Gruber I Neumann

Erfolg im Mathe-Abi 2022

Übungsbuch für den Pflichtteil
im Leistungsfach Mathematik
Baden-Württemberg
mit Tipps und Lösungen

Freiburger Verlag

Inhaltsverzeichnis

Analysis

Vorwort

Erfolg von Anfang an

...ist das Geheimnis eines guten Abiturs.

Das vorliegende Übungsbuch ist speziell auf die grundlegenden Anforderungen des Pflichtteils (hilfsmittelfreier Teil: HMF) des Mathematik-Abiturs im Leistungsfach seit 2021 in Baden-Württemberg abgestimmt. Es umfasst die drei großen Themenbereiche Analysis, Geometrie und Stochastik sowie angepasste und erweiterte Abituraufgaben seit 2018 in einem Buch. Seit 2021 ist die Struktur des hilfsmittelfreien Teils geändert: Es sind insgesamt maximal 20 Verrechnungspunkte (VP) zu erreichen, davon 10 VP in Analysis (4 Aufgaben a 2,5 VP), 5 VP in Geometrie (2 Aufgaben a 2,5 VP) und 5 VP in Stochastik (2 Aufgaben a 2,5 VP). *Daher haben wir Original-Prüfungsaufgaben teilweise gekürzt oder erweitert und an die neuen Bestimmungen angepasst.* Somit erhalten Sie die bestmögliche Vorbereitung auf die Abiturprüfung.

Der Pflichtteil (HMF) besteht aus mehreren kleinen Aufgaben, die ohne Taschenrechner und ohne Formelsammlung zu lösen sind. Genau hierfür wurde das vorliegende Buch konzipiert: Es fördert das Grundwissen und die Grundkompetenzen in Mathematik, vom einfachen Rechnen und Formelanwenden bis hin zum Verstehen von gedanklichen Zusammenhängen. Das Übungsbuch ist eine Hilfe zum Selbstlernen (learning by doing) und bietet die Möglichkeit, sich intensiv auf die Prüfung vorzubereiten und gezielt Themen zu vertiefen. Hat man Erfolg bei den grundlegenden Aufgaben, machen Mathematik und das Lernen mehr Spaß.

Unter www.freiburger-verlag.de erhalten Sie **weitere Aufgaben** kostenfrei als pdf zum Download.

Der blaue Tippteil

Hat man keine Idee, wie man eine Aufgabe angehen soll, hilft der blaue Tippteil zwischen Aufgaben und Lösungen weiter: Zu jeder Aufgabe gibt es dort Tipps, die helfen, einen Ansatz zu finden, ohne die Lösung vorwegzunehmen.

Die Kontrollkästchen ☐

Damit Sie immer den Überblick behalten können, welche Aufgaben Sie schon bearbeitet haben, befindet sich neben jedem Aufgabentitel ein Kontrollkästchen zum Abhaken.

Wie arbeiten Sie mit diesem Buch?

Am Anfang jedes Kapitels finden Sie eine kurze Übersicht über die jeweiligen Themen. Die einzelnen Kapitel bauen zwar aufeinander auf, doch ist es nicht zwingend notwendig, das Buch der Reihe nach durchzuarbeiten. Die Aufgaben sind in der Regel in ihrer Schwierigkeit gestaffelt. Von fast jeder Aufgabe gibt es mehrere Variationen zum Vertiefen.

Der Aufbau des Mathematik-Abiturs

- Die gesamte Prüfungszeit beträgt 270 Minuten (4,5 Zeitstunden).
- Die Schülerinnen und Schüler erhalten zu Beginn der Prüfung alle Aufgaben (den Pflichtteil (HMF) und den vom Lehrer ausgesuchten Wahlteil Analysis, Geometrie und Stochastik). Sie erhalten zu diesem Zeitpunkt noch keine Hilfsmittel.
- Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten zuerst den Pflichtteil (HMF). Nach dessen Abgabe erhalten sie die Hilfsmittel (Taschenrechner, Merkhilfe) für den Wahlteil.

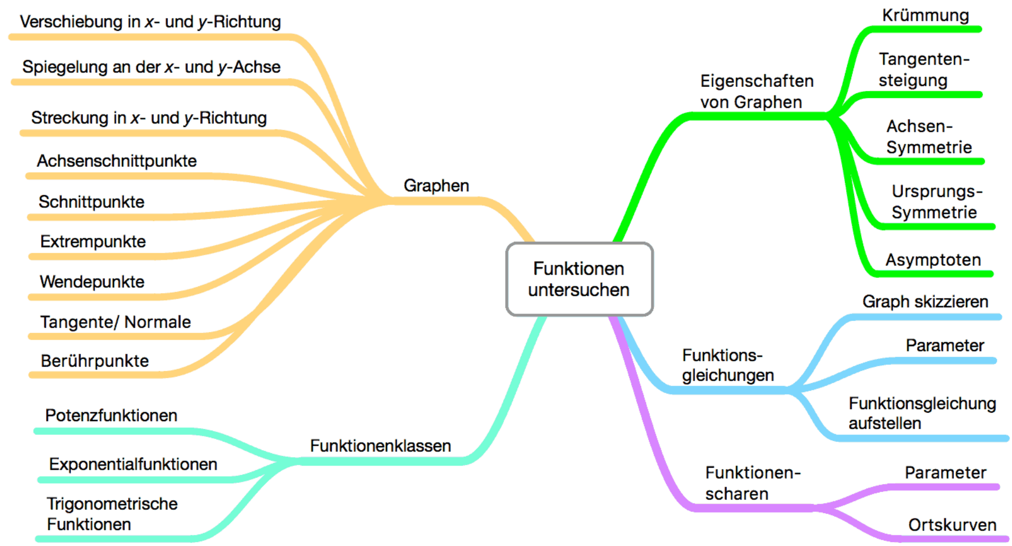
Insgesamt können maximal 60 Verrechnungspunkte in der Prüfung erzielt werden, davon 20 VP im Pflichtteil (HMF) und 40 VP im Wahlteil. Aus den Verrechnungspunkten ergeben sich folgende Notenpunkte:

