Gruber I Neumann

# Erfolg im Mathe-Abi 2022

Übungsbuch für den Wahlteil
im Leistungsfach Mathematik
Baden-Württemberg
mit Tipps und Lösungen

Freiburger Verlag

# Inhaltsverzeichnis

# Vorwort

## Erfolg von Anfang an

... ist das Geheimnis eines guten Abiturs. Das vorliegende Übungsbuch ist speziell auf die Anforderungen des Wahlteils des Mathematik-Abiturs des Leistungsfachs in Baden-Württemberg seit 2021 abgestimmt. Es umfasst die drei großen Themenbereiche Analysis, Analytische Geometrie und Stochastik sowie angepasste Abituraufgaben seit 2019 in einem Buch. Insgesamt gibt es 40 Verrechnungspunkte (VP). In Analysis gibt es eine sehr umfangreiche Aufgabe mit 20 VP, in der Analytischen Geometrie und in Stochastik gibt es jeweils eine Aufgabe mit 10 VP.

Pro Jahrgang gibt es zwei Aufgaben aus der Analysis (A1 und A2), zwei Aufgaben aus der Analytischen Geometrie (B1 und B2) sowie zwei Aufgaben aus der Stochastik (C1 und C2).

Der Wahlteil besteht aus komplexeren Aufgaben, die mithilfe eines wissenschaftlichen Taschenrechners (WTR) und einer Merkhilfe gelöst werden sollen. Der Schwerpunkt liegt auf der Analysis. Thematisch geht es meist um anwendungsbezogene Transferaufgaben, um das Modellieren realitätsnaher Aufgabenstellungen, um das Herstellen von Zusammenhängen und um das Entwickeln von Lösungsstrategien.
Bei einigen Aufgaben ist es nötig, den Taschenrechner zu benutzen. Nicht bei allen Rechnerfunktionen ist gleich klar, wie sie aufgerufen werden. Daher befinden sich im Buch QR-Codes für die entsprechenden Videos, in denen die Funktionen des Tachenrechners kurz erklärt werden. Der QR-Code kann mit einer entsprechenden App gescannt werden. Alternativ lässt sich auch der Link unter dem Code benutzen.

Der Code neben diesem Text verweist z.B. auf ein Video zum Erstellen einer Wertetabelle.

frv.tv/da

Unter www.freiburger-verlag.de erhalten Sie **weitere Aufgaben** kostenfrei als pdf zum Download.

### Der blaue Tippteil

Hat man einmal keine Idee, wie man eine Aufgabe angehen soll bzw. fehlt der Lösungsansatz, hilft der blaue Tippteil in der Mitte des Buches weiter: Zu jeder Aufgabe gibt es dort Tipps, die helfen, einen Ansatz zu finden, ohne die Lösung vorwegzunehmen.

### Die Kontrollkästchen

Damit Sie immer den Überblick behalten können, welche Aufgaben Sie schon bearbeitet haben, befindet sich neben jedem Aufgabentitel ein Kontrollkästchen zum Abhaken.

## Der Aufbau der Mathematikprüfung

- Die gesamte Prüfungszeit beträgt 270 Minuten (4,5 Zeitstunden).
- Die Lehrerin/ der Lehrer erhält vor der Prüfung den Pflichtteil (HMF) und für den Wahlteil zwei Aufgabenvorschläge aus Analysis (A1 und A2), zwei aus Analytischer Geometrie (B1 und B2) sowie zwei aus Stochastik (C1 und C2). Die Lehrerin/ der Lehrer wählt aus den Vorschlägen für den Wahlteil je einen aus Analysis, einen aus Analytischer Geometrie und einen aus Stochastik aus.
- Die Schülerinnen und Schüler erhalten zu Beginn der Prüfung alle Aufgaben (den Pflichtteil und den vom Lehrer/ der Lehrerin ausgesuchten Wahlteil, bestehend aus Analysis, Geometrie und Stochastik). Sie erhalten zu diesem Zeitpunkt noch keine Hilfsmittel.
- Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten zunächst den Pflichtteil. Nach dessen Abgabe erhalten sie die Hilfsmittel (Taschenrechner, Merkhilfe) für den Wahlteil.

