnen.
- sicherzustellen, dass Ihre Schülerinnen und Schüler über ausreichendes Basiswissen verfügen.

NEU

Mindmaps zu Beginn des jeweiligen Kapitels.

Liebe Schülerinnen und Schüler,

über Fragen oder Anregungen zu den Inhalten dieses Buches freue ich mich sehr.

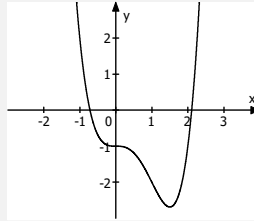
Stefan Rosner

(stefan_rosner@hotmail.com)

Ganzrationale
Funktion

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 1$$

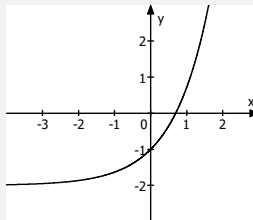
(S. 10)



Gebrochenrationale
Funktion

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2}$$

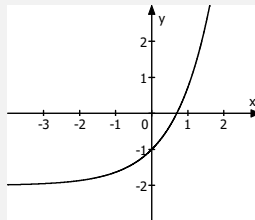
(S. 14)



Exponentialfunktion

$$f(x) = e^x - 2$$

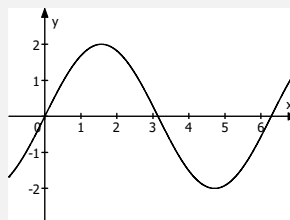
(S. 16)



Trigonometrische
Funktion

$$f(x) = 2 \cdot \sin(x)$$

(S. 18)



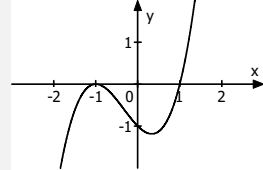
Funktionstypen

Analysis Funktionen

Nullstellenansatz

$$f(x) = (x+1)^2 \cdot (x-1)$$

(S. 12)

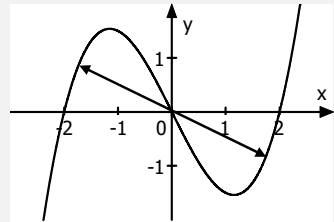


Symmetrie

...zur y-Achse

...zum Ursprung

(S. 26)



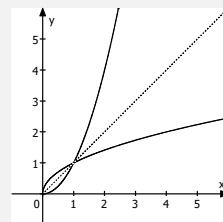
Spiegeln, Strecken
und Verschieben
(S. 22)

Umkehrfunktion

$$f(x) = x^2$$

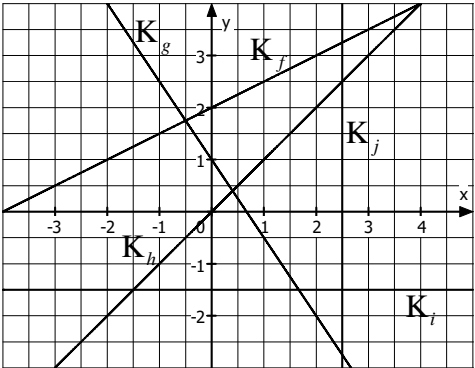
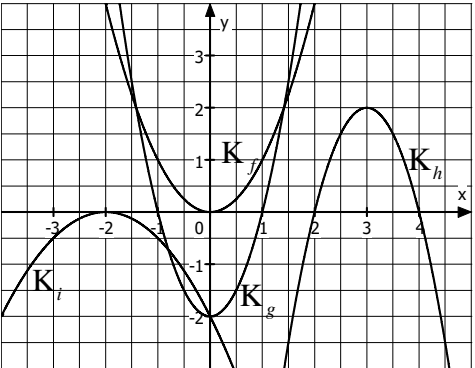
$$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

(S. 21)

