Realschulabschlussprüfung 2015

Tipps ab Seite 9, Lösungen ab Seite 14

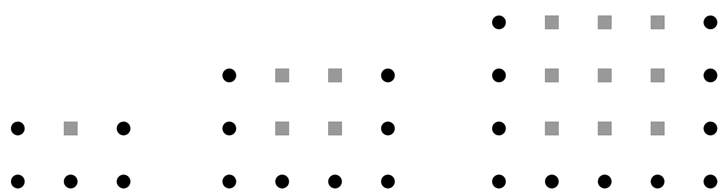
Realschulabschlussprüfung 2015, Teil A1 *

Hinweis: Im Teil A 1 (10 P) sind alle Aufgaben zu bearbeiten.
Zugelassene Hilfsmittel: Parabelschablone, Zeichengeräte

1) Zeigen Sie, dass gilt: 1 P

$$(2a+b)^2-(a+b)^2+(a-b)^2=4a^2+b^2$$

2) Johanna legt Plättchen nach dem folgenden Muster: 1 P



Wie viele runde Plättchen benötigt sie für das 7. Muster?

3) Pia behauptet: 2 P
«Die Oberfläche eines Würfels mit Kantenlänge $4,0\,\text{cm}$ ist größer als die Mantelfläche eines Zylinders mit Radius $3,0\,\text{cm}$ und Höhe $5,0\,\text{cm}$.»
Hat Pia Recht? Begründen Sie durch Rechnung.

4) In einem Gefäß sind 3 rote und 4 weiße Kugeln. 2 P
Es wird zwei Mal mit Zurücklegen gezogen.
Bestimmen Sie die Anzahl der roten Kugeln, die man dem Gefäß hinzufügen muss, damit gilt:

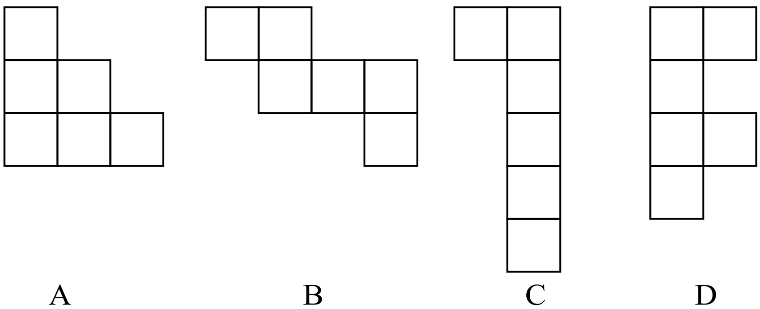
$$\mathrm{P(rr)}=\frac{9}{25}\ \text{und}\ \mathrm{P(ww)}=\frac{4}{25}$$

*Der Aufgabenteil A1 wurde ergänzt. Bei der Bearbeitung dieses Teils sind keine weiteren Hilfsmittel erlaubt.

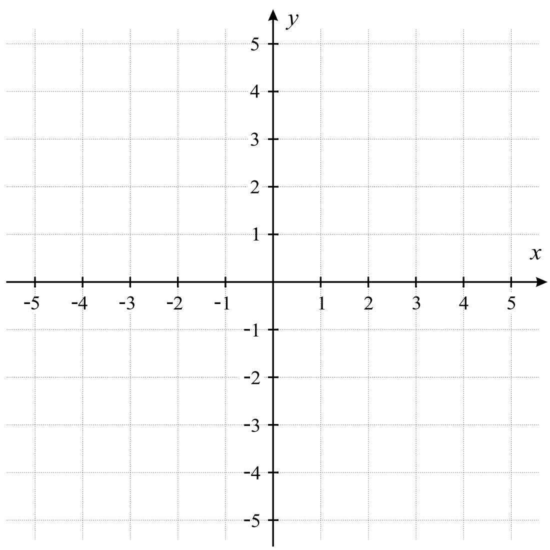
5) Welche der angegebenen Kosinuswerte sind gleich? 1 P
Kreuzen Sie an und begründen Sie Ihre Entscheidung:

☐ $\cos 45$ ☐ $\cos 135$
☐ $-\cos 135$ ☐ $\cos 145$

6) Nur eine der abgebildeten Zeichnungen stellt ein Würfelnetz dar. 1 P
Geben Sie an, welches. Begründen Sie Ihre Antwort:



7) Gegeben ist die Normalparabel p mit der Gleichung $p\colon\ y = (x-1)^2 - 4$ und die Gerade g mit der Gleichung $g\colon y = -2x - 3$. 2 P
Sophia behauptet: Die Parabel und die Gerade haben keinen gemeinsamen Punkt.
Hat Sophia Recht? Begründen Sie durch Zeichnung und Rechnung.



Tipps ab Seite 9, Lösungen ab Seite 16

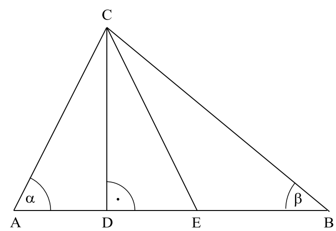
Realschulabschlussprüfung 2015, Teil A2

Hinweis: Im Teil A 2 (20 P) sind alle sechs Aufgaben zu bearbeiten.

Teil A2

1) Im Dreieck ABC gilt: 3 P

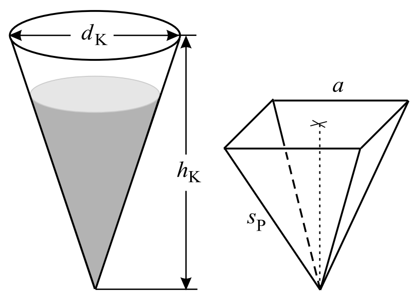
$$\overline{AC} = \overline{CE} = 9,2\text{ cm}$$
$$\alpha = 64,0^\circ$$
$$\beta = 40,0^\circ$$



Berechnen Sie den Umfang des Dreiecks EBC.

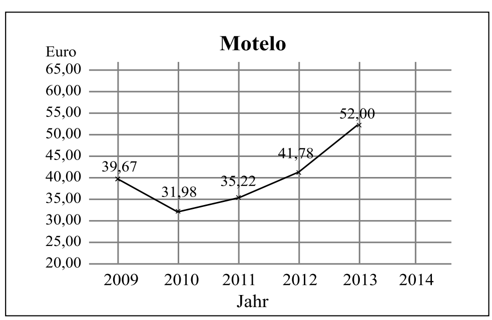
2) Ein Kegel ist teilweise mit Wasser gefüllt. Dabei nimmt das Wasser die Hälfte des Kegelvolumens ein. Dieses Wasser soll vollständig in eine quadratische Pyramide umgefüllt werden. Es gilt: 4 P

$$d_K = 20,0\,\text{cm}$$
$$h_K = 30,0\,\text{cm}$$
$$a = 16,0\,\text{cm}$$
$$s_P = 24,0\,\text{cm}$$



Läuft das Wasser über?
Überprüfen Sie durch Rechnung.

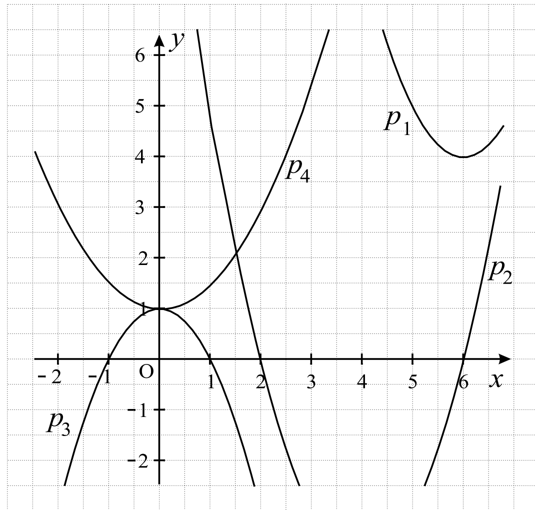
3) Das Diagramm zeigt den Wert der Aktie «Motelo» jeweils am Jahresende. 3 P
Um wie viel Prozent ist der Wert der Aktie von 2010 bis 2013 insgesamt angestiegen?
Am Ende des Jahres 2014 lag der Wert der Aktie 15,4 % über dem Wert am Ende des Jahres 2013.
Zeichnen Sie im Diagramm den Jahresendwert von 2014 ein.
Welchen jährlich gleichbleibenden Zinssatz hätte eine Bank bieten müssen, um von 2009 bis 2013 den gleichen Wertzuwachs zu erzielen?



4) Das Schaubild zeigt die Ausschnitte von vier Parabeln. **3 P**
Welcher Graph gehört zur angegebenen Wertetabelle?
Begründen Sie Ihre Entscheidung.

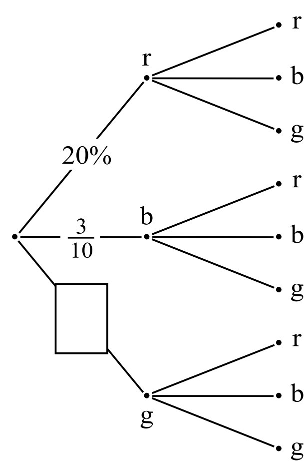
x	0	1	2	3
y	1	0	-3	-8

Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts Q der beiden verschobenen Normalparabeln p_1 und p_2.



Wie heißt die Gleichung der Parabel p_4?
Entnehmen Sie dazu erforderliche Werte dem Schaubild.

5) In einem Behälter liegen 20 Kugeln. Sie sind rot, blau und grün gefärbt. **3 P**
Es werden zwei Kugeln gleichzeitig gezogen.
Im Baumdiagramm fehlt eine Wahrscheinlichkeitsangabe. Ergänzen Sie diese.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, höchstens eine grüne Kugel zu ziehen?
In einem anderen Behälter liegen von jeder Farbe doppelt so viele Kugeln, also insgesamt 40 Kugeln.
Es werden ebenfalls zwei Kugeln gleichzeitig gezogen.
Uli sagt: «Die Wahrscheinlichkeit, höchstens eine grüne Kugel zu ziehen, ist gleich.»
Hat Uli Recht?
Begründen Sie durch Rechnung.



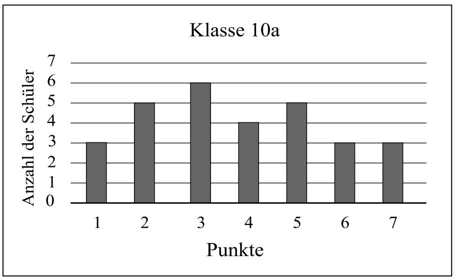
6) Die Klassen 10a und 10b machen einen gemeinsamen Ausflug und spielen Minigolf. 4 P

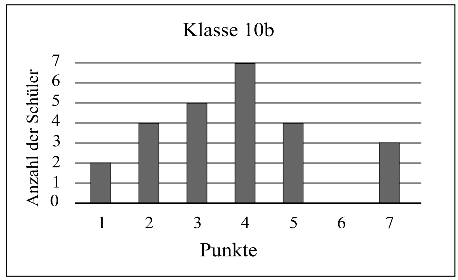
Beim Minigolf zählt jeder Schlag als Punkt.