Verrechnungspunkte	Notenpunkte	Note
0 - 11	0	ungenügend
12 - 15	1	mangelhaft
16 - 19	2	
20 - 23	3	
24 - 26	4	ausreichend
27 - 29	5	
30 - 32	6	
33 - 35	7	befriedigend
36 - 38	8	
39 - 41	9	
42 - 44	10	gut
45 - 47	11	
48 - 50	12	
51 - 53	13	sehr gut
54 - 56	14	
57 - 60	15	

Allen Schülerinnen und Schülern, die sich auf das Abitur vorbereiten, wünschen wir viel Erfolg.

Helmut Gruber, Robert Neumann

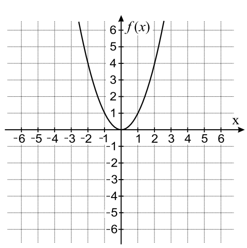
4 Funktionen und Graphen



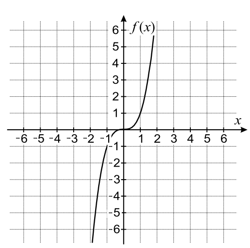
4.1 Von der Gleichung zur Kurve

Tipps ab Seite 86, Lösungen ab Seite 139

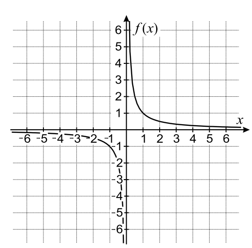
In diesem Kapitel geht es um die Grundfunktionen und ihre Verschiebung, Streckung und Spiegelung. Dazu sollten Sie die Graphen der wichtigsten Grundfunktionen kennen:



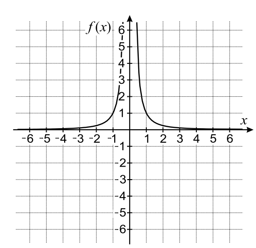
$f(x) = x^2$



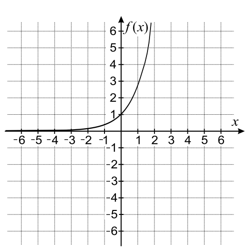
$f(x) = x^3$



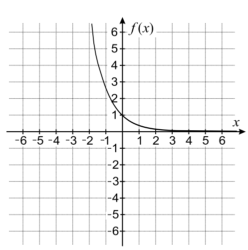
$f(x) = \frac{1}{x}$



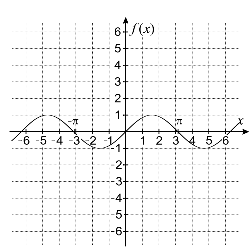
$f(x) = \frac{1}{x^2}$



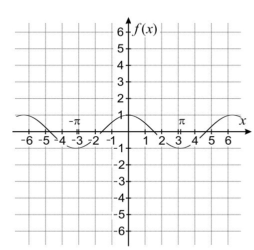
$f(x) = e^x$



$f(x) = e^{-x}$



$f(x) = \sin(x)$

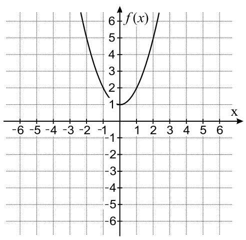


$f(x) = \cos(x)$

Diese Grundfunktionen lassen sich verschieben und strecken:

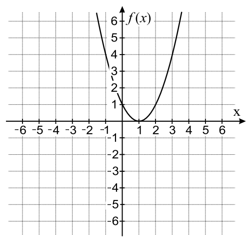
Beispiel:

Die Parabel $f(x) = x^2$



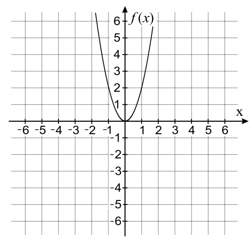
$f(x) = x^2 + 1$

Verschiebung um 1 LE in y-Richtung: das absolute Glied ist 1.



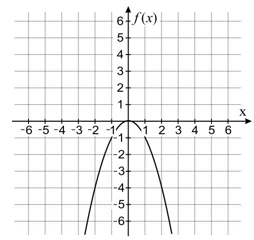
$f(x) = (x-1)^2$

Verschiebung um 1 LE in x-Richtung: x wird ersetzt durch $(x-1)$.



$f(x) = 2 \cdot x^2$

Streckung in y-Richtung um den Faktor 2. Die Funktionsgleichung wird mit 2 multipliziert.



$f(x) = -x^2$

Spiegelung an der x-Achse: Die Funktionsgleichung wird mit -1 multipliziert.

Weitere Variationen:

- Spiegelung an der y-Achse: Hierzu wird x ersetzt durch $(-x)$
- Stauchen in x-Richtung: Hierzu wird x ersetzt durch $a \cdot x$. Der Graph wird bei einem Faktor, der größer als 1 ist, gestaucht, d.h. in x-Richtung «kürzer» und bei einem Faktor, der kleiner als 1 ist, gestreckt, d.h. in x-Richtung «länger».

Tipp: Skizzieren Sie zuerst den Graphen der zugehörigen Grundfunktion und anschließend schrittweise eine eventuelle Spiegelung, Streckung/Stauchung sowie die Verschiebungen in x-bzw. y-Richtung.