Insgesamt können maximal 60 Verrechnungspunkte in der Prüfung erreicht werden, davon 20 im Pflichtteil (HMF) und 40 im Wahlteil.

Allen Schülerinnen und Schülern, die sich auf das Abitur vorbereiten, wünschen wir viel Erfolg!

Helmut Gruber, Robert Neumann

# Analysis

## 1 Hefe ☐

*Tipps ab Seite 42, Lösungen ab Seite 65*

**Aufgabe A 1.1**

In einem Labor wird die Konservierung von Lebensmitteln erforscht.

In einem Experiment werden einer Nährlösung zu Beobachtungsbeginn 10 mg Hefe zugesetzt und zunächst untersucht, wie sich die Hefe ohne Zugabe von Konservierungsmitteln vermehrt. Dabei wird festgestellt, dass sich die Masse der Hefe 1,7 Stunden nach Beobachtungsbeginn verdoppelt hat.

a) Bestimmen Sie die Gleichung einer Funktion $h$ in der Form $h(t) = a \cdot e^{bt}$, die die Masse der Hefe (in mg) in Abhängigkeit von der Zeit $t$ (in Stunden nach Beobachtungsbeginn) beschreibt.
Berechnen Sie, zu welchem Zeitpunkt sich nach dieser Modellierung die Masse der Hefe verzehnfacht haben wird.
Berechnen Sie die durchschnittlich vorhandene Masse der Hefe in den ersten 4 Stunden.
Zeigen Sie, dass die Wachstumsgeschwindigkeit der Hefemasse zunimmt.
[zur Kontrolle: $h(t) = 10 \cdot e^{0{,}41t}$]

Konservierungsmittel haben auf das Hefewachstum eine hemmende Wirkung, da sie die Hefe zerstören. Um diesen Vorgang genauer zu untersuchen, werden zu Beobachtungsbeginn einer Nährlösung wieder 10 mg Hefe zugesetzt. Zusätzlich wird von Beobachtungsbeginn an durchgehend gleichmäßig ein Konservierungsmittel zugegeben.

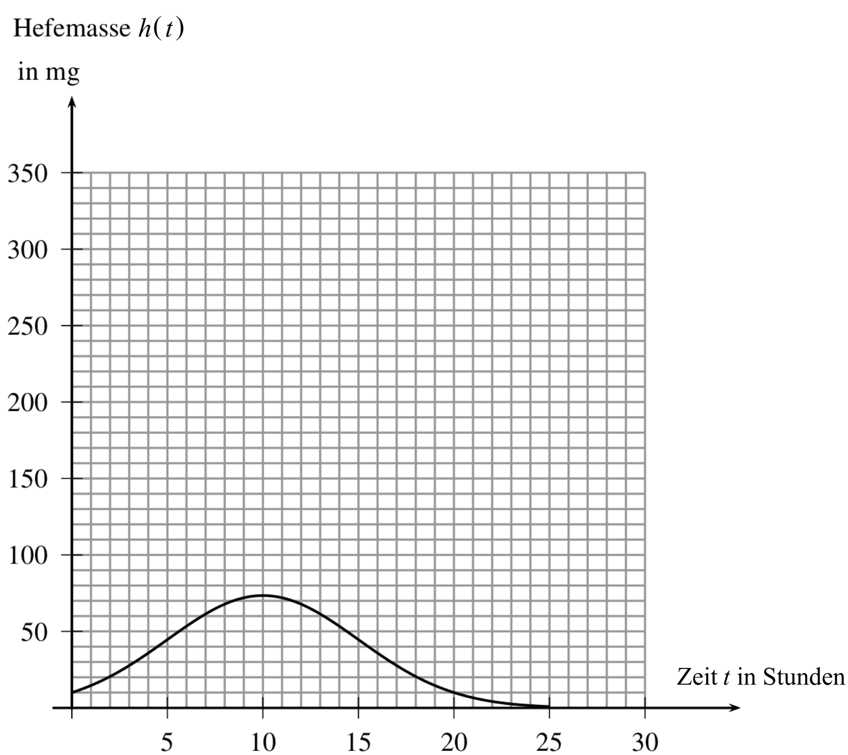
Die Masse der Hefe in mg in Abhängigkeit von der Zeit $t$ in Stunden nach Beobachtungsbeginn lässt sich nun durch die Funktionenschar $h_k$ mit $h_k(t) = 10 \cdot e^{0{,}4t - 0{,}5kt^2}$ ; $k \in \mathbb{R}$ und $k > 0$ beschreiben, wobei $k$ ein Maß für die Masse des zugegebenen Konservierungsmittels ist.