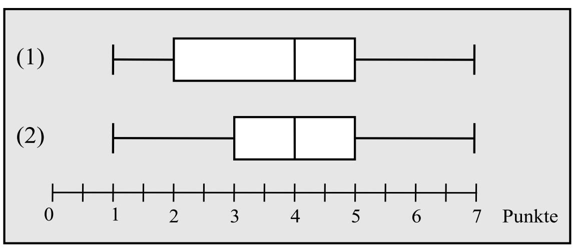
Hat der Ball nach sechs Punkten das Ziel nicht erreicht, ist ein Zusatzpunkt anzurechnen.

Die Höchstpunktzahl an einer Bahn beträgt also sieben Punkte.

Die Diagramme und die Boxplots zeigen die Ergebnisse der beiden Klassen nach der ersten Bahn.







Zu welcher Klasse gehört der jeweilige Boxplot? Begründen Sie.

Wie viel Prozent der Schüler der Klasse 10a haben fünf oder mehr Punkte?

Überprüfen Sie folgende Aussage:

«Die durchschnittliche Punktzahl der Klasse 10b beträgt genau vier Punkte.»

Tipps ab Seite 11, Lösungen ab Seite 24

Realschulabschlussprüfung 2015, Teil B

Hinweis: Im Teil B (20 P) sind zwei der drei Aufgaben zu bearbeiten.

Zugelassene Hilfsmittel: Formelsammlung, wissenschaftlicher Taschenrechner (nicht programmierbar), Parabelschablone, Zeichengeräte

Aufgabe 1

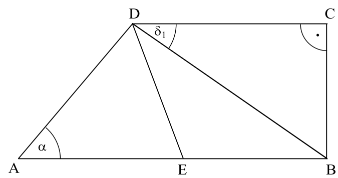
a) Im Trapez ABCD gilt: 5 P

$\overline{AD} = 8,4$ cm

$\overline{AE} = 7,8$ cm

$\alpha = 50,0°$

$\overline{BE} = \overline{DE}$



Berechnen Sie den Winkel δ_1.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks EBD.

b) Zu einer verschobenen nach oben geöffneten Normalparabel p gehört die unvollständig ausgefüllte Wertetabelle: 5 P

x	0	1	2	3	4	5
y	11	6			3	

Geben Sie die Gleichung der Parabel p an.

Vervollständigen Sie die Wertetabelle.

Eine Gerade g hat die Steigung $m = -1$ und geht durch den Punkt $P(-2,5 \mid 6)$.
Weisen Sie rechnerisch nach, dass p und g keine gemeinsamen Punkte haben.

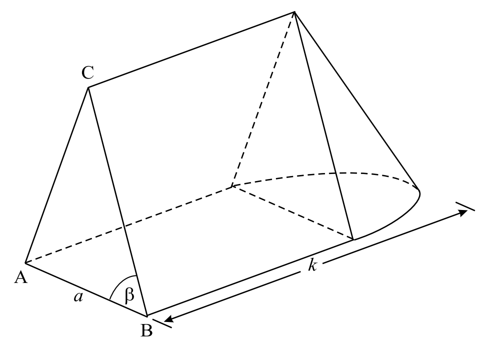
Die Gerade h verläuft parallel zur Geraden g und geht durch den Scheitelpunkt von p. Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes R der Geraden h mit der x-Achse.

Aufgabe 2

a) Ein zusammengesetzter Körper besteht aus einem gleichschenkligen Dreiecksprisma und einem halben Kegel (siehe Skizze). 5 P
Es gilt:

$$\overline{AC} = \overline{BC}$$
$$\overline{AB} = 11,4\ \text{cm}$$
$$\beta = 62,0°$$
$$V_{ges} = 1280\,\text{cm}^3$$

(Volumen des zusammengesetzten Körpers)
Berechnen Sie die Gesamtlänge k des zusammengesetzten Körpers.



b) Eine Parabel p_1 der Form $y = ax^2 + c$ mit dem Scheitelpunkt $S_1\,(0 \mid 4,5)$ schneidet die x-Achse in den Punkten $N_1(-3 \mid 0)$ und $N_2(3 \mid 0)$. 5 P

Eine nach oben geöffnete Normalparabel p_2 hat den Scheitelpunkt $S_2\,(3 \mid 1,5)$.

Die beiden Parabeln haben einen gemeinsamen Punkt T.
Berechnen Sie die Koordinaten von T.

Die Punkte N_1, N_2 und T bilden ein Dreieck.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks N_1N_2T.

Der Punkt T bewegt sich auf der Parabel p_1 oberhalb der x-Achse.
Für welche Lage von T wird der Flächeninhalt des Dreiecks N_1N_2T am größten?
Begründen Sie Ihre Aussage rechnerisch oder durch Argumentation.

Aufgabe 3

a) In einem Kartenstapel liegen zwölf Karten. Die Verteilung ist in der Tabelle dargestellt. 5 P

Kartenfarbe			
schwarz		rot	
♣ Kreuz	♠ Pik	♥ Herz	♦ Karo
Anzahl			
6	1	3	2

Die Karten werden gemischt und verdeckt auf den Tisch gelegt. Zwei Karten werden gleichzeitig gezogen.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine rote und eine schwarze Karte zu erhalten?

Die zwölf Karten werden für ein Glücksspiel eingesetzt. Es sollen ebenfalls zwei Karten gleichzeitig gezogen werden.

Ereignis	**Gewinn**
zweimal Karo	10,00 €
zweimal Herz	5,00 €
sonstige	kein Gewinn
Einsatz pro Spiel 1,00 €	

Dazu wird nebenstehender Gewinnplan geprüft.

Berechnen Sie den Erwartungswert.

Sophie macht den Vorschlag, den Gewinn für «zweimal Karo» auf $20,00$ € hochzusetzen und alles andere zu belassen.

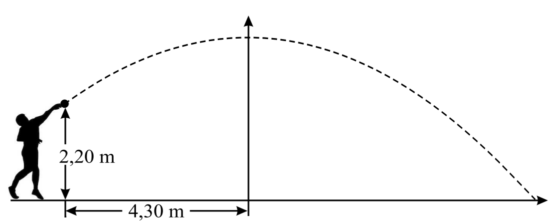
Der Betreiber des Gewinnspiels protestiert und behauptet, er würde dann Verlust machen.

Hat der Betreiber Recht? Begründen Sie durch Rechnung.

b) David und Tim messen sich im Kugelstoßen. Beim Stoß von David verlässt die Kugel seine Hand in einer Höhe von $2,20\,\text{m}$ (siehe Skizze). 5 P

Nach einer horizontalen Entfernung von $4,30\,\text{m}$ hat die Kugel ihre maximale Höhe von $3,90\,\text{m}$ erreicht.

Die Flugbahn der Kugel lässt sich annähernd durch eine Parabel mit der Funktionsgleichung $y = ax^2 + c$ beschreiben.



Welche Weite hat David erzielt?

Tim stößt die Kugel ebenfalls aus dem Stoßkreis. Die Kugel verlässt seine Hand in einer Höhe von $1,90\,\text{m}$.

Die Parabelgleichung für diesen Stoß lautet: $y = -\frac{1}{10}x^2 + 3,5$.

Vergleichen Sie die beiden Kugelstoßweiten.

Tipps Teil A1 2015

1) Verwende die binomischen Formeln: $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ und $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$.

2) Zähle die Anzahl der runden Plättchen in jedem Muster und überlege, wie viele jedes Mal dazukommen.

3) Die Oberfläche eines Würfels erhältst Du mit der Formel: $\mathrm{O}_{\text{Würfel}} = 6\cdot a^2$.
Die Mantelfläche eines Zylinders erhältst Du mit der Formel: $\mathrm{M}_{\text{Zylinder}} = 2\cdot\pi\cdot r\cdot h$.

4) Bestimme aufgrund der Pfadregeln mit P(rr) die Wahrscheinlichkeit P(r) bei einmaligem Ziehen und damit die Anzahl der roten Kugeln und die Anzahl der Kugeln insgesamt. Prüfe Deine Vermutung.

5) Skizziere die Kosinuskurve und überlege, für welche Winkel die Kosinuswerte gleich sind.

6) Versuche, das Netz so zu falten, dass es genau um einen Würfel herum passt. Überlege, ob es leere Seiten gibt oder ob Seiten doppelt bedeckt sind.

7) Bestimme den Scheitel der Normalparabel p und zeichne sie mit der Parabelschablone ein. Bestimme die Steigung m und den y-Achsenabschnitt b der Geraden und zeichne sie ebenfalls ein. Lies die Koordinaten eines gemeinsamen Punktes ab. Prüfe Deine Vermutung, indem Du den x-Wert des Punktes in die Gleichung von p und in die Gleichung von g einsetzt.

Tipps Teil A2 2015

1) Um den Umfang des Dreiecks EBC zu berechnen, benötigst Du noch die Seiten $\overline{\mathrm{BC}}$ und $\overline{\mathrm{BE}}$. Trage alle bekannten Maße und Winkel in eine Skizze ein. Im Dreieck ADC kannst Du die Seite $\overline{\mathrm{AD}}$ mithilfe des Kosinusverhältnisses und die Seite $\overline{\mathrm{CD}}$ mithilfe des Sinusverhältnisses bestimmen. Beachte, dass das Dreieck AEC gleichschenklig ist, so dass gilt: $\overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{DE}}$. Im Dreieck DBC kannst Du nun die Seite $\overline{\mathrm{BD}}$ mithilfe des Tangensverhältnisses und die Seite $\overline{\mathrm{BC}}$ mithilfe des Sinusverhältnisses bestimmen. Damit erhältst Du $\overline{\mathrm{BE}} = \overline{\mathrm{BD}} - \overline{\mathrm{DE}}$. Damit erhältst Du den Umfang des Dreiecks EBC: $\mathrm{U}_{\mathrm{EBC}} = \overline{\mathrm{BE}} + \overline{\mathrm{BC}} + \overline{\mathrm{CE}}$.

