Werner Neidhardt, Ullrich Rauch

Warum ist Minus mal Minus Plus?

Wieso Schüler immer die gleichen Fehler machen – und wie man sie vermeiden kann

Mathematik Band 3

Die Autoren

Werner Neidhardt, StD i.R., ehemaliger Fachbereichsleiter am Lichtenberg-Oberstufengymnasium in Bruchköbel (Hessen), Leiter der Arbeitsgruppe Mathematik im Projekt SINUS und Fortbildner in den Projekten SINUS und Kompetenzorientiertes Unterrichten im Fach Mathematik.

Ullrich Rauch, StD, Fachbereichsleiter am Lichtenberg-Oberstufengymnasium in Bruchköbel (Hessen), Tätigkeit in der Lehrerausbildung, Fortbildner im Projekt Kompetenzorientiertes Unterrichten im Fach Mathematik.

Der Illustrator

Karl Lochmann, technischer Angestellter als Produkt- und Prozessentwickler bei einem Automobillieferanten, Freelancer im Bereich 3D-Visualisierung, Illustration und Malerei.

Herstellung: Beltz Bad Langensalza

Printed in Germany

ISBN 978-3-86814-260-0

Inhalt

Einleitung

2 Terme

3 (Un-)Gleichungen

4 ... und andere Fragen

Anhang

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Warum dieses Buch?

Ob Schüler oder Lehrer: Wir kennen sie alle – die immer gleichen Fehler beim Umformen von Termen oder von Gleichungen. Und meistens sind wir noch nicht einmal erstaunt, wenn ein – im wahrsten Sinne des Wortes – merkwürdiges Ergebnis herauskommt.

Wen wundert es, wenn $\sqrt{a^2+b^2}$ zu $(a+b)$ umgeformt wird? Wen wundert es, wenn $9x = x^2 + 16$ durch Wurzelziehen auf beiden Seiten zu $3x = x + 4$ umgeformt wird? Wen wundert es, dass zum Lösen der Gleichung $0 = x - 2$ auf die pq-Formel zurückgegriffen wird? Und wen wundert es, dass die beiden Aussagen „In einem Stall stehen Pferde (P) und Kühe (K)" und „es sind 5 Kühe mehr als Pferde" in die Gleichung $K + 5 = P$ übersetzt wird?

Woran das liegt? Die Antwort ist naheliegend: Weil Regeln angewendet werden, die es nicht gibt! Um aber zu klären, welche Regeln tatsächlich gelten, muss man sich mit dem Wesen der Mathematik befassen. Und zwar in seiner ursprünglichen Art. Mathematik wird häufig als ein Fach mit vorgegebenen Regeln unterrichtet. Doch ist es wirklich das, was Mathematik ausmacht? In jeder Vorlesung im Fach Mathematik werden die Studenten mit einem fertigen Regelsatz konfrontiert, dessen Gültigkeit zwar beweisbar ist, dessen Zustandekommen aber viel zu oft im Dunklen bleibt. Aber auch in der Schule finden wir diese Art des Unterrichts nach der Methode „Dies ist die Regel: Wende sie an!" viel zu oft.

Eigentlich funktioniert Mathematik aber völlig anders. Ausgehend von ihren Alltagserfahrungen haben sich Menschen seit jeher mit der zahlenmäßigen Beschreibung ihrer Umwelt beschäftigt. Dabei spielt natürlich die Abstraktion eine große Rolle. Von der Entdeckung der natürlichen Zahlen ausgehend hat sich die Mathematik nun genetisch entwickelt, mit anderen Worten: Das Regelgebäude der Mathematik wird von unten nach oben gebaut! Jede neu entdeckte Regel muss sich widerspruchsfrei aus dem bisher bekanntem Regelsatz ergeben. Das so entstandene Regelwerk hilft uns, Terme und Gleichungen umzuformen, um schließlich (Alltags-)Probleme mithilfe der Mathematik zu lösen. Davon zu unterscheiden sind Konventionen wie z.B. zur Schreibweise. Im Gegensatz zu den Regeln können diese Vereinbarungen nicht verstanden oder hergeleitet werden, sollten aber hinsichtlich der Plausibilität ihrer Verwendung vermittelbar sein.