b) Untersuchen Sie anhand der Gleichung der Funktionenschar den Verlauf der Scharkurven für $t \to \infty$.
Berechnen Sie in Abhängigkeit von $k$ die Hochpunkte der Scharkurven. Die Untersuchung der notwendigen Bedingung ist ausreichend.
Beschreiben Sie im Sachzusammenhang die Abhängigkeit des Maximalwerts der Masse der Hefe und des Zeitpunkts, zu dem dieser Maximalwert erreicht wird, vom Parameter $k$.
[zur Kontrolle: $\mathrm{H}\left(\frac{0{,}4}{k} \mid 10 \cdot e^{\frac{0{,}08}{k}}\right)$]

c) Ermitteln Sie die Ortskurve der Extrempunkte und zeichnen Sie diese in das Koordinatensystem in Abbildung 1.
Der vorgegebene Graph in Material 1 ist der Graph einer Kurve der Funktionenschar $h_k$.
Bestimmen Sie mithilfe der Grafik den zugehörigen Scharparameter $k$.

d) Aufgrund der vorgenommenen mathematischen Modellierung könnte die Hefe niemals vollständig zerstört werden. Um dennoch einen Zeitpunkt abschätzen zu können, an dem die Hefe vollständig zerstört ist, wird folgendes Verfahren verwendet: Ab dem Zeitpunkt, an dem die Masse der Hefe wieder auf ihren Anfangswert von 10 mg gesunken ist, wird von einer linearen Abnahme ausgegangen. Dabei soll die Gerade ohne Knick und ohne Sprung an den Graphen der Funktion $h_k$ anschließen.
Berechnen Sie für $k = 0{,}08$ nach diesem Verfahren den Zeitpunkt, zu dem die Hefe vollständig zerstört ist.

## Abbildung 1



**Aufgabe A 1.2**

Die Funktion $g$ ist auf $\mathbb{R}$ definiert und zweimal differenzierbar.
Die Funktion $f$ hat die Gleichung $f(x) = e^{g(x)}$.
Es gilt: $g(2) = 3$, $g'(2) = 0$ und $g''(2) = -1$.

a) Zeigen Sie, dass der Graph von $f$ einen Extrempunkt besitzt und bestimmen Sie die Art und die Koordinaten des Extrempunkts.

b) Ermitteln Sie mithilfe von $f''(x)$ eine Stammfunktion der Funktion $h(x) = e^{2x^3} \cdot \left(18x^4 + 6x\right)$.

# Tipps – Analysis

## 1 Hefe

### Aufgabe A 1.1

a) Die Gleichung von $h$ erhalten Sie, indem Sie aus den gegebenen Daten zwei Gleichungen aufstellen und das zugehörige Gleichungssystem lösen. Um den Zeitpunkt zu berechnen, zu dem sich die Masse der Hefe verzehnfacht haben wird, lösen Sie die Gleichung $h(t) = 100$ durch Logarithmieren nach $t$ auf.
Die durchschnittlich vorhandene Masse der Hefe in den ersten 4 Stunden erhalten Sie mithilfe eines Integrals: $\overline{m} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b h(t)\mathrm{d}t$. Verwenden Sie den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung: $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \Big[\mathrm{F}(x)\Big]_a^b = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$, wobei F eine Stammfunktion von $f$ ist. Um zu zeigen, dass die Wachstumsgeschwindigkeit der Hefemasse, also $h'(t)$, zunimmt, verwenden Sie die Ableitungsfunktion von $h'(t)$, also $h''(t)$, die Sie mit der Kettenregel erhalten. Falls $h''(t) > 0$ gilt, ist die Ableitungsfunktion von $h'(t)$ stets positiv, also ist $h'(t)$ monoton steigend, so dass die Wachstumsgeschwindigkeit der Hefemasse zunimmt.