2) Das Volumen des Kegels erhältst Du mit der Formel $\mathrm{V_K} = \frac{1}{3}\cdot\mathrm{G_K}\cdot h_\mathrm{K}$. Beachte, dass der Radius r_K des Kegels die Hälfte des Durchmessers ist, also $r_\mathrm{K} = \frac{d_\mathrm{K}}{2}$. Bestimme das Wasservolumen, welches die Hälfte des Kegelvolumens einnimmt. Das Volumen der Pyramide erhältst Du mit der Formel $\mathrm{V_P} = \frac{1}{3}\cdot\mathrm{G_P}\cdot h_\mathrm{P}$. Bestimme die Grundfläche der Pyramide mit der Formel $\mathrm{G_P} = a\cdot a = a^2$. Die Höhe h_P der Pyramide erhältst Du mithilfe des Satzes des Pythagoras: $s_\mathrm{P}^2 = h_\mathrm{P}^2 + z^2$ und $z^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$, wobei z die halbe Diagonale des Quadrats ist. Skizziere die entsprechenden rechtwinkligen Dreiecke.

3) Bestimme den Wert der Aktie «Motelo» im Jahr 2010 und im Jahr 2013 sowie den Anstieg, indem Du die Differenz bildest. Um zu berechnen, um wie viel Prozent der Wert der Aktie von 2010 bis 2013 insgesamt angestiegen ist, teilst Du den Anstieg durch den Wert im Jahr 2010. Alternativ kannst Du auch die Prozentformel verwenden. Da am Ende des Jahres 2014 der Wert der Aktie 15,4 % über dem Wert am Ende des Jahres 2013 lag, erhältst Du den Wert im Jahr 2014, indem Du 15,4 % vom Wert im Jahr 2013 berechnest und zu diesem addierst. Um den jährlich gleichbleibenden Zinssatz zu ermitteln, damit man denselben Wertzuwachs von 2009 bis 2013 erhält, verwendest Du die Wachstumsformel $\mathrm{W}_n = \mathrm{W}_0 \cdot q^n$ mit $q = 1 + \frac{p}{100}$. Stelle damit eine Gleichung auf und löse diese durch Wurzelziehen.

4) Überlege, welche Punkte der gegebenen Wertetabelle eindeutig auf nur einem bestimmten Graphen liegen. Die Gleichung von p_1 erhältst Du mit der Scheitelform $y = (x-d)^2 + c$. Bestimme anhand des Schaubilds die Nullstellen x_1 und x_2 der nach oben geöffnete Normalparabel p_2. Damit erhältst Du die Gleichung von p_2 mit dem Nullstellenansatz $y = (x-x_1)\cdot(x-x_2)$. Die Koordinaten des Schnittpunkts Q der beiden Normalparabeln p_1 und p_2 erhältst Du durch Gleichsetzen der Gleichungen von p_1 und p_2. Den zugehörigen y-Wert erhältst Du, indem Du den erhaltenen x-Wert in die Gleichung von p_1 einsetzt. Bestimme die Koordinaten des Scheitelpunkts S_4 sowie eines weiteren Punktes A der Parabel p_4 anhand des Schaubildes. Setze die Koordinaten von S_4 in den Ansatz $y = ax^2 + c$ ein, da p_4 achsensymmetrisch zur y-Achse ist. Anschließend setzt Du noch die Koordinaten von A in diese Gleichung ein.

5) Beachte, dass die Wahrscheinlichkeiten, beim ersten Zug rot, blau oder zu ziehen, zusammen Eins ergeben müssen. Forme die Prozentzahl in einen Bruch um. Bestimme die Anzahl der roten, blauen und grünen Kugeln im Behälter. Zeichne damit ein vollständiges Baumdiagramm. Beachte, dass es sich um Ziehen ohne Zurücklegen handelt, d.h. die Wahrscheinlichkeiten ändern sich bei jedem Zug. Die Wahrscheinlichkeit, höchstens eine grüne Kugel zu ziehen, erhältst Du mithilfe der Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses $\mathrm{P(A)} = 1 - \mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{A}}\right)$ und der 1. Pfadregel (Produktregel). Wenn im anderen Behälter von jeder Farbe doppelt so viele Kugeln liegen, erstellst Du erneut ein Baumdiagramm. Die Wahrscheinlichkeit, höchstens eine grüne Kugel zu ziehen, erhältst Du ebenfalls mithilfe der Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses und der 1. Pfadregel (Produktregel).

6) Zuerst bestimmst du die Kennwerte der dargestellten Boxplots. Beachte, dass sich die beiden Boxplots nur im unteren Quartil unterscheiden. Berechne für Klasse 10a das untere Quartil. In der Klasse 10a erhältst Du die Anzahl n der Schüler, indem Du die Balken addierst. Berechne $\mathrm{n} \cdot 0,25$ und bestimme damit q_u. Überlege, in welchem Balken dieser Wert enthalten ist. Bestimme die Anzahl der Schüler mit fünf oder mehr Punkten. Den prozentualen Anteil erhältst Du, indem Du die Anzahl der Schüler mit fünf oder mehr Punkten durch die Anzahl der Schüler insgesamt teilst. Die durchschnittliche Punktzahl der Klasse 10b erhältst Du, indem Du die Anzahl der Punkte insgesamt durch die Anzahl

der Schüler der Klasse 10b teilst. Bestimme dazu die Anzahl der Schüler der Klasse 10b sowie ihre Gesamtpunktzahl.

Tipps Teil B 2015

Aufgabe 1

a) Trage alle bekannten Maße und Winkel in eine Skizze ein. Zeichne zusätzlich das Lot von D auf die Seite AE. Im Dreieck AFD kannst Du die Seite $\overline{\text{AF}}$ mit dem Kosinusverhältnis und die Seite $\overline{\text{DF}}$ mit dem Sinusverhältnis bestimmen. Damit erhältst Du $\overline{\text{EF}} = \overline{\text{AE}} - \overline{\text{AF}}$. Im Dreieck EDF kannst Du die Seite $\overline{\text{DE}}$ mithilfe des Satzes des Pythagoras bestimmen. Damit erhältst Du $\overline{\text{BE}} = \overline{\text{DE}}$ und $\overline{\text{BF}} = \overline{\text{EF}} + \overline{\text{BE}}$. Mit $\overline{\text{CD}} = \overline{\text{BF}}$ und $\overline{\text{BC}} = \overline{\text{DF}}$ erhältst Du im Dreieck BCD den Winkel δ_1 mithilfe des Tangensverhältnisses. Den Flächeninhalt des Dreiecks EBD erhältst Du mit der Formel $\text{A} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$. Verwende die Grundseite $g = \overline{\text{BE}}$ und die zugehörige Höhe $h = \overline{\text{DF}}$.

b) Aus der Wertetabelle kannst Du die Koordinaten zweier Punkte A und B ablesen. Als Ansatz für die Gleichung einer verschobenen nach oben geöffneten Normalparabel p verwendest Du $y = x^2 + px + q$. Setze die Koordinaten von A und B in den Ansatz ein und löse die erhaltenen Gleichungen. Mithilfe des Taschenrechners kannst Du die Wertetabelle vervollständigen. Die Gleichung der Geraden g erhältst Du, indem Du die Steigung m und die Koordinaten des Punktes P in die Hauptform $y = mx + b$ einsetzt. Um rechnerisch nachzuweisen, dass p und g keine gemeinsamen Punkte haben, setzt Du die Gleichungen von p und g gleich. Verwende zur Lösung der quadratischen Gleichung die pq-Formel. Falls unter der Wurzel eine negative Zahl steht, gibt es keine reelle Lösung. Die Koordinaten des Scheitelpunkts S von p erhältst Du aus Symmetriegründen mithilfe der Wertetabelle. Alternativ kannst Du die Koordinaten von S auch durch quadratische Ergänzung bestimmen. Beachte, dass die Gerade h parallel zur Geraden g verläuft und damit dieselbe Steigung wie g hat. Die Gleichung der Geraden h erhältst Du, indem Du die Steigung m und die Koordinaten des Scheitelpunkts S von p in die Hauptform $y = mx + b$ einsetzt. Die Koordinaten des Schnittpunktes R der Geraden h mit der x-Achse erhältst Du, indem Du die Gleichung $y = 0$ nach x auflöst.

Aufgabe 2

a) Berechne zuerst den Flächeninhalt der Grundfläche ABC des Prismas. Den Flächeninhalt des Dreiecks ABC erhältst Du mit der Formel $\text{A}_{\text{ABC}} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$. Als Grundseite des Dreiecks ABC wählst Du $a = \overline{\text{AB}}$. Zeichne die Höhe h_a des Dreiecks ABC auf die Seite a ein, so dass die Seite a durch einen Punkt D halbiert wird. Beachte, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist, so dass gilt: $\overline{BD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB}$. Die Höhe h_a des Dreiecks ABC erhältst Du im rechtwinkligen Dreieck BCD mithilfe des Tangensverhältnisses. Bestimme den Radius r sowie die Höhe h_{Ke} des Kegels. Das Volumen eines Kegels erhältst Du mit der Formel $V_{Ke} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h_{Ke}$. Das Volumen des Prismas erhältst Du, indem Du vom Volumen des zusammengesetzten Körpers das halbe Kegelvolumen subtrahierst. Das Volumen eines Prismas erhältst Du mit der Formel $V_{Pr} = G_{Pr} \cdot h_{Pr}$. Da die Grundfläche des Prismas das Dreieck ABC ist, kannst Du damit die Höhe («Länge») h_{Pr} des Prismas berechnen. Die Gesamtlänge k des zusammengesetzten Körpers erhältst Du, indem Du zur Höhe («Länge») des Prismas den Radius des Kegels addierst.

b) Um die Gleichung $y = ax^2 + c$ einer Parabel p_1 mit dem Scheitelpunkt S_1 zu bestimmen, setzt Du die Koordinaten von S_1 in die Gleichung von p_1 ein. Anschließend setzt Du noch die Koordinaten des Punktes $N_2(3 \mid 0)$ in die Gleichung von p_1 ein. Die Gleichung einer nach oben geöffneten Normalparabel p_2 mit dem Scheitelpunkt S_2 erhältst Du mit der Scheitelform $y = (x-d)^2 + c$. Die Koordinaten des gemeinsamen Punktes T der beiden Parabeln erhältst Du durch Gleichsetzen der Gleichungen von p_1 und p_2. Zur Lösung der entstandenen quadratischen Gleichung verwendest Du die pq-Formel. Den zugehörigen y-Wert erhältst Du, indem Du den erhaltenen x-Wert in die Gleichung von p_1 einsetzt. Zeichne das Dreieck N_1N_2T. Den Flächeninhalt des Dreiecks N_1N_2T erhältst Du mit der Formel $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$. Als Grundseite g verwendest Du $g = \overline{N_1N_2}$, die zugehörige Höhe h ist der Abstand von T zur x-Achse. Beachte, dass der Flächeninhalt des Dreiecks N_1N_2T am größten ist, wenn die Höhe des Dreiecks am größten ist, da die Grundseite gleich bleibt.