4.1.1 Ganzrationale Funktionen ☐

Skizzieren Sie die Graphen folgender Funktionen und bestimmen Sie die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.

a) $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$　　b) $f(x) = -\frac{3}{4}x$　　c) $f(x) = (x-1)^2 - 4$

d) $f(x) = -x^2 + 4$　　e) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4{,}5$　　f) $f(x) = (x-1)^3 + 1$

4.1.2 Potenzfunktionen ☐

Skizzieren Sie die Graphen folgender Funktionen und bestimmen Sie jeweils die Asymptoten.

a) $f(x) = \frac{1}{x+1} + 2$　　b) $f(x) = -\frac{2}{x-1}$　　c) $f(x) = -\frac{3}{x-1} - 2$

d) $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2} - 1$　　e) $f(x) = -\frac{2}{(x+1)^2}$　　f) $f(x) = -\frac{3}{(x-1)^2} + 2$

4.1.3 Trigonometrische Funktionen ☐

Skizzieren Sie die Graphen folgender Funktionen und geben Sie jeweils die Periode an.

a) $f(x) = 2\sin(x)$ b) $f(x) = \frac{1}{2}\cos(x)$ c) $f(x) = \sin(2x)$

d) $f(x) = -\sin(2x) + 1$ e) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{2}\pi(x+1)\right)$ f) $f(x) = \frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{4}x) + \frac{3}{2}$

4.1.4 Exponentialfunktionen ☐

Skizzieren Sie den Graphen folgender Funktionen und bestimmen Sie jeweils die Asymptote.

a) $f(x) = e^{x-1} + 1$ b) $f(x) = -e^{x-1} + 1$ c) $f(x) = e^{-(x-1)} + 2$

d) $f(x) = e^{-x+3} + 1$

4.2 Aufstellen von Funktionen mit Randbedingungen ☐

Tipps ab Seite 87, Lösungen ab Seite 144

In diesem Abschnitt geht es darum, eine Funktion so aufzustellen, dass sie bestimmte vorgegebene Bedingungen erfüllt («Steckbriefaufgabe»). Dazu wird die gesuchte Funktion zuerst in ihrer allgemeinen Form aufgeschrieben. Aus dieser können Sie die Anzahl der benötigten Parameter ablesen. Für jeden dieser Parameter brauchen Sie eine «Information» aus der Aufgabenstellung. Aus jeder «Information» ergibt sich eine Gleichung. Damit erhalten Sie ein Gleichungssystem, welches Sie mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren lösen können.

Beispiel

Gesucht ist die Gleichung einer Parabel mit Tiefpunkt $(1 \mid -4)$, die durch $(0 \mid -3)$ geht.

Die allgemeine Parabelgleichung lautet: $f(x) = ax^2 + bx + c$, die Ableitung ist $f'(x) = 2ax + b$. Es sind also drei Parameter zu bestimmen. Folgende Bedingungen müssen gelten:
$f(1) = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = -4$,
$f'(1) = 2a \cdot 1 + b = 0$ (weil es sich um einen Tiefpunkt mit Steigung Null handelt) und
$f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = -3$. Daraus ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \mathrm{I} & a & + & b & + & c & = & -4 \\ \mathrm{II} & 2a & + & b & & & = & 0 \\ \mathrm{III} & & & & & c & = & -3 \end{array}$$

Aus Gleichung III liest man $c = -3$ ab. Damit erhält man:

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \mathrm{Ia} & a & + & b & & & = & -1 \\ \mathrm{II} & 2a & + & b & & & = & 0 \\ \mathrm{III} & & & & & c & = & -3 \end{array}$$

g) - h) Substituieren Sie $\sin(x) = z$ bzw. $\cos(x) = z$, lösen Sie mithilfe der pq- oder abc-Formel die entstandene quadratische Gleichung und resubstituieren Sie wieder.

i) Verwenden Sie den Satz vom Nullprodukt und substituieren Sie den Term in der Klammer durch z, lösen Sie die Gleichung und resubstituieren Sie wieder.

3.6 Wurzelgleichungen

Lösen Sie die angegebene Gleichung durch Quadrieren. Verwenden Sie eventuell die binomischen Formeln und die abc-Formel zur Lösung der entstandenen quadratischen Gleichung. Zur Überprüfung der erhaltenen Lösungen setzen Sie diese in die Ursprungsgleichung ein. Bei einer wahren Aussage kommen die Lösungen in Frage.

3.7 Betragsgleichungen

Lösen Sie die Gleichungen durch Fallunterscheidung.

3.8 Ungleichungen

a) - d) Formen Sie die gegebene Ungleichung so um, dass Null auf einer Seite steht. Überlegen Sie, ob der Graph der zugehörigen Funktion (Parabel) nach oben oder nach unten geöffnet ist und bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion mithilfe des Satzes vom Nullprodukt oder der abc-Formel. Beachten Sie, ob die x-Werte gesucht sind, für die der Graph oberhalb oder unterhalb der x-Achse verläuft.

e) - f) Beachten Sie, dass e^{kx} stets größer als Null ist und überlegen Sie, was dann für den anderen Faktor des Produkts gelten muss.

g) - h) Überlegen Sie, wie der Graph der zugehörigen Funktion aussieht und bestimmen Sie grafisch den gesuchten Bereich.