b) Beachten Sie, dass der Term $e^{-t^2}$ für $t \to \infty$ gegen Null geht. Die Hochpunkte der Scharkurven erhalten Sie mithilfe der 1. Ableitung von $h_k$, die Sie mit der Kettenregel bestimmen. Als notwendige Bedingung lösen Sie die Gleichung ${h_k}'(t) = 0$ nach $t$ auf. Den zugehörigen Funktionswert erhalten Sie, indem Sie den erhaltenen $t$-Wert in $h_k(t)$ einsetzen. Überlegen Sie, ob die Terme $\frac{0{,}4}{k}$, $\frac{0{,}08}{k}$ und damit auch der Term $10 \cdot e^{\frac{0{,}08}{k}}$ für größer werdendes $k$ kleiner oder größer werden und was dies für den Zeitpunkt des Maximalwerts und den Maximalwert selbst bedeutet, wenn $k$ ein Maß für die Masse des Konservierungsmittels ist.

c) Die Ortskurve der Extrempunkte erhalten Sie, indem Sie den $t$-Wert von $\mathrm{H}_k$ nach $k$ umformen und in den Funktionswert von $\mathrm{H}_k$ einsetzen. Mithilfe einer Wertetabelle können Sie den Graphen der Ortskurve der Extrempunkte in das Koordinatensystem in Material 1 einzeichnen. Bestimmen Sie die Extremstelle des vorgegebenen Graphen in Material 1 und damit den Parameter $k$.

d) Setzen Sie $k = 0{,}08$ in $h_k(t)$ ein. Den Zeitpunkt, an dem die Masse der Hefe wieder auf ihren Anfangswert von 10 mg gesunken ist, erhalten Sie, indem Sie die Gleichung $h_{0{,}08}(t) = 10$ durch Logarithmieren nach $t$ auflösen. Beachten Sie, dass $\ln(1) = 0$ ist und verwenden Sie den Satz vom Nullprodukt. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes P, in dem die Gerade an den Graphen der Funktion $h_{0{,}08}$ anschließt.
Da die Gerade ohne Knick und ohne Sprung an den Graphen der Funktion $h_{0{,}08}$ anschließen soll, berechnen Sie die Steigung $m$ im Punkt P mithilfe von ${h_{0{,}08}}'(t)$. Setzen Sie dazu $k = 0{,}08$ und den erhaltenen $t$-Wert in ${h_k}'(t)$ ein. Die Gleichung der Tangente in P erhalten Sie mit der Tangentengleichung $y = h'(u) \cdot (t - u) + h(u)$. Setzen Sie $m$ und die Koordinaten von P in die Tangentengleichung ein. Den Schnittpunkt der Tangente mit der $t$-Achse erhalten Sie, indem Sie die Gleichung $y = 0$ nach $t$ auflösen.

**Aufgabe A 1.2**

a) Um zu zeigen, dass der Graph von $f$ einen Extrempunkt besitzt, verwenden Sie die 1. und 2. Ableitung von $f$, die Sie mit der Kettenregel und der Produktregel erhalten. Beachten Sie, dass $g'(2) = 0$ gilt und bestimmen Sie damit $f'(2)$. Setzen Sie $x = 2$ in $f''(x)$ ein. Falls $f''(2) < 0$ hat der Graph von $f$ bei $x = 2$ einen Hochpunkt, falls $f''(x) > 0$ einen Tiefpunkt. Setzen Sie $x = 2$ in $f(x)$ ein.

b) Eine Stammfunktion H der Funktion $h$ erhalten Sie mithilfe der Ableitungen $f''(x)$ und $f'(x)$.
Formen Sie $h(x)$ so um, dass $h(x) = f''(x)$ gilt. Bestimmen Sie $g(x)$ und damit H durch Koeffizientenvergleich.