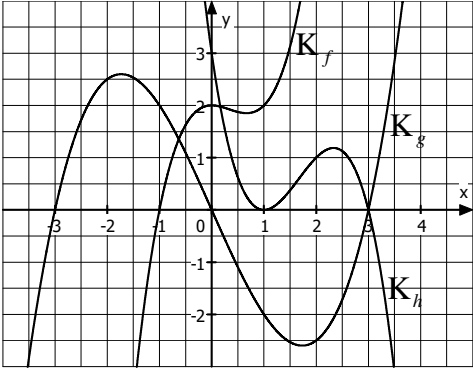
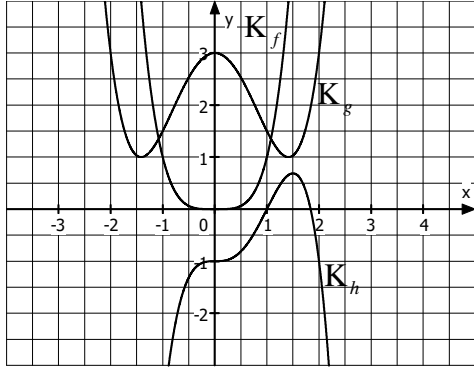


1. Funktionen

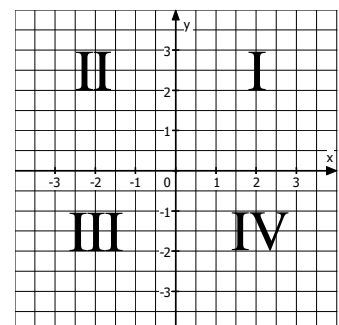
1.1 Ganzrationale Funktionen (Polynome)

1. Grades (Geraden)	2. Grades (Parabeln)
<p>Hauptform : $y = mx + b$</p> <p>Vorgehen zum Einzeichnen: $y = \frac{\text{hoch / runter}}{\text{rechts}} \cdot x + \text{y-Achsen- abschnitt}$</p> <p>Steigung aus 2 Punkten: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$</p> <p>Steigungswinkel aus Steigung bestimmen: $m = \tan(\alpha)$</p> <p>Parallele Geraden: $m_1 = m_2$ (gleiche Steigung)</p> <p>Senkrechte (orthogonale) Geraden: Steigungen sind negative Kehrwerte voneinander: $m_2 = -\frac{1}{m_1}$ bzw. $m_1 \cdot m_2 = -1$</p> <p>1. Winkelhalbierende: $y = x$ ($m = 1$) 2. Winkelhalbierende: $y = -x$ ($m = -1$)</p>  <p> $K_f: y = \frac{1}{2}x + 2$ $K_g: y = -\frac{3}{2}x + 1$ $K_h: y = x$ (1. Winkelhalbierende) $K_i: y = -1,5$ $K_j: x = 2,5$ </p>	<p>Allg.: $f(x) = ax^2 + bx + c$</p> <p>Scheitelpunkt-Ansatz: $f(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$ mit $S(x_s y_s)$</p> <p>$a > 0$: nach oben geöffnet bzw. Verlauf von II nach I</p> <p>$a < 0$: nach unten geöffnet bzw. Verlauf von III nach IV</p> <p>Schnittpunkt mit y-Achse: $S_y(0 c)$</p> <p>Bei Symmetrie zur y-Achse: $f(x) = ax^2 + c$ (nur gerade Hochzahlen)</p>  <p> $K_f: f(x) = x^2$ $K_g: g(x) = 2x^2 - 2$ $K_h: h(x) = -2(x - 3)^2 + 2$ $K_i: i(x) = -0,5x^2 - 2x - 2$ </p>



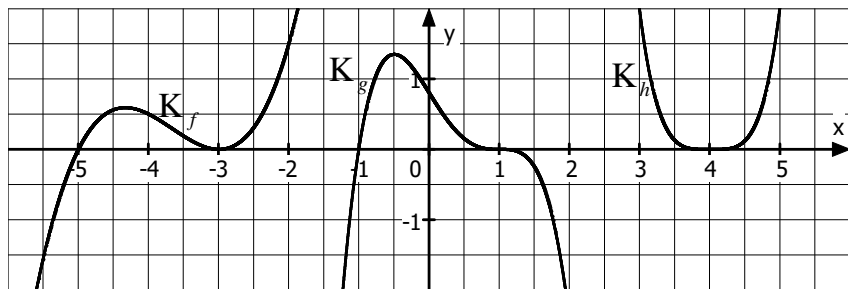
3. Grades	4. Grades
<p>Allg.: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$</p> <p>$a > 0$: Verlauf von III nach I</p> <p>$a < 0$: Verlauf von II nach IV</p> <p>Schnittpunkt mit y-Achse: $S_y(0 d)$</p> <p>Ansatz bei Symmetrie zum Ursprung: $f(x) = ax^3 + cx$ (nur ungerade Hochzahlen)</p>  <p>$K_f: f(x) = x^3 - x^2 + 2$</p> <p>$K_g: g(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{4}x$</p> <p>$K_h: h(x) = -x^3 + 5x^2 - 7x + 3$</p>	<p>Allg.: $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$</p> <p>$a > 0$: Verlauf von II nach I</p> <p>$a < 0$: Verlauf von III nach IV</p> <p>Schnittpunkt mit y-Achse: $S_y(0 e)$</p> <p>Ansatz bei Symmetrie zur y-Achse: $f(x) = ax^4 + cx^2 + e$ (nur gerade Hochzahlen)</p>  <p>$K_f: f(x) = x^4$</p> <p>$K_g: g(x) = 0,5x^4 - 2x^2 + 3$</p> <p>$K_h: h(x) = -x^4 + 2x^3 - 1$</p>