4 Funktionen und Graphen

4.1 Von der Gleichung zur Kurve

4.1.1 Ganzrationale Funktionen

Den Schnittpunkt mit der y-Achse erhalten Sie durch Einsetzen von $x = 0$ in $f(x)$, die Schnittpunkte mit der x-Achse erhalten Sie durch Lösen der Gleichung $f(x) = 0$.
Zuerst wird gespiegelt und gestreckt, anschließend verschoben (Reihenfolge beachten!).

a) - b) Die Graphen sind Geraden. Hat eine Gerade die Gleichung $y = mx + b$, so ist b der y-Achsenabschnitt und m die Steigung der Geraden.

c) - f) Die Graphen sind Variationen der Graphen der beiden Grundfunktionen $f(x) = x^2$ (Parabel) oder $g(x) = x^3$ (kubische Parabel).

Ist $f(x) = a(x-b)^2 + c$ bzw. $g(x) = a(x-b)^3 + c$, so gibt es folgende Verwandlungen:
a: Streckfaktor in y-Richtung; $a < 0$: zusätzlich Spiegelung an der x-Achse.
$b > 0$ bzw. $b < 0$: Verschiebung nach rechts bzw. links.
$c > 0$ bzw. $c < 0$: Verschiebung nach oben bzw. unten.

4.1.2 Potenzfunktionen

Die senkrechte Asymptote des Schaubilds der Funktionen erhalten Sie, indem Sie den Nenner gleich Null setzen, die waagrechte Asymptote erhalten Sie, indem Sie $f(x)$ für $x \to \pm\infty$ betrachten.
Die Graphen sind Variationen der Graphen der Grundfunktionen $f(x) = \frac{1}{x}$ bzw. $g(x) = \frac{1}{x^2}$.
Falls vor dem Bruch ein Minuszeichen steht, müssen Sie zuerst an der x-Achse spiegeln und anschließend in x- bzw. y-Richtung verschieben.

Ist $f(x) = \frac{a}{x-b} + c$ bzw. $g(x) = \frac{a}{(x-b)^2} + c$, so gibt es folgende Verwandlungen:
a: Streckfaktor in y-Richtung; $a < 0$: zusätzlich Spiegelung an der x-Achse.
$b > 0$ bzw. $b < 0$: Verschiebung nach rechts bzw. links.
$c > 0$ bzw. $c < 0$: Verschiebung nach oben bzw. unten.
Asymptoten: $x = b$ senkrechte Asymptote (Pol) und $y = c$ waagrechte Asymptote.

4.1.3 Trigonometrische Funktionen

Die Graphen sind Variationen der Grundfunktionen $f(x) = \sin(x)$ bzw. $g(x) = \cos(x)$.
Ist $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x-c)) + d$ bzw. $g(x) = a \cdot \cos(b \cdot (x-c)) + d$, so gibt es folgende Verwandlungen:
a: Streckfaktor in y-Richtung; $a < 0$: zusätzlich Spiegelung an der x-Achse.
b: Streckfaktor in x-Richtung.
$c > 0$ bzw. $c < 0$: Verschiebung nach rechts bzw. links.
$d > 0$ bzw. $d < 0$: Verschiebung nach oben bzw. unten.
Periode: $p = \frac{2\pi}{b}$.

4.1.4 Exponentialfunktionen

Zur Bestimmung der Asymptoten betrachten Sie $f(x)$ für $x \to \pm\infty$.
Die Graphen sind Variationen der Grundfunktionen $f(x) = e^x$ bzw. $g(x) = e^{-x}$.
Ist $f(x) = a \cdot e^{x-b} + c$ bzw. $g(x) = a \cdot e^{-(x-b)} + c$, so gibt es folgende Verwandlungen:
a: Streckfaktor in y-Richtung; $a < 0$: zusätzlich Spiegelung an der x-Achse.
$b > 0$ bzw. $b < 0$: Verschiebung nach rechts bzw. links.
$c > 0$ bzw. $c < 0$: Verschiebung nach oben bzw. unten.

4.2 Aufstellen von Funktionen mit Randbedingungen

4.2.1 Ganzrationale Funktionen

Für alle ganzrationalen Funktionen gilt:

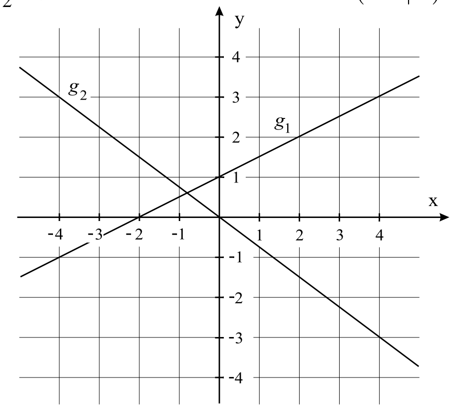
- Parabel 2. Grades: $f(x) = ax^2 + bx + c$

4 Funktionen und Graphen

4.1 Von der Gleichung zur Kurve

4.1.1 Ganzrationale Funktionen

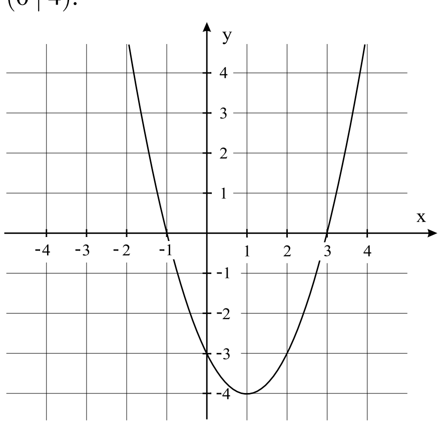
a) g_1: $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$. Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = \frac{1}{2} \cdot 0 + 1 = 1 \Rightarrow \mathrm{S}\,(0 \mid 1)$
Schnittpunkt mit der x-Achse: $f(x) = 0$ bzw. $\frac{1}{2}x + 1 = 0$ führt zu $x = -2 \Rightarrow \mathrm{N}\,(-2 \mid 0)$
Es handelt sich um eine Gerade mit y-Achsenabschnitt $b = 1$ und Steigung $m = \frac{1}{2}$.