# 2 Wassertemperatur

**Aufgabe A 2.1**

a) Beachten Sie, dass $T_R$ die Raumtemperatur und $T_0$ die Temperatur der Flasche Wasser ist, als sie aus dem Kühlschrank geholt wird. Bestimmen Sie damit einen Term von $w(t)$ in Abhängigkeit von $k$. Lösen Sie die Gleichung $w(10) = 21{,}9$ durch Logarithmieren nach $k$ auf. Um zu berechnen, um wie viel Prozent die Temperatur des Wassers in den ersten 10 Minuten nach Entnahme aus dem Kühlschrank zunimmt, teilen Sie die Zunahme der Temperatur nach 10 Minuten durch die Anfangstemperatur.

b) Den Wert des Terms $\frac{1}{10} \cdot \int_0^{10} w(t)\mathrm{d}t$ erhalten Sie mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \Big[\mathrm{F}(x)\Big]_a^b = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$, wobei F eine Stammfunktion von $f$ ist. Beachten Sie, dass mithilfe eines Integrals $\overline{m} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ ein Mittelwert berechnet wird. Verwenden Sie, dass für $t \to \infty$ der Term $e^{-0{,}1t}$ gegen Null geht. Beachten Sie außerdem, dass die Raumtemperatur 30 °C beträgt.

c) Um zu berechnen, mit welcher Geschwindigkeit sich das Wasser zum Zeitpunkt der Entnahme aus dem Kühlschrank erwärmt, verwenden Sie die 1. Ableitung von $w$, die Sie mit der Kettenregel erhalten. Setzen Sie $t = 0$ in $w'(t)$ ein. Um zu berechnen, wann sich diese Erwärmungsgeschwindigkeit halbiert hat, lösen Sie die Gleichung $w'(t) = \frac{w'(0)}{2}$ durch Logarithmieren nach $t$ auf. Um zu zeigen, dass die Erwärmungsgeschwindigkeit im Zeitverlauf abnimmt, betrachten Sie die 1. Ableitung von $w'(t)$, die Sie mithilfe der Kettenregel erhalten. Falls $(w'(t))' < 0$ nimmt die Erwämungsgeschwindigkeit im Zeitverlauf ab. Überlegen Sie, ob $w'(t)$ stets positiv ist.

**Aufgabe A 2.2**

a) Die Koordinaten des Hochpunkts $H_a$ von $K_a$ erhalten Sie mithilfe der 1. und 2. Ableitung von $f_a$; verwenden Sie die Kettenregel. Als notwendige Bedingung lösen Sie die Gleichung ${f_a}'(x) = 0$ nach $x$ auf. Setzen Sie die erhaltenen $x$-Werte in ${f_a}''(x)$ ein; ist das Ergebnis

# Lösungen – Analysis

## 1 Hefe

**Aufgabe A 1.1**

a) Es ist $h(t) = a \cdot e^{bt}$.
($h(t)$: Masse der Hefe in mg, $t$: Zeit in Stunden nach Beobachtungsbeginn).
Die Gleichung von $h$ erhält man, indem man aus den gegebenen Daten zwei Gleichungen aufstellt und das zugehörige Gleichungssystem löst.
Da zu Beobachtungsbeginn 10 mg Hefe zugesetzt werden, gilt: $h(0) = 10$.
Da sich die Masse der Hefe 1,7 Stunden nach Beobachtungsbeginn verdoppelt hat, gilt: $h(1,7) = 20$. Damit erhält man:

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & a \cdot e^{b \cdot 0} & = & 10 \\ \text{II} & a \cdot e^{b \cdot 1,7} & = & 20 \end{array}$$

Aus Gleichung I ergibt sich: $a = 10$.
Setzt man $a = 10$ in Gleichung II ein, erhält man folgende Gleichung, die man durch Logarithmieren nach $b$ auflöst:

$$\begin{aligned} 10 \cdot e^{1,7 \cdot b} &= 20 \\ e^{1,7 \cdot b} &= 2 \\ 1,7 \cdot b &= \ln(2) \\ b &= \frac{\ln(2)}{1,7} \\ b &\approx 0,41 \end{aligned}$$

Somit hat die Funktion $h$ die Gleichung:

$$h(t) = 10 \cdot e^{0,41t}$$

Um den Zeitpunkt zu berechnen, zu dem sich die Masse der Hefe verzehnfacht haben wird, löst man die Gleichung $h(t) = 100$ durch Logarithmieren nach $t$ auf:

$$\begin{aligned} 10 \cdot e^{0,41t} &= 100 \\ e^{0,41t} &= 10 \\ 0,41t &= \ln(10) \\ t &= \frac{\ln(10)}{0,41} \\ t &\approx 5,62 \end{aligned}$$

Nach etwa 5,6 Stunden hat sich die Masse der Hefe verzehnfacht.