Aufgabe 3

a) Bestimme die Anzahl der schwarzen und der roten Karten. Bezeichne mit s: schwarz und mit r: rot, und bestimme die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten beim ersten Zug. Beachte, dass zwei Karten gleichzeitig gezogen werden, so dass es sich um «Ziehen ohne Zurücklegen» handelt, d.h. die Wahrscheinlichkeiten ändern sich beim zweiten Zug. Zeichne ein Baumdiagramm. Die Wahrscheinlichkeit, eine rote und eine schwarze Karte zu erhalten, erhältst Du mithilfe der Pfadregeln (Produkt- und Summenregel). Um den Erwartungswert für den Gewinn eines Spielers zu bestimmen, berechnest Du zuerst die Wahrscheinlichkeiten für die möglichen Ergebnisse, bei denen Gewinne erzielt werden. Bezeichne mit K: Karo und mit H: Herz, und berechne die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten beim ersten Zug. Beachte, dass es sich wieder um Ziehen ohne Zurücklegen handelt, so dass sich die Wahrscheinlichkeiten beim zweiten Zug ändern. Zeichne ein Baumdiagramm. Die Wahrscheinlichkeiten für einen Gewinn erhältst Du wieder mithilfe der 1. Pfadregel (Produktregel). Den Erwartungswert E_1 für den Gewinn eines Spielers erhältst Du, indem Du die Gewinne für das jeweilige Ergebnis mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten multiplizierst und den Einsatz subtrahierst. Berechne den neuen Erwartungswert E_2, wenn der Gewinn für «zweimal Karo» auf $20,00$ € erhöht wird. Überlege, ob der Spieler oder der Betreiber auf lange Sicht pro Spiel Verlust macht.

b) Lege das Koordinatensystem so, dass die x-Achse auf dem Boden liegt und die y-Achse durch den Scheitelpunkt S der parabelförmigen Flugbahn geht. Bestimme die Koordinaten des Scheitels S der Parabel p und setze sie in den gegebenen Ansatz ein. Bestimme die Koordinaten des Abwurfpunkts A, in dem die Kugel Davids Hand verlässt. Setze die Koordinaten von A ebenfalls in die Parabelgleichung von p ein. Den Auftreffpunkt D von Davids Kugel erhältst Du, indem Du die Flugbahn von Davids Kugel mit der x-Achse schneidest. Dazu löst Du die Gleichung $y = 0$ durch Wurzelziehen nach x auf. Überlege, welche Lösung aufgrund des Sachzusammenhangs in Frage kommt. Die Weite w von David erhältst Du, indem Du den x-Wert des Abwurfpunkts A vom x-Wert des Auftreffpunkts D subtrahierst.

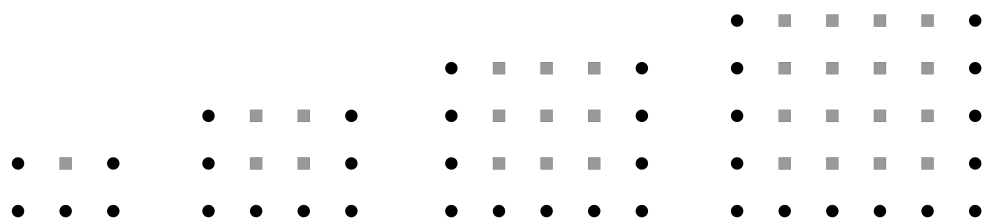
Bestimme die Koordinaten des Abwurfpunkts B, in dem die Kugel Tims Hand verlässt, indem Du $y = 1,90$ in die gegebene Parabelgleichung einsetzt und die entstandene Gleichung nach x durch Wurzelziehen auflöst. Überlege, welche Lösung aufgrund des Sachzusammenhangs in Frage kommt. Den Auftreffpunkt T von Tims Kugel erhältst Du, indem Du die Flugbahn von Tims Kugel mit der x-Achse schneidest. Dazu löst Du wieder die Gleichung $y = 0$ durch Wurzelziehen nach x auf. Überlege, welche Lösung aufgrund des Sachzusammenhangs in Frage kommt. Die Weite W von Tim erhältst Du, indem Du den x-Wert des Abwurfpunkts B vom x-Wert des Auftreffpunkts T subtrahierst. Berechne die Differenz der beiden Wurfweiten und gib an, wer weiter wirft.

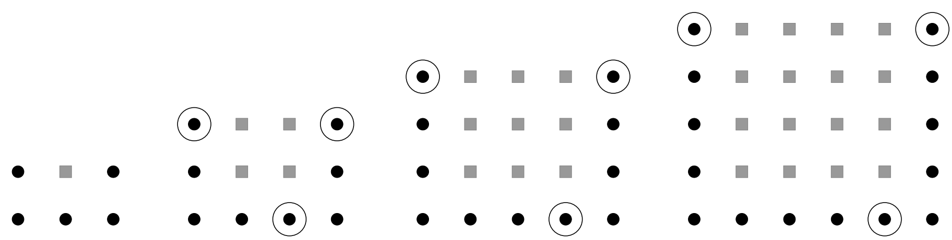
Lösungen Teil A1 2015

1) Mithilfe der binomischen Formeln kann man den gegebenen Term vereinfachen:

$$\begin{aligned}(2a+b)^2-(a+b)^2+(a-b)^2 &= 4a^2+4ab+b^2-\left(a^2+2ab+b^2\right)+a^2-2ab+b^2\\ &= 4a^2+4ab+b^2-a^2-2ab-b^2+a^2-2ab+b^2\\ &= 4a^2+b^2\end{aligned}$$

2) Bei jedem Schritt kommen 3 runde Plättchen dazu: Eins links, eins rechts und eins unten. Also erhält man folgende Zahlenfolge: 5, 8, 11, 14, 17, ...





Somit benötigt sie für das 7. Muster 23 runde Plättchen.

3) Da die Oberfläche eines Würfels aus sechs Quadraten besteht, erhält man die Oberfläche mit der Formel: $O_{\text{Würfel}} = 6 \cdot a^2$.
Für einen Würfel mit Kantenlänge $4{,}0\,\text{cm}$ gilt damit:

$$O_{\text{Würfel}} = 6 \cdot 4^2 = 6 \cdot 16 = 96\,\text{cm}^2$$

Die Mantelfläche eines Zylinders erhält man mit der Formel: $M_{\text{Zylinder}} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$.
Für einen Zylinder mit Radius $3{,}0\,\text{cm}$ und Höhe $5{,}0\,\text{cm}$ gilt damit:

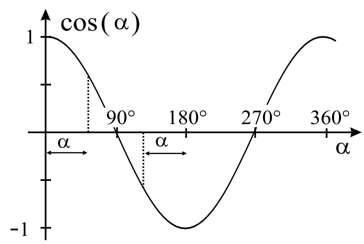
$$M_{\text{Zylinder}} = 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 5 = 30 \cdot \pi \approx 30 \cdot 3{,}14 = 94{,}2\,\text{cm}^2$$

Da die Oberfläche des Würfels größer als die Mantelfläche des Zylinders ist, hat Pia mit ihrer Behauptung Recht.

4) Wegen $P(rr) = \frac{9}{25} = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5}$ muss aufgrund der Pfadregeln gelten: $P(r) = \frac{3}{5} = \frac{6}{10}$.
Somit sind im Gefäß insgesamt 10 Kugeln, 6 rote und 4 weiße.
Damit gilt auch: $P(w) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ und $P(ww) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$.
Somit müssen dem Gefäß drei rote Kugeln hinzugefügt werden.

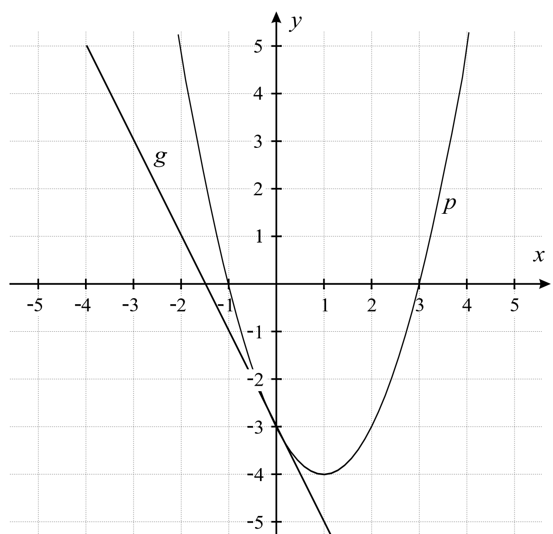
5) Anhand der Kosinuskurve kann man erkennen, dass gilt: $\cos(\alpha) = -\cos(180° - \alpha)$:
Damit gilt:
$\cos(45°) = -\cos(180° - 45°) = -\cos(135°)$

☒ $\cos 45$ ☐ $\cos 135$
☒ $-\cos 135$ ☐ $\cos 145$



6) Nur Netz B stellt ein Würfelnetz dar. Wenn man versucht, die anderen abgebildeten «Netze» um einen Würfel zu legen, treten folgende Fehler auf: A lässt sich nicht «falten», bei C und D bleibt eine Würfelseite «leer», während eine andere doppelt überdeckt wird.

7) Die Normalparabel p mit der Gleichung $p\colon y = (x-1)^2 - 4$ hat den Scheitel $S(1 \mid -4)$ und kann mit der Parabelschablone eingezeichnet werden.
Die Gerade g mit der Gleichung $g: y = -2x - 3$ hat die Steigung $m = -2$ und den y-Achsenabschnitt $b = -3$ und kann auch eingezeichnet werden.
An der Zeichnung kann man vermuten, dass p und g den Punkt $(0 \mid -3)$ gemeinsam haben.



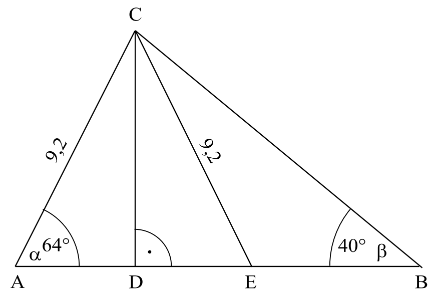
Um diese Vermutung nachzuweisen, setzt man $x = 0$ in die Parabel- und in die Geradengleichung ein:

$$y = (0-1)^2 - 4 = 1 - 4 = -3$$
$$y = -2 \cdot 0 - 3 = -3$$

Damit haben p und g den Punkt $(0 \mid -3)$ gemeinsam.
Somit hat Sophia nicht Recht.

