Gruber I Neumann

Erfolg im Mathe-Abi 2022

40 Prüfungskarten-Sets
für die Mündliche Prüfung
im Basisfach Mathematik
Baden-Württemberg
mit Tipps und Lösungen

Freiburger Verlag

Vorwort

Im Basisfach Mathematik gibt es ab der Abiturprüfung 2021 nur noch eine mündliche Prüfung, die aus zwei Prüfungsteilen besteht.

Dieses Buch enthält 40 Aufgaben für den ersten Prüfungsteil aus den Gebieten Analysis, Geometrie und Stochastik, die meisten Aufgaben sind aber auch für das Prüfungsgespräch im zweiten Prüfungsteil geeignet.

Das vorliegende Buch fördert das Grundwissen und die Grundkompetenzen in Mathemtik, vom einfachen Rechnen und Formelanwenden bis hin zum Verstehen von gedanklichen Zusammenhängen. Das Buch ist eine Hilfe zum Selbstlernen (learning by doing) und bietet die Möglichkeit, sich intensiv auf die mündliche Prüfung vorzubereiten.

Der Ablauf der mündlichen Prüfung

Sie erhalten Aufgaben aus einem Sachgebiet (Analysis, Geometrie oder Stochastik) für den ersten Prüfungsteil (den Vortrag) und haben 20 Minuten Zeit zur Vorbereitung. Je nach Aufgabe sind ein wissenschaftlicher Taschenrechner und die Merkhilfe zur Vorbereitung erlaubt.

Der erste Prüfungsteil dauert 10 Minuten. Hier stellen Sie dar, wie Sie die Aufgabe gelöst haben. Dabei dürfen Sie die 10 Minuten komplett nutzen, Fragen und Unterbrechungen seitens der LehrerInnen sind nicht erlaubt.

Für den zweiten Prüfungsteil (das Kolloquium) erhalten Sie eine weitere Aufgabe bzw. einen Impuls aus einem anderen Sachgebiet. Diese Aufgabe «bearbeiten» Sie im Rahmen eines Prüfungsgesprächs, d.h. einem Wechselspiel aus Frage und Antwort. Die Fragen werden auf unterschiedlichen Niveaus gestellt werden.

Vorbereitungszeit	Prüfungsteil 1 Vortrag	Prüfungsteil 2 Prüfungsgespräch
20 Minuten	10 Minuten	10 Minuten

Zeit

Insgesamt gilt: Eine der beiden Aufgaben kommt in jedem Fall aus dem Sachgebiet Analysis, die andere entweder aus der Geometrie oder der Stochastik. Damit sind folgende Kombinationen möglich: Analysis-Geometrie, Analysis-Stochastik, Geometrie-Analysis, Stochastik-Analysis.

Wie arbeitet man mit diesem Buch?

In diesem Buch finden Sie 40 Prüfungskarten-Sets. Diese können im Buch bleiben oder herausgetrennt werden, um besser mit ihnen zu arbeiten.

Jeweils 2 Karten gehören zusammen. Auf der ersten Karte finden Sie eine Aufgabe. Nehmen Sie sich 20 Minuten Zeit zum Bearbeiten dieser Aufgabe und schreiben Sie den Lösungsweg dazu auf. In der Regel wird dieser Aufschrieb mit einer Dokumentenkamera an einer Projektionsfläche gezeigt werden. Versuchen Sie also, diesen Aufschrieb so ausführlich und strukturiert zu machen, dass Sie ihre Gedankengänge gut darstellen können. Sollten Sie keinen Ansatz haben, wie eine Aufgabe zu lösen ist, können Sie auch einen Blick auf die Tipps auf der Rückseite der Karten werfen.

Nach Ablauf der 20 Minuten nehmen Sie Ihren Aufschrieb und halten einen «Vortrag» über das Thema. Optimal ist es, wenn Sie einen Partner mit der Lösungskarte haben, der Ihren Vortrag bewerten kann. Ansonsten können Sie ihn auch halten und im Anschluss die Lösung kontrollieren.

Sie können den Vortrag auch mit dem Smartphone filmen und ihn danach anschauen. Das fühlt sich beim ersten Mal sehr komisch an, aber so können Sie am besten prüfen, wo Sie sich noch verbessern können.