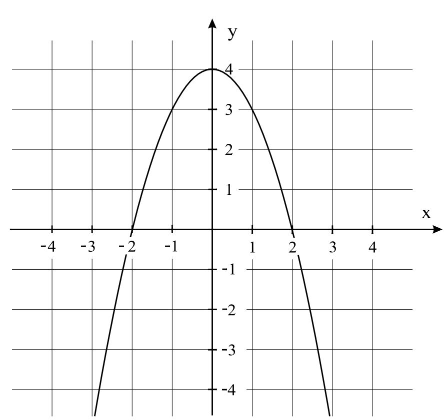
b) g_2 : $f(x) = -\frac{3}{4}x$. Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = -\frac{3}{4} \cdot 0 = 0 \Rightarrow \mathrm{S}\,(0 \mid 0)$. Schnittpunkt mit der x-Achse: $f(x) = 0$ bzw. $-\frac{3}{4}x = 0$ führt zu $x = 0 \Rightarrow \mathrm{N}\,(0 \mid 0)$. Es handelt sich um eine Ursprungsgerade (Gerade durch den Koordinatenursprung) mit y-Achsenabschnitt $b = 0$ und Steigung $m = -\frac{3}{4}$.

c) $f(x) = (x-1)^2 - 4$. Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = (0-1)^2 - 4 = -3 \Rightarrow \mathrm{S}\,(0 \mid -3)$
Schnittpunkt mit der x-Achse: $f(x) = 0$ bzw. $(x-1)^2 - 4 = 0$ führt zu $x_1 = 3$, $x_2 = -1 \Rightarrow \mathrm{N}_1(3 \mid 0), \mathrm{N}_2(-1 \mid 0)$. Es handelt sich um eine Normalparabel, die um eine LE nach rechts und 4 LE nach unten verschoben wurde, d.h. eine nach oben geöffnete Normalparabel mit Scheitel bei $(1 \mid -4)$.

d) $f(x) = -x^2 + 4$. Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = -0^2 + 4 = 4 \Rightarrow \mathrm{S}\,(0 \mid 4)$
Schnittpunkt mit der x-Achse: $f(x) = 0$ bzw. $-x^2 + 4 = 0$ führt zu $x_1 = 2, x_2 = -2$
$\Rightarrow \mathrm{N}_1(2 \mid 0), \mathrm{N}_2(-2 \mid 0)$.
Es handelt sich um eine Normalparabel, die an der x-Achse gespiegelt und dann um vier LE nach oben verschoben wurde, d.h. eine nach unten geöffnete Normalparabel mit S $(0 \mid 4)$.



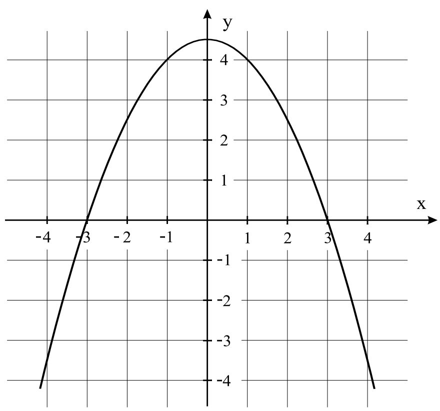
c) $f(x) = (x-1)^2 - 4$



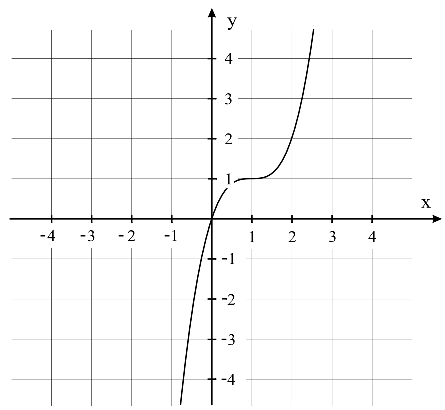
d) $f(x) = -x^2 + 4$

e) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4,5$.
Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = -\frac{1}{2} \cdot 0^2 + 4,5 = 4,5 \;\Rightarrow \mathrm{S}\,(0 \mid 4,5)$.
Schnittpunkt mit der x-Achse: $f(x) = 0$ bzw. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4,5 = 0$ führt zu den Lösungen $x_1 = 3\,, x_2 = -3$. Daraus folgt: $\mathrm{N}_1(3 \mid 0)\,, \mathrm{N}_2(-3 \mid 0)$.
Es handelt sich um eine Normalparabel, die an der x-Achse gespiegelt, mit Faktor $\frac{1}{2}$ in y-Richtung gestaucht und um $4,5$ LE nach oben verschoben wurde.

f) $f(x) = (x-1)^3 + 1$. Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = (0-1)^3 + 1 = 0 \;\Rightarrow \mathrm{S}\,(0 \mid 0)$.
Schnittpunkt mit der x-Achse: $f(x) = 0$ bzw. $f(x) = (x-1)^3 + 1 = 0$ führt zu $x = 0 \;\Rightarrow \mathrm{N}\,(0 \mid 0)$.
Es handelt sich um eine kubische Parabel, die um eine LE nach rechts und eine LE nach oben verschoben wurde.



e) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4,5$



f) $f(x) = (x-1)^3 + 1$

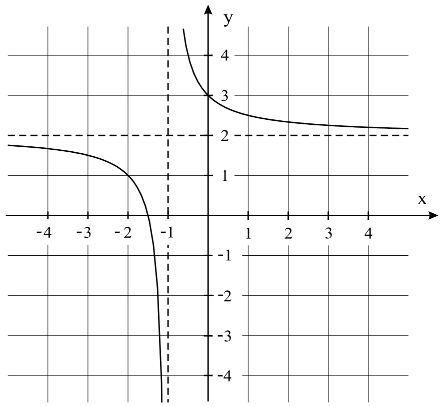
4.1.2 Potenzfunktionen

a) $f(x) = \frac{1}{x+1} + 2$. Asymptoten: $x + 1 = 0$ führt zu $x = -1$, senkrechte Asymptote (Pol); $x \longrightarrow \pm\infty$ führt zu $y = 2$ (waagerechte Asymptote), da der Bruchterm gegen Null geht.
Der Graph von $g(x) = \frac{1}{x}$ wurde um eine LE nach links und zwei LE nach oben verschoben.