Lösungen Teil A2 2015

1) Um den Umfang des Dreiecks EBC zu berechnen, benötigt man noch die Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{BE}$. Die bekannten Maße und Winkel werden in eine Skizze eingetragen:



Im Dreieck ADC kann man die Seiten $\overline{AD}$ und $\overline{CD}$ bestimmen:

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha) &= \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} \\
\cos(\alpha)\cdot\overline{AC} &= \overline{AD} \\
\cos(64^\circ)\cdot 9{,}2 &= \overline{AD} \\
\overline{AD} &\approx 4{,}03\,\text{cm}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha) &= \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} \\
\sin(\alpha)\cdot\overline{AC} &= \overline{CD} \\
\sin(64^\circ)\cdot 9{,}2 &= \overline{CD} \\
\overline{CD} &\approx 8{,}27\,\text{cm}
\end{aligned}$$

Da das Dreieck AEC gleichschenklig ist, ergibt sich:

$$\overline{AD} = \overline{DE} = 4{,}03\,\text{cm}$$

Im Dreieck DBC kann man nun die Seiten $\overline{BD}$ und $\overline{BC}$ bestimmen:

$$\begin{aligned}
\tan(\beta) &= \frac{\overline{CD}}{\overline{BD}} \\
\tan(\beta)\cdot\overline{BD} &= \overline{CD} \\
\overline{BD} &= \frac{\overline{CD}}{\tan(\beta)} \\
\overline{BD} &= \frac{8{,}27}{\tan(40^\circ)} \\
\overline{BD} &\approx 9{,}86\,\text{cm}
\end{aligned}$$

und

$$\sin(\beta) = \frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\overline{\mathrm{BC}}}$$
$$\sin(\beta) \cdot \overline{\mathrm{BC}} = \overline{\mathrm{CD}}$$
$$\overline{\mathrm{BC}} = \frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\sin(\beta)}$$
$$\overline{\mathrm{BC}} = \frac{8,27}{\sin(40^\circ)}$$
$$\overline{\mathrm{BC}} \approx 12,87\,\mathrm{cm}$$

Damit erhält man:

$$\overline{\mathrm{BE}} = \overline{\mathrm{BD}} - \overline{\mathrm{DE}} = 9,86 - 4,03 = 5,83\,\mathrm{cm}$$

Somit gilt für den Umfang des Dreiecks EBC:

$$\mathrm{U_{EBC}} = \overline{\mathrm{BE}} + \overline{\mathrm{BC}} + \overline{\mathrm{CE}} = 5,83 + 12,87 + 9,2 = 27,9\,\mathrm{cm}$$

Das Dreieck EBC hat einen Umfang von $27,9\,\mathrm{cm}$.

2) Das Volumen des Kegels erhält man mit der Formel $\mathrm{V_K} = \frac{1}{3} \cdot \mathrm{G_K} \cdot h_\mathrm{K}$.
Der Radius r_K des Kegels ist die Hälfte des Durchmessers, also $r_\mathrm{K} = \frac{d_\mathrm{K}}{2} = \frac{20}{2} = 10\,\mathrm{cm}$.
Damit ergibt sich:

$$\mathrm{V_K} = \frac{1}{3} \cdot \mathrm{G_K} \cdot h_\mathrm{K} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r_\mathrm{K}^2 \cdot h_\mathrm{K} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 10^2 \cdot 30 \approx 3141,59\,\mathrm{cm}^3$$

Da das Wasservolumen $\mathrm{V_W}$ die Hälfte des Kegelvolumens einnimmt, ergibt sich:

$$\mathrm{V_W} = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{V_K} = \frac{1}{2} \cdot 3141,59 = 1570,80\,\mathrm{cm}^3$$

Das Volumen der Pyramide erhält man mit der Formel $\mathrm{V_P} = \frac{1}{3} \cdot \mathrm{G_P} \cdot h_\mathrm{P}$.
Für die Grundfläche gilt:

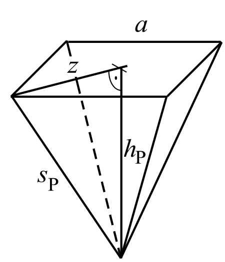
$$\mathrm{G_P} = a \cdot a = a^2 = 16^2 = 256\,\mathrm{cm}^2$$

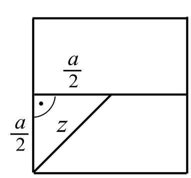
Die Höhe h_P der Pyramide erhält man mithilfe des Satzes des Pythagoras:

$$s_\mathrm{P}^2 = h_\mathrm{P}^2 + z^2$$

und

$$z^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$





Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} z^2 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\ z^2 &= \left(\frac{16}{2}\right)^2 + \left(\frac{16}{2}\right)^2 \\ z^2 &= 128 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} s_\mathrm{p}^2 &= h_\mathrm{P}^2 + z^2 \\ s_\mathrm{p}^2 - z^2 &= h_\mathrm{P}^2 \\ \sqrt{s_\mathrm{p}^2 - z^2} &= h_\mathrm{P} \\ \sqrt{24^2 - 128} &= h_\mathrm{P} \\ h_\mathrm{P} &\approx 21,17\,\mathrm{cm} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich das Volumen der Pyramide:

$$\mathrm{V_P} = \frac{1}{3} \cdot \mathrm{G_P} \cdot h_\mathrm{P} = \mathrm{V_P} = \frac{1}{3} \cdot 256 \cdot 21,17 = 1806,51\,\mathrm{cm}^3$$

Da das Volumen der Pyramide größer als das Wasservolumen ist, läuft das Wasser nicht über.

3) Im Jahr 2010 betrug der Wert der Aktie «Motelo» 31,98 €, Im Jahr 2013 52,00 €. Den Anstieg erhält man, indem man die Differenz der beiden Werte bildet:

$$52,00\,€ - 31,98\,€ = 20,02\,€$$

Damit beträgt der Anstieg 20,02 €.
Um zu berechnen, um wie viel Prozent der Wert der Aktie von 2010 bis 2013 insgesamt angestiegen ist, teilt man den Anstieg durch den Wert im Jahr 2010:

$$\frac{20,02}{31,98} \approx 0,626 = 62,6\%$$

Alternativ kann man auch die Prozentformel verwenden:

$$\begin{aligned} \mathrm{P} &= \mathrm{G} \cdot \frac{p}{100} \\ \frac{\mathrm{P} \cdot 100}{\mathrm{G}} &= p \\ \frac{20,02 \cdot 100}{31,98} &= p \\ 62,6 &\approx p \end{aligned}$$

Somit ist der Wert der Aktie um etwa $62,6\,\%$ gestiegen.

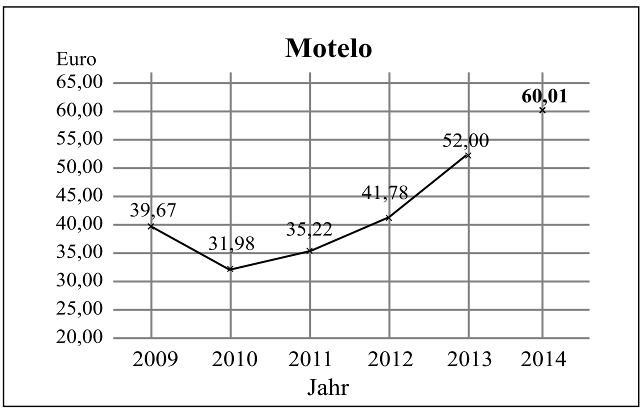
Da am Ende des Jahres 2014 der Wert der Aktie $15,4\,\%$ über dem Wert am Ende des Jahres 2013 lag, erhält man den Wert im Jahr 2014, indem man $15,4\,\%$ von $52,00$ € berechnet und zu $52,00$ € addiert:

$$15,4\% \text{ von } 52,00\,€ = 0,154 \cdot 52\,€ \approx 8,01\,€$$

Damit gilt für den Wert im Jahr 2014:

$$52,00\,€ + 8,01\,€ = 60,01\,€$$

Diesen Wert kann man im Diagramm einzeichnen:



Um den jährlich gleichbleibenden Zinssatz zu ermitteln, damit man einen Wertzuwachs von $39,67$ € im Jahr 2009 auf $52,00$ € im Jahr 2013 erhält, verwendet man die Zinseszinsformel $\mathrm{K}_n = \mathrm{K}_0 \cdot q^n$ mit $q = 1 + \frac{p}{100}$. Dazu stellt man eine Gleichung auf und löst diese nach q auf:

$$\begin{aligned} 39,67 \cdot q^4 &= 52,00 \\ q^4 &= \frac{52,00}{39,67} \\ q &= \sqrt[4]{\frac{52,00}{39,67}} \\ q &\approx 1,070 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} q &= 1 + \frac{p}{100} \\ 1{,}070 &= 1 + \frac{p}{100} \\ 0{,}070 &= \frac{p}{100} \\ 7{,}0 &= p \end{aligned}$$

Somit hätte eine Bank einen Zinssatz von 7,0 % bieten müssen.

4) Um der gegebenen Wertetabelle ihren Graphen zuzuordnen, bestimmt man zwei Punkte, die eindeutig auf einer der Parabeln liegen: Die Punkte $(0 \mid 1)$ und $(1 \mid 0)$ aus der Wertetabelle liegen nur auf p_3. Also gehört die Wertetabelle zu p_3.

Die nach oben geöffnete Normalparabel p_1 hat den Scheitelpunkt $S_1(6 \mid 4)$.
Die Gleichung von p_1 erhält man mit der Scheitelform $y = (x-d)^2 + c$:

$$p_1\colon\ y = (x-6)^2 + 4 = x^2 - 12x + 36 + 4 = x^2 - 12x + 40$$

Die nach oben geöffnete Normalparabel p_2 hat die Nullstellen $x_1 = 2$ und $x_2 = 6$.
Die Gleichung von p_2 erhält man mit dem Nullstellenansatz $y = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$:

$$p_2\colon\ y = (x-2) \cdot (x-6) = x^2 - 6x - 2x + 12 = x^2 - 8x + 12$$

Die Koordinaten des Schnittpunkts Q der beiden Normalparabeln p_1 und p_2 erhält man durch Gleichsetzen der Gleichungen von p_1 und p_2:

$$\begin{aligned} x^2 - 12x + 40 &= x^2 - 8x + 12 \\ -4x &= -28 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

Den zugehörigen y-Wert erhält man, indem man $x = 7$ in die Gleichung von p_1 einsetzt:

$$y = 7^2 - 12 \cdot 7 + 40 = 5$$

Somit hat der Schnittpunkt Q von p_1 und p_2 die Koordinaten $Q(7 \mid 5)$.