Die durchschnittlich vorhandene Masse der Hefe in den ersten 4 Stunden erhält man mithilfe eines Integrals:

$$\begin{aligned}\overline{m} &= \frac{1}{4}\cdot\int_0^4 h(t)\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{4}\cdot\int_0^4 \left(10\cdot e^{0,41t}\right)\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{4}\cdot\left[\frac{10}{0,41}\cdot e^{0,41t}\right]_0^4\\ &= \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{10}{0,41}\cdot e^{0,41\cdot 4}-\frac{10}{0,41}\cdot e^{0,41\cdot 0}\right)\\ &\approx 25,34\end{aligned}$$

Die durchschnittlich vorhandene Masse der Hefe in den ersten 4 Std. beträgt etwa 25 mg. Um zu zeigen, dass die Wachstumsgeschwindigkeit der Hefemasse, also $h'(t)$, zunimmt, verwendet man die Ableitungsfunktion von $h'(t)$, also $h''(t)$, die man mit der Kettenregel erhält:

$$h'(t) = 10\cdot e^{0,41t}\cdot 0,41 = 4,1\cdot e^{0,41t}$$
$$h''(t) = 4,1\cdot e^{0,41t}\cdot 0,41 \approx 1,68\cdot e^{0,41t}$$

Wegen $h''(t) > 0$ ist die Ableitungsfunktion von $h'(t)$ stets positiv, also ist $h'(t)$ monoton steigend, so dass die Wachstumsgeschwindigkeit der Hefemasse zunimmt.

b) Es ist $h_k(t) = 10\cdot e^{0,4t-0,5kt^2}$ ; $k\in\mathbb{R}$ und $k>0$.
Für $t\to\infty$ geht $0,4t-0,5kt^2$ gegen $-\infty$ und damit $e^{0,4t-0,5kt^2}$ gegen Null, so dass $h_k(t)$ ebenfalls gegen Null geht. Die Graphen der Kurvenschar nähern sich also der $t$-Achse an. Die Hochpunkte der Scharkurven erhält man mithilfe der 1. Ableitung von $h_k$, die man mit der Kettenregel bestimmt:

$$h_k{}'(t) = 10\cdot e^{0,4t-0,5kt^2}\cdot(0,4-kt)$$

Als notwendige Bedingung löst man die Gleichung $h_k{}'(t) = 0$ nach $t$ auf:

$$\begin{aligned}10\cdot e^{0,4t-0,5kt^2}\cdot(0,4-kt) &= 0\\ 0,4-kt &= 0\\ 0,4 &= kt\\ \frac{0,4}{k} &= t\end{aligned}$$

Den zugehörigen Funktionswert erhält man, indem man $t=\frac{0,4}{k}$ in $h_k(t)$ einsetzt:

$$h_k\left(\frac{0,4}{k}\right) = 10\cdot e^{0,4\cdot\frac{0,4}{k}-0,5k\cdot\left(\frac{0,4}{k}\right)^2} = 10\cdot e^{\frac{0,16}{k}-0,5k\cdot\frac{0,16}{k^2}} = 10\cdot e^{\frac{0,16}{k}-\frac{0,08}{k}} = 10\cdot e^{\frac{0,08}{k}}$$