Die Quadranten



1.2 Der Nullstellenansatz und die Vielfachheit von Nullstellen

Beispiele



$$K_f: f(x) = 0,5 \cdot (x+5) \cdot (x+3)^2 \quad K_g: g(x) = -0,8 \cdot (x+1) \cdot (x-1)^3 \quad K_h: h(x) = 2 \cdot (x-4)^4$$

Aufbau des Nullstellenansatzes (am Beispiel)

$$g(x) = -0,8 \cdot (x+1) \cdot (x-1)^3$$

Verlauf von III nach IV \nearrow $x_0 = -1$ ist einfache Nullstelle \nwarrow $x_{1/2/3} = +1$ ist dreifache Nullstelle

Übersicht (für ganzrationale Funktionen)

Vielfachheit Nullstelle	Faktor im Nullstellenansatz	Skizze	Beschreibung
Einfache Nullstelle: x_0	$f(x) = \dots \cdot (x - x_0) \cdot \dots$		Schaubild schneidet x-Achse (mit Vorzeichenwechsel VZW)
Doppelte Nullstelle: x_0	$f(x) = \dots \cdot (x - x_0)^2 \cdot \dots$		Schaubild berührt x-Achse (ohne VZW)
Dreifache Nullstelle: x_0	$f(x) = \dots \cdot (x - x_0)^3 \cdot \dots$		Schaubild schneidet und berührt x-Achse (mit VZW)
Vierfache Nullstelle: x_0	$f(x) = \dots \cdot (x - x_0)^4 \cdot \dots$		Schaubild berührt x-Achse (ohne VZW) („breiter“ geformt als doppelte Nullstelle)



Beispiel

Gesucht ist der Funktionsterm zum nebenstehenden Schaubild.

Lösung

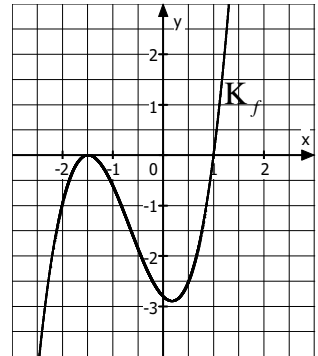
Da die Nullstellen ($x_{1/2} = -1,5$; $x_3 = 1$) des Schaubildes ablesbar sind, kann der Nullstellenansatz der Funktion weitgehend aufgestellt werden:

$$f(x) = a \cdot (x + 1,5)^2 \cdot (x - 1)$$

Dann werden die Koordinaten eines weiteren Punktes, der kein Schnittpunkt mit der x -Achse ist, eingesetzt:

$$\begin{aligned} P(0,5 | -2,5): \quad f(x) &= a \cdot (x + 1,5)^2 \cdot (x - 1) \\ -2,5 &= a \cdot (0,5 + 1,5)^2 \cdot (0,5 - 1) \\ -2,5 &= -2a \\ \frac{5}{4} &= a \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{5}{4} \cdot (x + 1,5)^2 \cdot (x - 1)$$



1.3 Gebrochenrationale Funktionen

Allg. $f(x) = \frac{\text{(ganzrationale) Funktion}}{\text{(ganzrationale) Funktion}}$ Beispiel: $f(x) = \frac{-2x^2 + 3x}{x+2}$ (mit $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$)

1. Untersuchung auf senkrechte Asymptoten

x -Werte, die im **Nenner** zum **Wert 0** führen, nennt man **Definitionslücken**. Solche x -Werte sind nicht in der Definitionsmenge der Funktion enthalten.