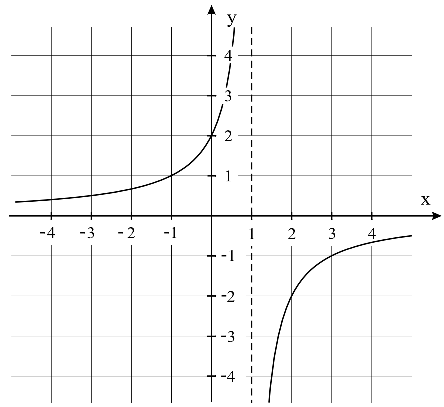
b) $f(x) = -\frac{2}{x-1}$. Asymptoten: $x - 1 = 0$ führt zu $x = 1$, senkrechte Asymptote (Pol); $x \longrightarrow \pm\infty$ führt zu $y = 0$ (waagerechte Asymptote), da der Bruchterm gegen Null geht.
Der Graph der Funktion $g(x) = \frac{1}{x}$ wurde an der x-Achse gespiegelt, mit dem Faktor 2 in y-Richtung gestreckt und anschließend um eine LE nach rechts verschoben.

c) $f(x) = -\frac{3}{x-1} - 2$. Asymptoten: $x - 1 = 0$ führt zu $x = 1$, senkrechte Asymptote (Pol); $x \longrightarrow \pm\infty$ führt zu $y = -2$ (waagerechte Asymptote), da der Bruchterm gegen Null geht.
Der Graph der Funktion $g(x) = \frac{1}{x}$ wurde an der x-Achse gespiegelt, mit dem Faktor 3 in y-Richtung gestreckt und anschließend um eine LE nach rechts und zwei LE nach unten verschoben.

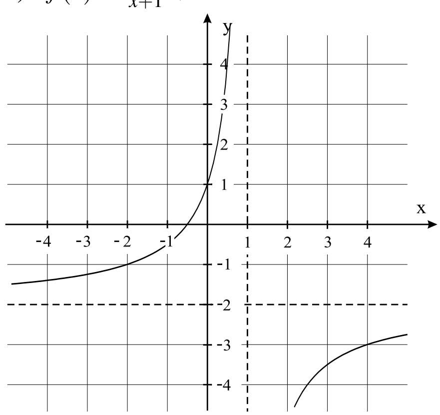
d) $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2} - 1$. Asymptoten: $(x+1)^2 = 0$ führt zu $x = -1$, senkrechte Asymptote (Pol); $x \to \pm\infty$ führt zu $y = -1$ (waagerechte Asymptote), da der Bruchterm gegen Null geht. Der Graph der Funktion $g(x) = \frac{1}{x^2}$ wurde um eine LE nach links und eine LE nach unten verschoben.



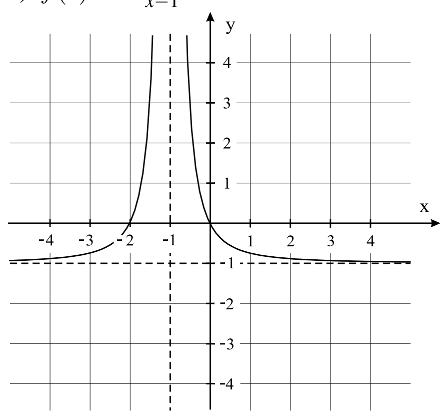
a) $f(x) = \frac{1}{x+1} + 2$



b) $f(x) = -\frac{2}{x-1}$



c) $f(x) = -\frac{3}{x-1} - 2$



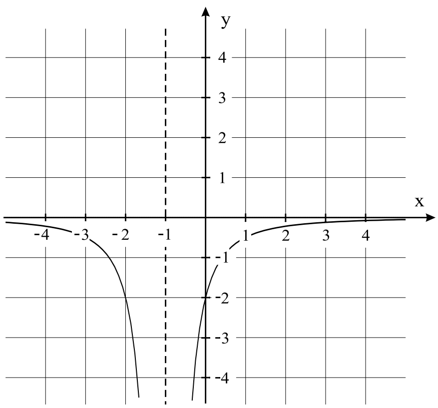
d) $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2} - 1$

e) $f(x) = -\frac{2}{(x+1)^2}$

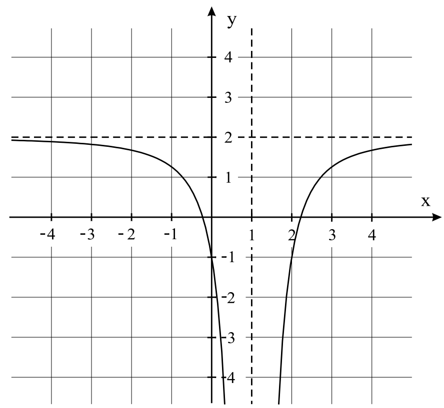
Asymptoten: $(x+1)^2 = 0$ führt zu $x = -1$, senkrechte Asymptote (Pol); $x \to \pm\infty$ führt zu $y = 0$ (waagerechte Asymptote), da der Bruchterm gegen Null geht. Der Graph der Funktion $g(x) = \frac{1}{x^2}$ wurde an der x-Achse gespiegelt, mit dem Faktor 2 in y-Richtung gestreckt und dann um eine LE nach links verschoben.