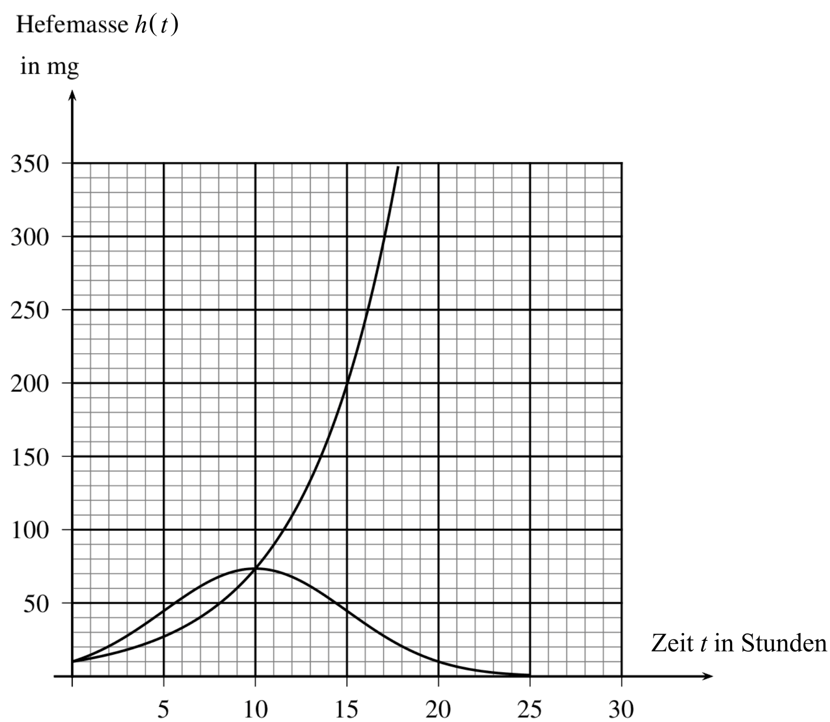
Somit haben die Hochpunkte der Graphen von $h_k$ die Koordinaten $\mathrm{H}\left(\frac{0,4}{k}\mid 10\cdot e^{\frac{0,08}{k}}\right)$.

Für größer werdendes $k$ wird der Term $\frac{0,4}{k}$ immer kleiner, d.h. je größer die Masse des Konservierungsmittels wird, desto früher wird der Zeitpunkt erreicht, zu dem die Masse der Hefe ihren Maximalwert hat.
Für größer werdendes $k$ wird der Term $\frac{0,08}{k}$ und damit auch der Term $10 \cdot e^{\frac{0,08}{k}}$ immer kleiner, d.h. je größer die Masse des Konservierungsmittels wird, desto kleiner wird der Maximalwert, den die Masse der Hefe erreicht.

c) Die Ortskurve der Extrempunkte erhält man, indem man den $t$-Wert von $H_k$ nach $k$ umformt und in den Funktionswert von $H_k$ einsetzt:

$$t = \frac{0,4}{k} \Rightarrow k = \frac{0,4}{t}$$
$$y = 10 \cdot e^{\frac{0,08}{\frac{0,4}{t}}} = 10 \cdot e^{0,08 \cdot \frac{t}{0,4}} = 10 \cdot e^{0,2 \cdot t}$$

Somit hat die Ortskurve der Extrempunkte die Gleichung $y = 10 \cdot e^{0,2 \cdot t}$.
Mithilfe einer Wertetabelle kann man den Graphen der Ortskurve der Extrempunkte in das Koordinatensystem in Material 1 einzeichnen:




Der vorgegebene Graph in Material 1 hat eine Extremstelle bei $t = 10$.
Damit gilt:

$$\frac{0,4}{k} = 10 \Rightarrow k = \frac{0,4}{10} = 0,04$$

Also gehört für $k = 0,04$ der vorgegebene Graph zur Kurvenschar.

d) Es ist $h_{0,08}(t) = 10 \cdot e^{0,4t-0,5 \cdot 0,08t^2} = 10 \cdot e^{0,4t-0,04t^2}$.
Den Zeitpunkt, an dem die Masse der Hefe wieder auf ihren Anfangswert von 10 mg gesunken ist, erhält man, indem man die Gleichung $h_{0,08}(t) = 10$ durch Logarithmieren nach $t$ auflöst:

$$\begin{aligned} 10 \cdot e^{0,4t-0,04t^2} &= 10 \\ e^{0,4t-0,04t^2} &= 1 \\ 0,4t - 0,04t^2 &= \ln(1) \\ 0,4t - 0,04t^2 &= 0 \\ t \cdot (0,4 - 0,04t) &= 0 \end{aligned}$$