An einer Definitionslücke kann das Schaubild eine **senkrechte Asymptote** aufweisen.

(Hinweis: Asymptote = Näherungsgerade)

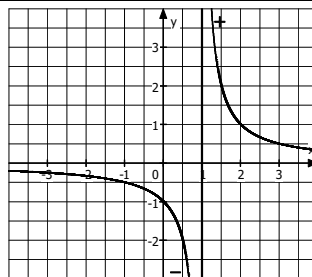
Fall 1 : Polstelle mit Vorzeichenwechsel (einfache Nullstelle des Nenners)

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{x-1}$ (mit $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$)

Senkrechte Asymptote: $x = 1$

Für $x \rightarrow 1$ ($x < 1$) gilt: $f(x) \rightarrow -\infty$

Für $x \rightarrow 1$ ($x > 1$) gilt: $f(x) \rightarrow +\infty$



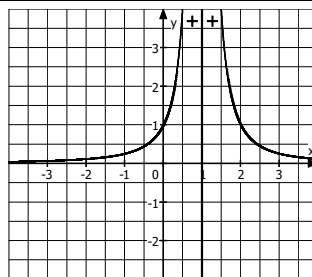
Fall 2 : Polstelle ohne Vorzeichenwechsel (doppelte Nullstelle des Nenners)

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ (mit $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$)

Senkrechte Asymptote: $x = 1$

Für $x \rightarrow 1$ ($x < 1$) gilt: $f(x) \rightarrow +\infty$

Für $x \rightarrow 1$ ($x > 1$) gilt: $f(x) \rightarrow +\infty$



Hinweise

- x -Werte, für die der **Nenner** gleich **0** ist sind **Definitionslücken** $\left(\frac{\dots}{0} = ?\right)$
- x -Werte, für die der **Zähler** gleich **0** ist sind **Nullstellen** $\left(\frac{0}{\dots} = 0\right)$

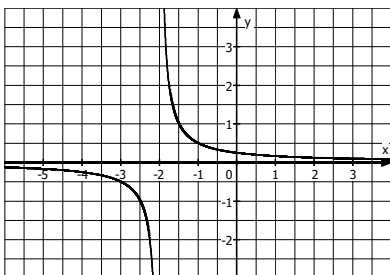


2. Untersuchung auf waagrechte Asymptoten (Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$)

Fall 1: Zählergrad < Nennergrad : x - Achse ist waagrechte Asymptote

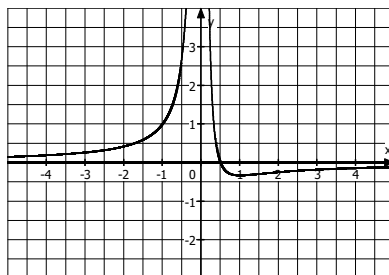
$$f(x) = \frac{1}{2x+4} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Grad 0} \\ \text{Grad 1} \end{array} \right)$$

waagrechte Asymptote: $y = 0$ (x -Achse)



$$f(x) = \frac{-2x+1}{3x^2} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Grad 1} \\ \text{Grad 2} \end{array} \right)$$

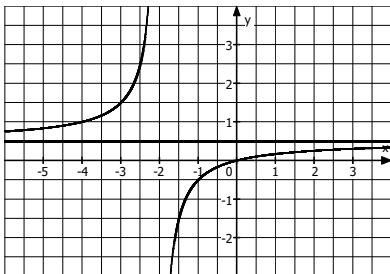
waagrechte Asymptote: $y = 0$ (x -Achse)



Fall 2: Zählergrad = Nennergrad : Waagrechte Asymptote, jedoch nicht x -Achse

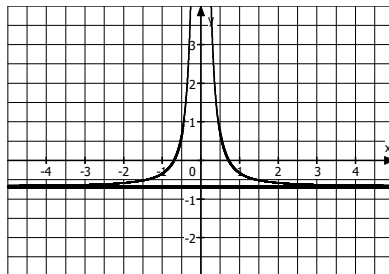
$$f(x) = \frac{1x}{2x+4} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Grad 1} \\ \text{Grad 1} \end{array} \right)$$