f) $f(x) = -\frac{3}{(x-1)^2} + 2$

Asymptoten: $(x-1)^2 = 0$ führt zu $x = 1$, senkrechte Asymptote (Pol); $x \to \pm\infty$ führt zu $y = 2$ (waagerechte Asymptote), da der Bruchterm gegen Null geht. Der Graph der Funktion $g(x) = \frac{1}{x^2}$ wurde an der x-Achse gespiegelt, mit dem Faktor 3 in y-Richtung gestreckt und dann um eine LE nach rechts und zwei LE nach oben verschoben.



e) $f(x) = -\frac{2}{(x+1)^2}$

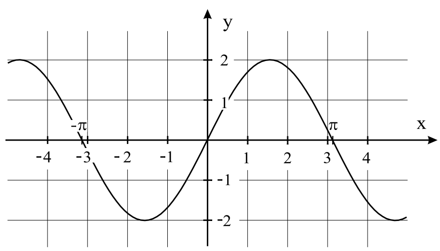


f) $f(x) = -\frac{3}{(x-1)^2} + 2$

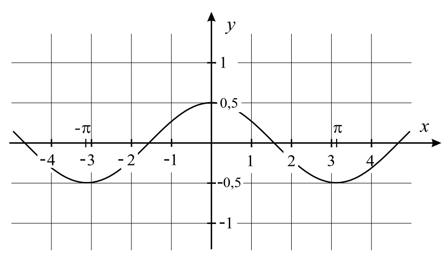
4.1.3 Trigonometrische Funktionen

a) $f(x) = 2\sin(x)$, Periode: $p = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$. Der Graph der Funktion $g(x) = \sin(x)$ wurde mit Faktor 2 in y-Richtung gestreckt.

b) $f(x) = \frac{1}{2}\cos(x)$, Periode: $p = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$. Der Graph von $g(x) = \cos(x)$ wurde mit Faktor $\frac{1}{2}$ in y-Richtung gestaucht (bzw. gestreckt).



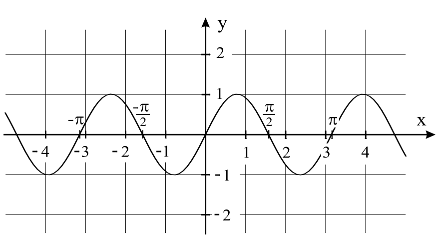
a) $f(x) = 2\sin(x)$



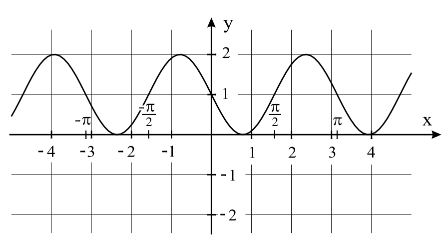
b) $f(x) = \frac{1}{2}\cos(x)$

c) $f(x) = \sin(2x)$, Periode: $p = \frac{2\pi}{2} = \pi$.
Der Graph der Funktion $g(x) = \sin(x)$ wurde mit Faktor 2 in x-Richtung gestaucht.

d) $f(x) = -\sin(2x) + 1$, Periode: $p = \frac{2\pi}{2} = \pi$.
Der Graph der Funktion $g(x) = \sin(x)$ wurde an der x-Achse gespiegelt, mit Faktor 2 in x-Richtung gestaucht und um eine LE nach oben verschoben.



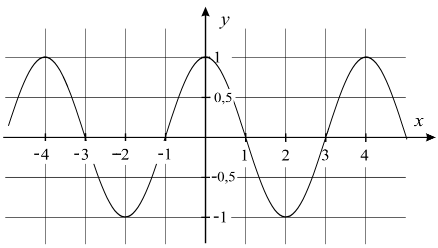
c) $f(x) = \sin(2x)$



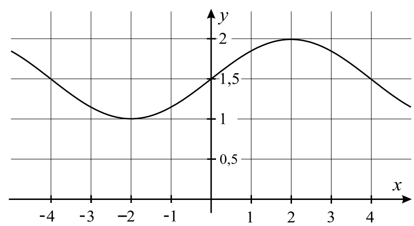
d) $f(x) = -\sin(2x) + 1$

e) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{2}\pi(x+1)\right)$, Periode: $p = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}\pi} = 4$. Der Graph der Funktion $g(x) = \sin(x)$ wurde in x-Richtung gestaucht und um eine LE nach links verschoben.

f) $f(x) = \frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{4}x) + \frac{3}{2}$, Periode: $p = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8$. Der Graph der Funktion $g(x) = \sin(x)$ wurde in x-Richtung gestreckt und in y-Richtung mit Faktor $\frac{1}{2}$ gestaucht, anschließend wurde es um $\frac{3}{2}$ LE nach oben verschoben.



e) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{2}\pi(x+1)\right)$



f) $f(x) = \frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{4}x) + \frac{3}{2}$

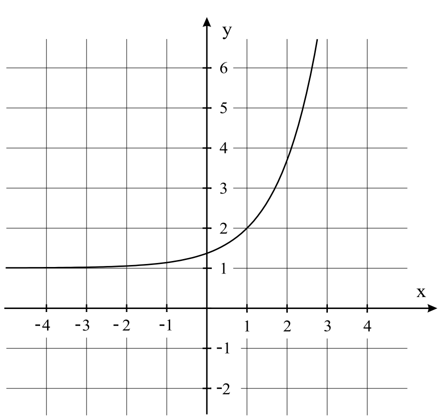
4.1.4 Exponentialfunktionen

a) $f(x) = e^{x-1} + 1$. Asymptote: $x \to -\infty$ führt zu $y = 1$ (waagerechte Asymptote).
Der Graph der Funktion $g(x) = e^x$ wurde um eine LE nach rechts und eine LE nach oben verschoben.