Die Parabel p_4 hat den Scheitelpunkt $S_4(0 \mid 1)$ und geht durch den Punkt $A(2 \mid 3)$.
Setzt man die Koordinaten von S_4 in den Ansatz $y = ax^2 + c$ ein (da es sich um eine zur y-Achse symmetrische Parabel handelt), ergibt sich:

$$1 = a \cdot 0^2 + c \ \Rightarrow\ c = 1$$

Damit erhält man:

$$y = a \cdot x^2 + 1$$

Setzt man die Koordinaten von A in diese Gleichung ein, erhält man:

$$3 = a \cdot 2^2 + 1 \;\Rightarrow\; a = \frac{1}{2}$$

Somit hat die Parabel p_4 die Gleichung:

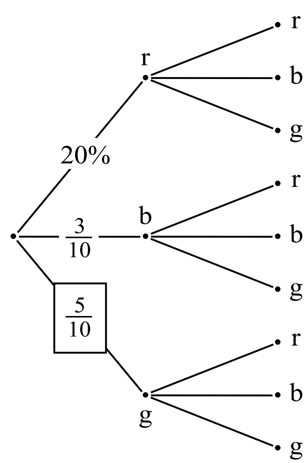
$$p_4\colon\, y = \frac{1}{2}x^2 + 1$$

5) Die Wahrscheinlichkeit, beim ersten Zug rot, blau oder grün zu ziehen, beträgt insgesamt Eins. Da die Wahrscheinlichkeit, beim ersten Zug rot zu ziehen, $20\% = 0,20 = \frac{2}{10}$ und für blau $\frac{3}{10} = 30\%$ beträgt, gilt für die Wahrscheinlichkeit, grün (g) zu ziehen:

$$\mathrm{P(g)} = 1 - \frac{2}{10} - \frac{3}{10} = \frac{5}{10} = 50\%$$

Damit bestimmt man die Anzahl der Kugeln im Behälter:

$$20\% \text{ von } 20 = 4$$
$$30\% \text{ von } 20 = 6$$
$$50\% \text{ von } 20 = 10$$

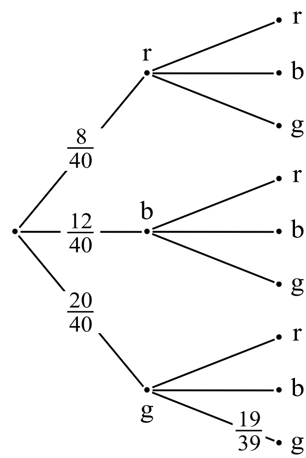


Somit sind im Behälter 4 rote, 6 blaue und 10 grüne Kugeln.
Also kann man das Baumdiagramm vervollständigen:
Die Wahrscheinlichkeit, höchstens eine grüne Kugel zu ziehen, erhält man mithilfe der Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses und der 1. Pfadregel (Produktregel):

$$\begin{aligned}\text{P(höchstens eine grüne Kugel)} &= 1 - \text{P(zwei grüne Kugeln)}\\ &= 1 - \mathrm{P(gg)}\\ &= 1 - \frac{10}{20} \cdot \frac{9}{19}\\ &= \frac{29}{38}\end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, höchstens eine grüne Kugel zu ziehen, beträgt $\frac{29}{38}$.

Wenn im anderen Behälter von jeder Farbe doppelt so viele Kugeln liegen, ergibt sich das rechts gezeichnete Baumdiagramm.
Die Wahrscheinlichkeit, höchstens eine grüne Kugel zu ziehen, erhält man ebenfalls mithilfe der Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses und der 1. Pfadregel (Produktregel):



$$\begin{aligned} \text{P(höchstens eine grüne Kugel)} &= 1 - \text{P(zwei grüne Kugeln)} \\ &= 1 - \text{P(gg)} \\ &= 1 - \frac{20}{40} \cdot \frac{19}{39} \\ &= \frac{59}{78} \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, nun höchstens eine grüne Kugel zu ziehen, beträgt $\frac{59}{78}$.
Wegen $\frac{29}{38} \neq \frac{59}{78}$ hat Uli nicht Recht.

6) Zuerst bestimmt man die Kennwerte der dargestellten Boxplots.
Für Boxplot (1) gilt:

$$\begin{aligned} x_{\text{min}} &= 1 \\ q_u &= 2 \\ z &= 4 \\ q_o &= 5 \\ x_{\text{max}} &= 7 \end{aligned}$$

Für Boxplot (2) gilt:

$$\begin{aligned} x_{\text{min}} &= 1 \\ q_u &= 3 \\ z &= 4 \\ q_o &= 5 \\ x_{\text{max}} &= 7 \end{aligned}$$

Die beiden Boxplots unterscheiden sich nur im unteren Quartil.
Also berechnet man für eine der Klassen das untere Quartil.

In der Klasse 10a erhält man die Anzahl der Schüler, indem man die Balken addiert:

$$\mathrm{n} = 3+5+6+4+5+3+3 = 29$$

Damit ergibt sich für Klasse 10a für das untere Quartil:

$$\mathrm{n} \cdot 0,25 = 29 \cdot 0,25 = 7,25 \;\Rightarrow\; q_u = x_8$$

Der achte Wert ist noch im zweiten Balken enthalten, also gilt: $x_8 = 2$.
Somit gehört zur Klasse 10a Boxplot (1) und zur Klasse 10b Boxplot (2).

Fünf Schüler der Klasse 10a haben 5 Punkte, drei Schüler haben 6 Punkte und drei Schüler haben 7 Punkte, also insgesamt 11 Schüler haben fünf oder mehr Punkte.
Den prozentualen Anteil erhält man, indem man die Anzahl der Schüler mit fünf oder mehr Punkten durch die Anzahl der Schüler insgesamt teilt:

$$\frac{11}{29} \approx 0,379 = 37,9\%$$

Der prozentuale Anteil beträgt etwa $37,9\,\%$.

Die durchschnittliche Punktzahl der Klasse 10b erhält man, indem man die Anzahl der Punkte insgesamt durch die Anzahl der Schüler der Klasse 10b teilt. Zwei Schüler haben jeweils einen Punkt, vier Schüler haben jeweils zwei Punkte, fünf Schüler haben jeweils drei Punkte, sieben Schüler haben jeweils vier Punkte, vier Schüler haben jeweils fünf Punkte und drei Schüler haben jeweils sieben Punkte.
Damit gibt es in der Klasse 10b insgesamt $2+4+5+7+4+3 = 25$ Schüler und für die Anzahl der Punkte gilt:

$$2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 7 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 3 \cdot 7 = 94$$

Damit ergibt sich für die durchschnittliche Anzahl der Punkte:

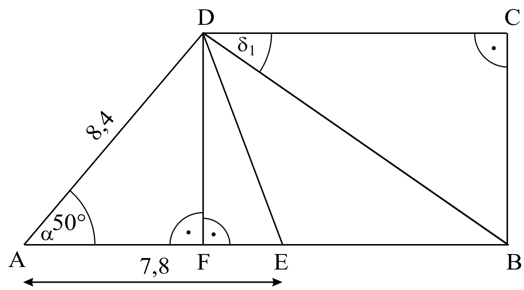
$$\frac{94}{25} = 3,76$$

Die Aussage, dass die durchschnittliche Punktzahl der Klasse 10b genau vier Punkte beträgt, ist somit falsch.

Lösungen Teil B 2015

Aufgabe 1

a) Die bekannten Maße und Winkel werden in eine Skizze eingetragen:



Im Dreieck AFD kann man die Seiten $\overline{AF}$ und $\overline{DF}$ bestimmen:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \frac{\overline{AF}}{\overline{AD}} \\ \cos(\alpha)\cdot\overline{AD} &= \overline{AF} \\ \cos(50^\circ)\cdot 8,4 &= \overline{AF} \\ \overline{AF} &\approx 5,40\,\text{cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) &= \frac{\overline{DF}}{\overline{AD}} \\ \sin(\alpha)\cdot\overline{AD} &= \overline{DF} \\ \sin(50^\circ)\cdot 8,4 &= \overline{DF} \\ \overline{DF} &\approx 6,43\,\text{cm} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\overline{EF} = \overline{AE} - \overline{AF} = 7,8 - 5,40 = 2,40\,\text{cm}$$

Im Dreieck EDF kann man die Seite $\overline{DE}$ mithilfe des Satzes des Pythagoras bestimmen:

$$\begin{aligned} \overline{DE}^2 &= \overline{DF}^2 + \overline{EF}^2 \\ \overline{DE} &= \sqrt{6,43^2 + 2,40^2} \\ \overline{DE} &\approx 6,86\,\text{cm} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\overline{BE} = \overline{DE} = 6,86\,\text{cm}$$

und

$$\overline{BF} = \overline{EF} + \overline{BE} = 2,40 + 6,86 = 9,26\,\text{cm}$$

Mit $\overline{CD} = \overline{BF} = 9,26\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = \overline{DF} = 6,43\,\text{cm}$ erhält man im Dreieck BCD den Winkel

δ_1:

$$
\begin{aligned}
\tan(\delta_1) &= \frac{\overline{\text{BC}}}{\overline{\text{CD}}} \\
\tan(\delta_1) &= \frac{6{,}43}{9{,}26} \\
\delta_1 &= \tan^{-1}\left(\frac{6{,}43}{9{,}26}\right) \\
\delta_1 &\approx 34{,}78^\circ
\end{aligned}
$$

Der Winkel δ_1 beträgt etwa $34{,}8^\circ$.
Den Flächeninhalt des Dreiecks EBD erhält man mit der Formel $\text{A} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$.
Mit der Grundseite $g = \overline{\text{BE}} = 6{,}86\,\text{cm}$ und der zugehörigen Höhe $h = \overline{\text{DF}} = 6{,}43\,\text{cm}$ ergibt sich:

$$\text{A}_{\text{EBD}} = \frac{1}{2} \cdot 6{,}86 \cdot 6{,}43 \approx 22{,}05\,\text{cm}^2$$

Das Dreieck EBD hat einen Flächeninhalt von etwa $22{,}1\,\text{cm}^2$.

b) Aus der Wertetabelle kann man die Punkte $\text{A}(0 \mid 11)$ und $\text{B}(1 \mid 6)$ ablesen.
Als Ansatz für die Gleichung einer verschobenen nach oben geöffneten Normalparabel p verwendet man $y = x^2 + px + q$.
Setzt man die Koordinaten von A in den Ansatz ein, ergibt sich:

$$11 = 0^2 + p \cdot 0 + q \;\Rightarrow\; q = 11$$

Damit erhält man:

$$y = x^2 + px + 11$$

Setzt man die Koordinaten von B in diese Gleichung ein, erhält man:

$$6 = 1^2 + p \cdot 1 + 11 \;\Rightarrow\; p = -6$$

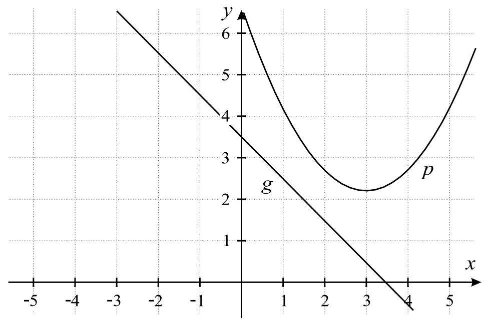
Somit hat die Parabel p die Gleichung:

$$p\colon\; y = x^2 - 6x + 11$$

Mithilfe des Taschenrechners kann man die Wertetabelle vervollständigen:

x	0	1	2	3	4	5
y	11	6	3	2	3	6

Man kann die Situation auch skizzieren:



Die Gleichung der Geraden g, welche die Steigung $m = -1$ hat und durch den Punkt $\mathrm{P}(-2,5 \mid 6)$ geht, erhält man mit der Hauptform $y = mx + b$:

$$6 = -1 \cdot (-2,5) + b \;\Rightarrow\; b = 3,5$$

Damit hat die Gerade g die Gleichung:

$$g\colon\, y = -x + 3,5$$

Um rechnerisch nachzuweisen, dass p und g keine gemeinsamen Punkte haben, setzt man die Gleichungen von p und g gleich:

$$x^2 - 6x + 11 = -x + 3,5$$
$$x^2 - 5x + 7,5 = 0$$

Mithilfe der pq-Formel ($p = -5$ und $q = 7,5$) erhält man:

$$x_{1,2} = -\frac{-5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-5}{2}\right)^2 - 7,5} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{-1,25}$$

Da unter der Wurzel eine negative Zahl steht, gibt es keine reelle Lösung.
Somit haben p und g keine gemeinsamen Punkte.