Wie wird die Prüfung bewertet?

Es gibt in der Mathematik drei verschiedene Anforderungsbereiche:

- Anforderungsbereich I: Reproduzieren
- Anforderungsbereich II: Zusammenhänge herstellen
- Anforderungsbereich III: Verallgemeinern und Reflektieren

Es werden Fragen aus allen drei Anforderungsbereichen gestellt.
Eine Bewertung mit «gut» (11 Punkte) setzt voraus, dass Leistungen aus allen drei Anforderungsbereichen erbracht wurden. Eine Bewertung mit «ausreichend» (05 Punkte) setzt voraus, dass über den Anforderungsbereich I hinaus auch Leistungen in einem weiteren Anforderungsbereich erbracht wurden.

Die Aufgabenteile a) und teilweise b) sind in der Regel aus dem Anforderungsbereich I, die Aufgabenteile b) und c) aus dem Anforderungsbereich II und die Aufgabenteile d) und e) aus dem Anforderungsbereich III.

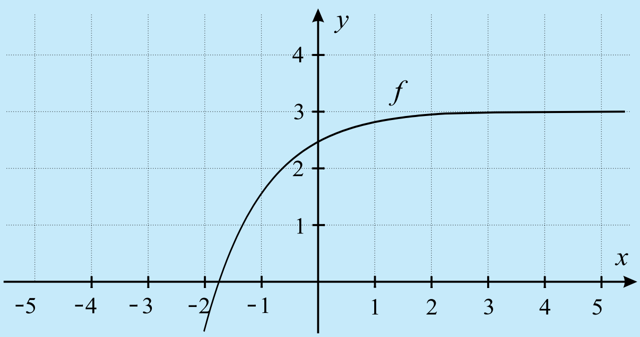
Allen Schülerinnen und Schülern, die sich auf das Abitur vorbereiten, wünschen wir viel Erfolg.

Helmut Gruber und Robert Neumann

Analysis A 1

Vorbereitungszeit: 20 Minuten, erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner (WTR), Merkhilfe

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = 3 - \frac{1}{2} \cdot e^{-x}$; $x \in \mathbb{R}$. Ihr Graph sei K_f.



a) Berechnen Sie die Schnittpunkte von K_f mit den Koordinatenachsen und bestimmen Sie die Gleichung der Asymptote von K_f.

b) Beschreiben Sie, wie K_f aus dem Graphen der Funktion e^x hervorgegangen ist. Begründen Sie, dass f streng monoton wachsend ist.

c) Erläutern Sie, wie man den Flächeninhalt der Fläche zwischen dem Graphen von f, der Geraden mit der Gleichung $y = 3$, der y-Achse und der Geraden $x = 4$ bestimmen kann.

d) Die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ ist eine Tangente an K_f. Beschreiben Sie, wie man die Koordinaten des zugehörigen Berührpunkts B erhalten kann.

e) Beurteilen Sie folgende Aussage: «Es gibt ganzrationale Funktionen vierten Grades, deren Graphen drei Wendepunkte besitzen».

Tipps A 1

a) Den Schnittpunkt S von K_f mit der y-Achse erhalten Sie, indem Sie $x = 0$ in $f(x)$ einsetzen. Den Schnittpunkt N von K_f mit der x-Achse erhalten Sie, indem Sie die Gleichung $f(x) = 0$ durch Logarithmieren nach x auflösen.
Zur Bestimmung der Gleichung der Asymptote beachten Sie, dass e^{-x} für $x \to \infty$ gegen Null geht.

b) Überlegen Sie, wie K_f aus dem Graphen der Exponentialfunktion e^x durch Spiegelungen, Streckungen oder Verschiebungen hervorgeht.
Um zu begründen, dass f streng monoton wachsend ist, verwenden Sie die 1. Ableitung von f, die Sie mit der Kettenregel erhalten. Beachten Sie, dass $e^{-x} > 0$ gilt.
Falls $f'(x) > 0$, ist f streng monoton wachsend.