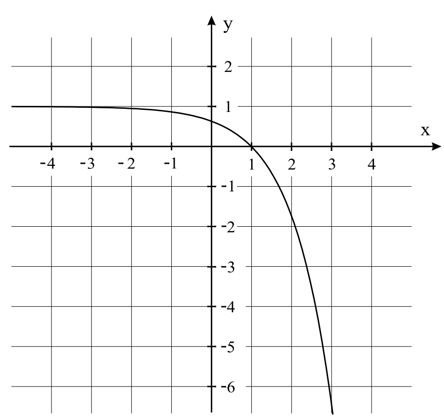
b) $f(x) = -e^{x-1} + 1$. Asymptote: $x \to -\infty$ führt zu $y = 1$ (waagerechte Asymptote).
Der Graph der Funktion $g(x) = e^x$ wurde an der x-Achse gespiegelt und anschließend um eine LE nach rechts und eine LE nach oben verschoben.

c) $f(x) = e^{-(x-1)} + 2$. Asymptote: $x \to \infty$ führt zu $y = 2$ (waagerechte Asymptote).
Der Graph der Funktion $g(x) = e^x$ wurde erst an der y-Achse gespiegelt und dann um eine LE nach rechts und zwei LE nach oben verschoben.

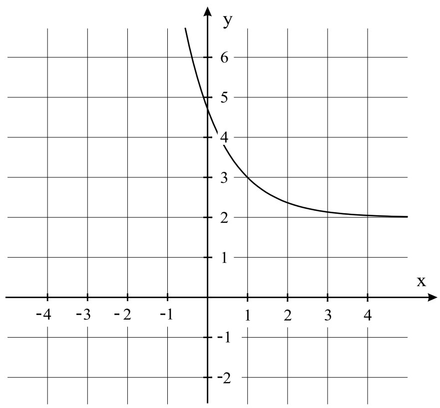
d) $f(x) = e^{-x+3} + 1 = e^{-(x-3)} + 1$. Asymptote: $x \to \infty$ führt zu $y = 1$ (waagerechte Asympt.).
Der Graph der Funktion $g(x) = e^x$ wurde erst an der y-Achse gespiegelt und dann um drei LE nach rechts und eine LE nach oben verschoben.



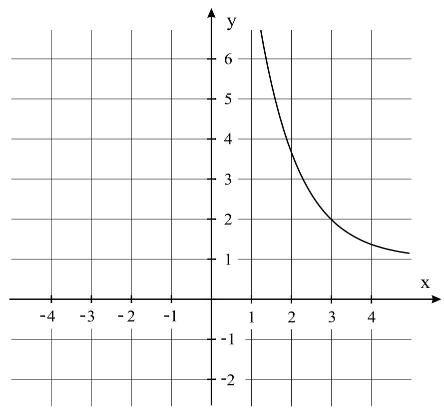
a) $f(x) = e^{x-1} + 1$



b) $f(x) = -e^{x-1} + 1$



c) $f(x) = e^{-(x-1)} + 2$



d) $f(x) = e^{-x+3} + 1$

4.2 Aufstellen von Funktionen mit Randbedingungen

4.2.1 Ganzrationale Funktionen

a) Ansatz: $f(x) = ax^2 + bx + c$. Die drei Bedingungen ergeben

$$\begin{array}{lcrcrcrcr} f(0)=4 & \Rightarrow & a\cdot 0^2 & + & b\cdot 0 & + & c & = & 4 \\ f(1)=0 & \Rightarrow & a\cdot 1^2 & + & b\cdot 1 & + & c & = & 0 \\ f(2)=18 & \Rightarrow & a\cdot 2^2 & + & b\cdot 2 & + & c & = & 18 \end{array}$$

Daraus ergibt sich das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{I} & & & & & c & = & 4 \\ \text{II} & a & + & b & + & c & = & 0 \\ \text{III} & 4a & + & 2b & + & c & = & 18 \end{array}$$

Einsetzen von c und Auflösen von II und III führt auf $a = 11$ und $b = -15$. Damit ergibt sich für die Funktionsgleichung $f(x) = 11x^2 - 15x + 4$.

b) Ansatz: $f(x) = ax^2 + bx + c$ und $f'(x) = 2ax + b$. Die drei Bedingungen ergeben

$$\begin{array}{lcrcrcrcr} f(0)=2 & \Rightarrow & a\cdot 0^2 & + & b\cdot 0 & + & c & = & 2 \\ f(1)=3 & \Rightarrow & a\cdot 1^2 & + & b\cdot 1 & + & c & = & 3 \\ f'(1)=0 & \Rightarrow & 2a\cdot 1 & + & b & & & = & 0 \end{array}$$

Daraus ergibt sich das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{I} & & & & & c & = & 2 \\ \text{II} & a & + & b & + & c & = & 3 \\ \text{III} & 2a & + & b & & & = & 0 \end{array}$$

Einsetzen von c und Auflösen von II und III führt auf $a = -1$ und $b = 2$. Damit ergibt sich für die Funktionsgleichung $f(x) = -x^2 + 2x + 2$. (Da es sich um eine nach unten geöffnete Parabel handelt, muss M $(1 \mid 3)$ ein Hochpunkt sein.)