Die Koordinaten des Scheitelpunkts S von p erhält man aus Symmetriegründen mithilfe der Wertetabelle: $\mathrm{S}(3 \mid 2)$.
Alternativ kann man die Koordinaten von S auch durch quadratische Ergänzung bestimmen:

$$y = x^2 - 6x + 11$$
$$y = x^2 - 6x + 9 - 9 + 11$$
$$y = (x-3)^2 + 2$$

Damit hat der Scheitel S von p die Koordinaten $\mathrm{S}(3 \mid 2)$.
Da die Gerade h parallel zur Geraden g verläuft, hat sie dieselbe Steigung wie g, also

$m = -1$.
Die Gleichung der Geraden h, welche die Steigung $m = -1$ hat und durch den Scheitelpunkt $\mathrm{S}(3 \mid 2)$ von p geht, erhält man mit der Hauptform $y = mx + b$:

$$2 = -1 \cdot 3 + b \;\Rightarrow\; b = 5$$

Damit hat die Gerade h die Gleichung:

$$h\colon\, y = -x + 5$$

Die Koordinaten des Schnittpunktes R der Geraden h mit der x-Achse erhält man, indem man die Gleichung $y = 0$ nach x auflöst:

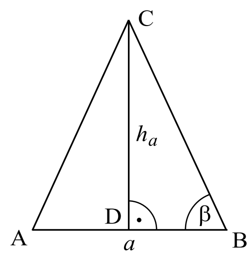
$$\begin{aligned} -x + 5 &= 0 \\ 5 &= x \end{aligned}$$

Somit hat der Punkt R die Koordinaten $\mathrm{R}(5 \mid 0)$.

Aufgabe 2

a) Zuerst berechnet man den Flächeninhalt der Grundfläche ABC des Prismas.

Den Flächeninhalt des Dreiecks ABC erhält man mit der Formel $\mathrm{A_{ABC}} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$.
Als Grundseite des Dreiecks ABC wählt man $a = \overline{\mathrm{AB}} = 11{,}4\,\mathrm{cm}$.
Da das Dreieck ABC gleichschenklig ist, gilt: $\overline{\mathrm{BD}} = \frac{1}{2} \cdot \overline{\mathrm{AB}} = \frac{1}{2} \cdot 11{,}4 = 5{,}7\,\mathrm{cm}$.



Die Höhe h_a des Dreiecks ABC erhält man im rechtwinkligen Dreieck BCD:

$$\begin{aligned} \tan(\beta) &= \frac{h_a}{\overline{\mathrm{BD}}} \\ \tan(\beta) \cdot \overline{\mathrm{BD}} &= h_a \\ \tan(62^\circ) \cdot 5{,}7 &= h_a \\ h_a &\approx 10{,}72 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\mathrm{A_{ABC}} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot 11{,}4 \cdot 10{,}72 \approx 61{,}10\,\mathrm{cm}^2$$

Nun berechnet man das Volumen des Kegels.
Der Kegel hat den Radius

$$r = \frac{1}{2} \cdot \overline{\mathrm{AB}} = \frac{1}{2} \cdot 11{,}4 = 5{,}7\,\mathrm{cm}$$

Die Höhe des Kegels ist

$$h_{\text{Ke}} = h_a = 10{,}72\,\text{cm}$$

Das Volumen eines Kegels erhält man mit der Formel $\text{V}_{\text{Ke}} = \frac{1}{3} \cdot \text{G} \cdot h_{\text{Ke}}$.
Damit erhält man:

$$\text{V}_{\text{Ke}} = \frac{1}{3} \cdot \text{G} \cdot h_{\text{Ke}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h_{\text{Ke}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5{,}7^2 \cdot 10{,}72 \approx 364{,}73\,\text{cm}^3$$

Das Volumen des Prismas erhält man, indem man vom Volumen des zusammengesetzten Körpers das halbe Kegelvolumen subtrahiert:

$$\text{V}_{\text{Pr}} = \text{V}_{ges} - \frac{1}{2} \cdot \text{V}_{\text{Ke}} = 1280 - \frac{1}{2} \cdot 364{,}73 \approx 1097{,}64\,\text{cm}^3$$

Das Volumen eines Prismas berechnet man mit der Formel $\text{V}_{\text{Pr}} = \text{G}_{\text{Pr}} \cdot h_{\text{Pr}}$.
Die Grundfläche des Prismas ist das Dreieck ABC.
Damit kann man die Höhe («Länge») des Prismas berechnen:

$$\begin{aligned} \text{V}_{\text{Pr}} &= \text{G}_{\text{Pr}} \cdot h_{\text{Pr}} \\ \text{V}_{\text{Pr}} &= \text{A}_{\text{ABC}} \cdot h_{\text{Pr}} \\ 1097{,}64 &= 61{,}10 \cdot h_{\text{Pr}} \\ \frac{1097{,}64}{61{,}10} &= h_{\text{Pr}} \\ h_{\text{Pr}} &\approx 17{,}96\,\text{cm} \end{aligned}$$

Die Gesamtlänge k des zusammengesetzten Körpers erhält man, indem man zur Höhe des Prismas den Radius des Kegels addiert:

$$k = h_{\text{Pr}} + r = 17{,}96 + 5{,}7 = 23{,}66\,\text{cm}$$

Die Gesamtlänge des zusammengesetzten Körpers beträgt etwa $23{,}7\,\text{cm}$.

b) Um die Gleichung $y = ax^2 + c$ einer Parabel p_1 mit dem Scheitelpunkt $\text{S}_1\,(0 \mid 4{,}5)$ zu bestimmen, setzt man die Koordinaten von S_1 in die Gleichung von p_1 ein:

$$4{,}5 = a \cdot 0^2 + c \;\Rightarrow\; c = 4{,}5$$

Damit ergibt sich für $p_1 : y = ax^2 + 4{,}5$.
Da auch der Punkt $\text{N}_2(3 \mid 0)$ auf p_1 liegt, setzt man seine Koordinaten ebenfalls in die Gleichung von p_1 ein:

$$0 = a \cdot 3^2 + 4{,}5 \;\Rightarrow\; a = -\frac{1}{2}$$

Somit hat die Parabel p_1 die Gleichung:

$$p_1 : \; y = -\frac{1}{2}x^2 + 4{,}5$$

Die Gleichung einer nach oben geöffneten Normalparabel p_2 mit dem Scheitelpunkt $S_2\,(3 \mid 1,5)$ erhält man mit der Scheitelform $y = (x-d)^2 + c$:

$$p_2\colon\; y = (x-3)^2 + 1,5 = x^2 - 6x + 9 + 1,5 = x^2 - 6x + 10,5$$

Die Koordinaten des gemeinsamen Punktes T der beiden Parabeln erhält man durch Gleichsetzen der Gleichungen von p_1 und p_2:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}x^2 + 4,5 &= x^2 - 6x + 10,5 \\ 0 &= \frac{3}{2}x^2 - 6x + 6 \\ 0 &= x^2 - 4x + 4 \end{aligned}$$

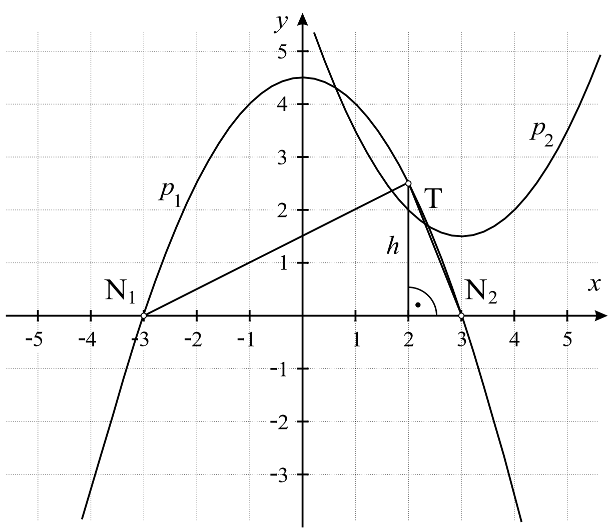
Mithilfe der pq-Formel ($p = -4$ und $q = 4$) erhält man:

$$x_{1,2} = -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - 4}$$

Es ergibt sich als einzige Lösung $x = 2$.
Den zugehörigen y-Wert erhält man, indem man $x = 2$ in p_1 einsetzt:

$$y = -\frac{1}{2} \cdot 2^2 + 4,5 = 2,5$$

Somit hat der Punkt T die Koordinaten $T(2 \mid 2,5)$.



Die Punkte N_1, N_2 und T bilden ein Dreieck.
Den Flächeninhalt des Dreiecks N_1N_2T erhält man mit der Formel $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$.
Als Grundseite g verwendet man $g = \overline{N_1N_2} = 3 - (-3) = 6$.

Die zugehörige Höhe h ist der Abstand von T zur x-Achse, also $h = 2,5$.
Damit ergibt sich:

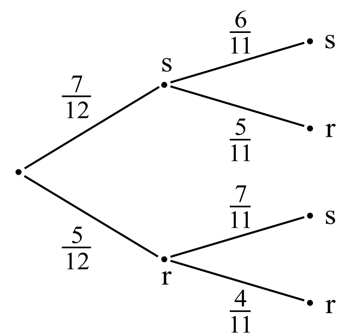
$$\mathrm{A}_{\mathrm{N_1N_2T}} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2,5 = 7,5\,\mathrm{FE}$$

Somit hat das Dreieck $\mathrm{N_1N_2T}$ einen Flächeninhalt von $7,5\,\mathrm{FE}$.

Der Flächeninhalt des Dreiecks $\mathrm{N_1N_2T}$ wird am größten, wenn die Höhe des Dreiecks am größten ist, da die Grundseite gleich bleibt. Dies ist der Fall, wenn sich T im Scheitelpunkt $\mathrm{S_1}$ der Parabel p_1 befindet.