Mithilfe des Satzes vom Nullprodukt erhält man die Lösung $t_1 = 0$ und aus $0,4 - 0,04t = 0$ die Lösung $t_2 = 10$.
Somit schließt die Gerade im Punkt $\mathrm{P}(10 \mid 10)$ an den Graphen der Funktion $h_{0,08}$ an.
Da die Gerade ohne Knick und ohne Sprung an den Graphen der Funktion $h_{0,08}$ anschließen soll, berechnet man die Steigung $m$ im Punkt P mithilfe von $h_{0,08}{}'(t)$. Setzt man $k = 0,08$ und $t = 10$ in $h_k{}'(t) = 10 \cdot e^{0,4t-0,5kt^2} \cdot (0,4 - kt)$ ein, ergibt sich:

$$m = h_{0,08}{}'(10) = 10 \cdot e^{0,4 \cdot 10 - 0,5 \cdot 0,08 \cdot 10^2} \cdot (0,4 - 0,08 \cdot 10) = -4$$

Die Gleichung der Tangente im Punkt P erhält man mit der Tangentengleichung:

$$y = h'(u) \cdot (t - u) + h(u)$$

Setzt man $m = -4$ und die Koordinaten von $\mathrm{P}(10 \mid 10)$ in die Tangentengleichung ein, ergibt sich:

$$\begin{aligned} y &= -4 \cdot (t - 10) + 10 \\ y &= -4t + 50 \end{aligned}$$

Den Schnittpunkt der Tangente mit der $t$-Achse erhält man, indem man die Gleichung $y = 0$ nach $t$ auflöst:

$$-4t + 50 = 0 \;\Rightarrow\; t = \frac{50}{4} = 12,5$$

Somit ist die Hefe nach 12,5 Stunden vollständig zerstört.

**Aufgabe A 1.2**

a) Um zu zeigen, dass der Graph von $f$ einen Extrempunkt besitzt, verwendet man die 1. und 2. Ableitung von $f$, die man mit der Kettenregel und der Produktregel erhält:

$$f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)$$
$$f''(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x) \cdot g'(x) + e^{g(x)} \cdot g''(x) = e^{g(x)} \cdot \left( \left(g'(x)\right)^2 + g''(x) \right)$$

Wegen $g'(2) = 0$ gilt: $f'(2) = e^{g(2)} \cdot g'(2) = e^3 \cdot 0 = 0$.
Damit hat der Graph von $f$ bei $x = 2$ einen möglichen Extrempunkt.
Setzt man $x = 2$ in $f''(x)$ ein, ergibt sich:

$$f''(2) = e^{g(2)} \cdot \left( \left(g'(2)\right)^2 + g''(2) \right) = e^3 \cdot (0^2 + (-1)) = -e^3 < 0$$

Wegen $f''(2) < 0$ hat der Graph von $f$ bei $x = 2$ einen Hochpunkt.
Die Koordinaten des Hochpunkts erhält man, indem man $x = 2$ in $f(x)$ einsetzt:

$$f(2) = e^{g(2)} = e^3$$

Somit hat der Hochpunkt des Graphen von $f$ die Koordinaten H $\left(2 \mid e^3\right)$.

b) Eine Stammfunktion H der Funktion $h(x) = e^{2x^3} \cdot \left(18x^4 + 6x\right)$ erhält man mithilfe der Ableitungen

$$f''(x) = e^{g(x)} \cdot \left( \left(g'(x)\right)^2 + g''(x) \right)$$

und

$$f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)$$

Mit $g(x) = 2x^3$ und $f(x) = e^{g(x)} = e^{2x^3}$ ergibt sich:

$$f'(x) = e^{2x^3} \cdot 6x^2$$
$$f''(x) = e^{2x^3} \cdot \left( \left(6x^2\right)^2 + 12x \right) = e^{2x^3} \cdot \left(36x^4 + 12x\right)$$

Damit gilt für die Funktion $h$:

$$h(x) = e^{2x^3} \cdot \left(18x^4 + 6x\right) = \frac{1}{2} \cdot e^{2x^3} \cdot \left( \left(6x^2\right)^2 + 12x \right) = \frac{1}{2} \cdot f''(x)$$

Somit ergibt sich für die Funktion H:

$$\mathrm{H}(x) = \frac{1}{2} \cdot f'(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{2x^3} \cdot 6x^2 = 3x^2 \cdot e^{2x^3}$$