c) Den gesuchten Flächeninhalt erhalten Sie mithilfe eines Integrals. Beachten Sie, dass die Gerade mit der Gleichung $y = 3$ oberhalb des Graphen von f verläuft und verwenden Sie den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

d) Beachten Sie, dass im Berührpunkt B die Steigung gleich groß ist wie die Steigung der gegebenen Geraden. Stellen Sie eine Gleichung auf und überlegen Sie, wie Sie den zugehörigen y-Wert erhalten.

e) Verwenden Sie als Ansatz für eine ganzrationale Funktion f vierten Grades die Gleichung $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ sowie deren Ableitungen. Beachten Sie, dass als notwendige Bedingung für Wendepunkte des Graphen von f die Gleichung $f''(x) = 0$ zu lösen ist. Überlegen Sie, wie viele Lösungen diese Gleichung maximal hat und was dies für die maximale Anzahl der Wendepunkte des Graphen von f bedeutet.

Lösungen A 1

a) Es ist $f(x) = 3 - \frac{1}{2} \cdot e^{-x}$.

Den Schnittpunkt S von K_f mit der y-Achse erhält man, indem man $x = 0$ in $f(x)$ einsetzt:

$$f(0) = 3 - \frac{1}{2} \cdot e^{-0} = 3 - \frac{1}{2} \cdot 1 = 2{,}5 \;\Rightarrow\; \mathrm{S}(0 \mid 2{,}5)$$

Den Schnittpunkt N von K_f mit der x-Achse erhält man, indem man die Gleichung $f(x) = 0$ durch Logarithmieren nach x auflöst:

$$\begin{aligned} 3 - \frac{1}{2} \cdot e^{-x} &= 0 \\ 3 &= \frac{1}{2} \cdot e^{-x} \\ 6 &= e^{-x} \\ \ln(6) &= -x \\ -\ln(6) &= x \end{aligned}$$

Damit hat der Schnittpunkt mit der x-Achse die Koordinaten $\mathrm{N}(-\ln(6) \mid 0)$.
Für $x \longrightarrow \infty$ geht e^{-x} gegen Null, damit geht $h(x) = 3 - \frac{1}{2} \cdot e^{-x}$ gegen 3.
Somit lautet die Gleichung der waagrechten Asymptote: $y = 3$.

b) Der Graph K_f geht aus dem Graphen der Exponentialfunktion e^x durch folgende Operationen hervor:

- Spiegelung an der y-Achse
- Spiegelung an der x-Achse
- Streckung in y-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ (Stauchung)
- Verschiebung in y-Richtung um 3 LE nach oben.

Um zu begründen, dass f streng monoton wachsend ist, verwendet man die 1. Ableitung von f, die man mit der Kettenregel erhält:

$$f'(x) = 0 - \frac{1}{2} \cdot e^{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{2} \cdot e^{-x}$$

Wegen $e^{-x} > 0$ gilt: $f'(x) > 0$. Somit ist f streng monoton wachsend.

c) Den Flächeninhalt A der Fläche zwischen dem Graphen von f, der Geraden mit der Gleichung $y = 3$, der y-Achse und der Geraden $x = 4$ erhält man mithilfe eines Integrals. Da die Gerade oberhalb des Graphen von f verläuft, ergibt sich mithilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung:

$$\mathrm{A} = \int_0^4 (3 - f(x))\,\mathrm{d}x$$

d) Die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ ist eine Tangente an K_f. Die Koordinaten des zugehörigen Berührpunkts B erhält man, indem man die Gleichung $f'(x) = \frac{1}{2}$ nach x auflöst, da im Punkt B die Steigung gleich groß ist wie die der gegebenen Geraden. Den zugehörigen y-Wert erhält man, indem man den erhaltenen x-Wert in $f(x)$ oder in die Tangentengleichung einsetzt.

e) Eine ganzrationale Funktion f vierten Grades hat allgemein die Gleichung

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

mit

$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$

und

$$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$$

Als notwendige Bedingung für Wendepunkte des Graphen von f löst man die Gleichung $f''(x) = 0$ nach x auf, also

$$12ax^2 + 6bx + 2c = 0$$

Dies ist eine quadratische Gleichung, welche maximal zwei Lösungen für x hat. Damit hat der Graph von f auch nur maximal zwei Wendepunkte.
Somit gibt es keine ganzrationale Funktion vierten Grades, deren Graph drei Wendepunkte besitzt.