Aufgabe 3

a) Es gibt sieben schwarze und fünf rote Karten. Bezeichnet man mit s: schwarz und mit r: rot, so kann man die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten beim ersten Zug bestimmen: $P(s) = \frac{7}{12}$ und $P(r) = \frac{5}{12}$. Da zwei Karten gleichzeitig gezogen werden, handelt es sich um «Ziehen ohne Zurücklegen», d.h. die Wahrscheinlichkeiten ändern sich beim zweiten Zug. Damit erhält man das rechts gezeichnete Baumdiagramm.

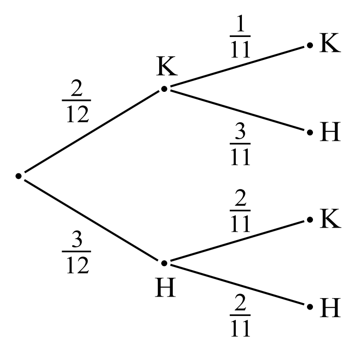


Die Wahrscheinlichkeit, eine rote und eine schwarze Karte zu erhalten, erhält man mithilfe der Pfadregeln (Produkt- und Summenregel):

$$\begin{aligned} \text{P(eine rote und eine schwarze Karte)} &= P(rs) + P(sr) \\ &= \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{11} + \frac{7}{12} \cdot \frac{5}{11} \\ &= \frac{35}{66} \\ &\approx 0{,}53 \end{aligned}$$

Somit beträgt die Wahrscheinlichkeit, eine rote und eine schwarze Karte zu ziehen, etwa 53 %.

Um den Erwartungswert für den Gewinn eines Spielers zu bestimmen, berechnet man zuerst die Wahrscheinlichkeiten für die möglichen Ergebnisse, bei denen Gewinne erzielt werden. Bezeichnet man mit K: Karo und mit H: Herz, so kann man die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten beim ersten Zug bestimmen: $P(K) = \frac{2}{12}$ und $P(H) = \frac{3}{12}$. Da es sich wieder um Ziehen ohne Zurücklegen handelt, ändern sich die Wahrscheinlichkeiten beim zweiten Zug. Man erhält das rechts stehende Baumdiagramm.



Mithilfe der 1. Pfadregel (Produktregel) ergibt sich:

$$\text{P(zweimal Karo)} = P(KK) = \frac{2}{12} \cdot \frac{1}{11} = \frac{1}{66}$$

$$\text{P(zweimal Herz)} = P(HH) = \frac{3}{12} \cdot \frac{2}{11} = \frac{1}{22}$$

Den Erwartungswert E_1 für den Gewinn eines Spielers erhält man, indem man die Gewinne für das jeweilige Ergebnis mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten multipliziert und den Einsatz subtrahiert:

$$E_1 = 10\,€ \cdot \frac{1}{66} + 5\,€ \cdot \frac{1}{22} - 1\,€ = -\frac{41}{66}\,€ \approx -0,62\,€$$

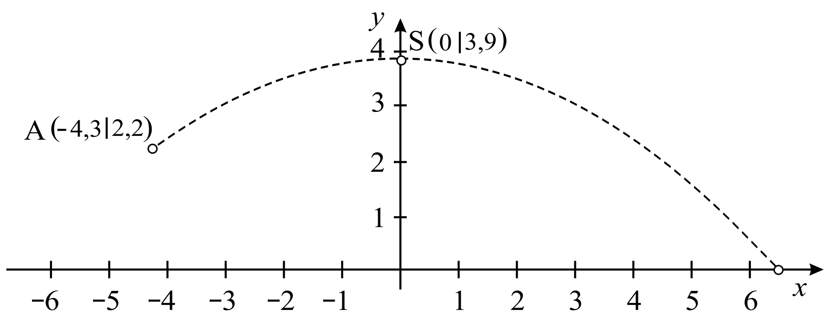
Somit beträgt der Erwartungswert für den Gewinn eines Spielers $-0,62$ Euro, d.h. der Spieler macht auf lange Sicht pro Spiel einen Verlust von $0,62$ Euro.

Wenn der Gewinn für «zweimal Karo» auf $20,00\,€$ erhöht wird, ergibt sich für den neuen Erwartungswert E_2:

$$E_2 = 20\,€ \cdot \frac{1}{66} + 5\,€ \cdot \frac{1}{22} - 1\,€ = -\frac{31}{66}\,€ \approx -0,47\,€$$

Auch bei diesem Gewinnspiel macht der Spieler auf lange Sicht pro Spiel Verlust.
Somit hat der Betreiber mit seiner Behauptung, dass er selbst Verlust macht, nicht Recht.

b) Das Koordinatensystem wird so gelegt, dass die x-Achse auf dem Boden liegt und die y-Achse durch den Scheitelpunkt S der parabelförmigen Flugbahn geht.



Da die Kugel eine maximale Höhe von $3,90\,\text{m}$ erreicht, hat der Scheitel S der Parabel p die Koordinaten $S(0 \mid 3,9)$. Setzt man die Koordinaten von S in den Ansatz $y = ax^2 + c$ ein, ergibt sich:

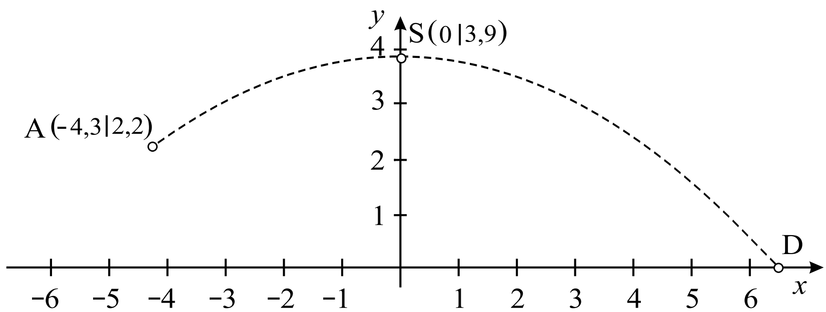
$$3,9 = a \cdot 0^2 + c \;\Rightarrow\; c = 3,9$$

Damit erhält man: $y = ax^2 + 3,9$.
Da die Kugel Davids Hand in einer Höhe von $2,20\,\text{m}$ in einer horizontalen Entfernung von $4,30\,\text{m}$ vom Scheitelpunkt verlässt, hat der Abwurfpunkt A von David die Koordinaten $A(-4,3 \mid 2,2)$. Setzt man die Koordinaten von A in die Gleichung von p ein, ergibt sich:

$$2,2 = a \cdot (-4,3)^2 + 3,9 \;\Rightarrow\; a = -\frac{1,7}{(-4,3)^2} = -\frac{170}{1849}$$

Somit hat die Parabel p die Gleichung:

$$p\colon\; y = -\frac{170}{1849}x^2 + 3,9$$



Den Auftreffpunkt D von Davids Kugel erhält man, indem man die Flugbahn von Davids Kugel mit der x-Achse schneidet. Dazu löst man die Gleichung $y = 0$ durch Wurzelziehen:

$$\begin{aligned} -\frac{170}{1849}x^2 + 3,9 &= 0 \\ -\frac{170}{1849}x^2 &= -3,9 \\ x^2 &= 42,42 \\ x &= \pm\sqrt{42,42} \\ x_{1,2} &\approx \pm 6,51 \end{aligned}$$

Aufgrund des Sachzusammenhangs kommt nur $x \approx 6,51$ als Lösung in Frage.
Damit hat der Auftreffpunkt D die Koordinaten $D(6,51 \mid 0)$.
Die Weite w von David erhält man, indem man den x-Wert des Abwurfpunkts A vom x-Wert des Auftreffpunkts D subtrahiert:

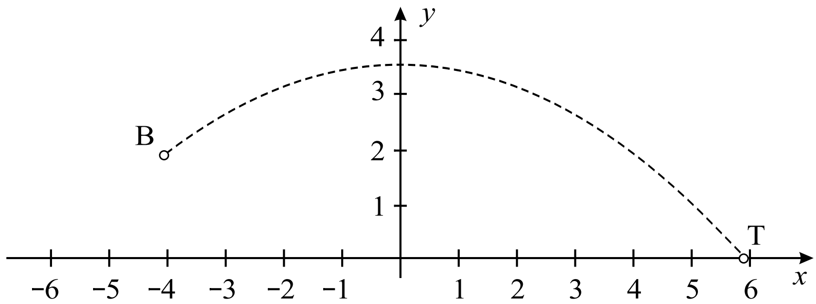
$$w = 6,51 - (-4,30) = 10,81\,\text{m}$$

Somit erzielt David eine Weite von etwa $10,81$ m.
Die Flugbahn von Tims Wurf hat die Gleichung $y = -\frac{1}{10}x^2 + 3,5$. Die Kugel verlässt seine Hand in einer Höhe von $1,90$ m. Den Abwurfpunkt B von Tim erhält man, indem man $y = 1,90$ in die Parabelgleichung einsetzt und die entstandene Gleichung durch Wurzelziehen nach x auflöst:

$$\begin{aligned} 1,9 &= -\frac{1}{10}x^2 + 3,5 \\ -1,6 &= -\frac{1}{10}x^2 \\ 16 &= x^2 \\ x_{1,2} &= \pm 4 \end{aligned}$$

Aufgrund des Sachzusammenhangs kommt nur $x = -4$ als Lösung in Frage.

Der Abwurfpunkt von Tim hat die Koordinaten $B(-4 \mid 1,9)$.



Den Auftreffpunkt T von Tims Kugel erhält man, indem man die Flugbahn von Tims Kugel mit der x-Achse schneidet. Dazu löst man wieder die Gleichung $y = 0$ durch Wurzelziehen nach x auf:

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{10}x^2 + 3,5 &= 0 \\
-\frac{1}{10}x^2 &= -3,5 \\
x^2 &= 35 \\
x_{1,2} &= \pm\sqrt{35} \\
x_{1,2} &\approx 5,92
\end{aligned}
$$

Aufgrund des Sachzusammenhangs kommt nur $x \approx 5,92$ als Lösung in Frage.
Damit hat der Auftreffpunkt T die Koordinaten $T(5,92 \mid 0)$.
Die Weite W von Tim erhält man, indem man den x-Wert des Abwurfpunkts B vom x-Wert des Auftreffpunkts T subtrahiert:

$$W = 5,92 - (-4) = 9,92\,\text{m}$$

Somit erzielt Tim eine Weite von etwa $9,92\,\text{m}$.
Die Differenz der Wurfweiten beträgt $10,81 - 9,92 = 0,89\,\text{m}$.
Also stößt David die Kugel etwa $0,89\,\text{m}$ weiter als Tim.