waagrechte Asymptote: $y = \frac{1}{2}$



$$f(x) = \frac{-2x^2+1}{3x^2} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Grad 2} \\ \text{Grad 2} \end{array} \right)$$

waagrechte Asymptote: $y = -\frac{2}{3}$

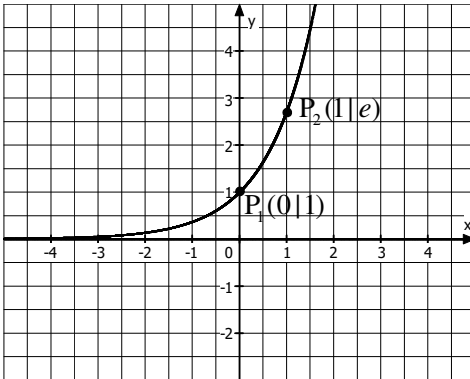


Fall 3: Zählergrad > Nennergrad: Keine waagrechte Asymptote.

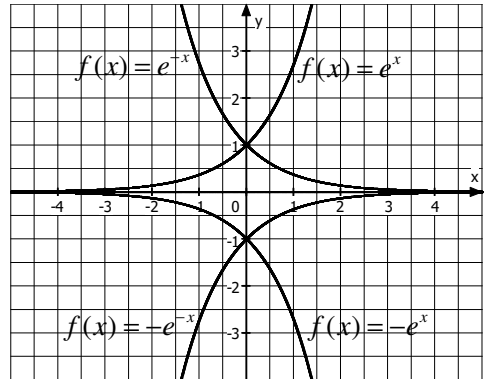
(Keine Beispiele, da nicht relevant für das Abitur.)

1.4 Exponentialfunktionen

1. Verlauf : $f(x) = e^x$



2. Spiegelungen



3. Koeffizienten in : $f(x) = a \cdot e^{b(x-c)} + d$

a - Streckung / Stauchung in y-Richtung

$a > 1$: „steiler“

$0 < a < 1$: „flacher“

$(a < 0$: an der x-Achse gespiegelt)

b - ansteigendes oder fallendes Schaubild

$b > 0$: ansteigendes Schaubild

$b < 0$: fallendes Schaubild

(bzw. an der y-Achse gespiegelt)

c - Verschiebung in x-Richtung

$c > 0$: nach rechts

$c < 0$: nach links

d - Verschiebung in y-Richtung

$d > 0$: nach oben

($y = d$ ist Asymptote)

$d < 0$: nach unten

Vorsicht beim Koeffizienten c

Das Schaubild zu $f(x) = e^{x-3}$ wurde um 3 Einheiten nach *rechts* verschoben!

Der Koeffizient c hat hier den Wert +3, das Minuszeichen kommt vom allgemeinen Ansatz der Funktion.

Entsprechend $f(x) = e^{x+2}$: Verschiebung um 2 nach *links*!



4. Asymptoten (Näherungsgeraden)

Beispielfunktion	Asymptote	Schaubilder
$f(x) = e^x$	$y = 0$ (x -Achse) für $x \rightarrow -\infty$	
$g(x) = e^x + 2,7$	$y = 2,7$ für $x \rightarrow -\infty$	
$h(x) = e^{-x} + 1,5$	$y = 1,5$ für $x \rightarrow +\infty$	
$i(x) = 2e^{-x-1} - 1,3$	$y = -1,3$ für $x \rightarrow +\infty$	
$j(x) = -e^{x-1} - 2,6$	$y = -2,6$ für $x \rightarrow -\infty$	

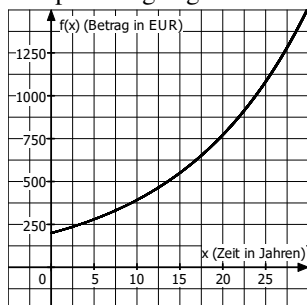
Regeln :

1. Asymptotengleichung : $y =$ „Exponentialgleichung ohne $e^{\dots x}$ “
2. Annäherungsrichtung : Bei e^{+x} für $x \rightarrow -\infty$ bzw. bei e^{-x} für $x \rightarrow +\infty$

5. Anwendungen

Wachstum mit $f(x) = e^{+x}$

Beispiel: Angelegter Geldbetrag vermehrt sich



Zerfall mit $f(x) = e^{-x}$

Beispiel: Chemischer Stoff zerfällt