Was ergibt sich daraus? Das Umformen eines Terms bzw. einer Gleichung ist kein willkürliches Hin- und Herschieben von Zahlen und Buchstaben! Im Idealfall greift man auf eine Regel zurück, deren Gültigkeit man zumindest vermutet. Doch das reicht nicht aus. Beim Umgang mit dem mathematischen Handwerkszeug muss jeder Umformungsschritt einer kritischen Überprüfung unterzogen werden. Das kann eine zeitaufwändige Angelegenheit sein. Um diesen Aufwand zu reduzieren, gibt es nur eine Hilfe: Verständnis und Übung.

Man kann sicher voraussetzen, dass Schülerinnen und Schüler weder bewusst noch vorsätzlich Fehler machen. Daher stellt sich die Frage, ob die Ursache nicht auch darin liegt, wie Mathematik unterrichtet wird und welchen Stellenwert dem Verständnis mathematischer Sachverhalte und Zusammenhänge beigemessen wird. Ist es nicht symptomatisch, dass selbst ein

Mathematikprofessor im Rahmen eines Vortrages auf die Frage eines Schülers, warum eigentlich „Minus mal Minus Plus ergibt“, keine knappe, verständliche und vor allem altersgerechte Antwort geben kann? Erinnert das nicht fatal an die in Lehrbüchern häufig verwendete Floskel „der Beweis ist trivial“? Es geht um klare Antworten der Lehrenden auf die berechtigten Fragen der Lernenden. Diese müssen nicht immer erschöpfend und allgemeingültig sein oder allen Seiten gerecht werden, sie müssen sich nur von den beschriebenen Ausweichmanövern unterscheiden. Haben wir auf solche Fragen wenigstens eine Antwort? Oder noch besser: Haben wir einen Strauß verschiedener Antworten, die wir den Lernenden je nach Alter und Vorbildung anbieten können?

Hier setzt dieses Buch an: Es versucht zu verdeutlichen, wo grundsätzliche, weil zentrale Lernstörungen liegen könnten und wie man – als Lernender oder Lehrender – diesen begegnen kann. Die Auswahl der Themen basiert zwar auf den subjektiven Erfahrungen des Autorenteams als Mathematiklehrer, der zusammengestellte Katalog wird aber allen, die sich mit der (Schul-)Mathematik beschäftigen, bekannt vorkommen. Hier finden sich die Fußangeln und Stolpersteine, die uns in Form typischer Schülerfehler seit Jahrzehnten immer wieder begegnen. Das vorliegende Buch will auf der einen Seite eine Reihe dieser Stolpersteine deutlicher in das Bewusstsein rücken, aber auch ihre Ursprünge ergründen und Lernhilfen zur Überwindung dieser Fehler anbieten.

1.2 Der Ansatz

In einer Untersuchung im Jahre 1980 stellten die Mathematikdidaktiker Rosnick und Clement Studentinnen und Studenten folgende Aufgabe:
„Es sei S die Anzahl der Studenten und P die Anzahl der Professoren an einer Universität. Auf einen Professor kommen 6 Studenten. Drücken Sie das durch eine Gleichung mit Hilfe von S und P aus!“
Das Ergebnis: Von 60% der Testpersonen wurde diese relativ einfache Fragestellung falsch beantwortet ($P=6 \cdot S$ ist übrigens eine dieser falschen Antworten). Aber es kommt noch schlimmer. Nach einer „Nachhilfe-Phase“, die die Konfrontation mit konkreten Beispielen (ein Professor und sechs Studenten) ebenso beinhaltete, wie den Hinweis, es gäbe doch sicher mehr Studenten als Professoren, beantworteten sogar 80% der Probanten eine zweite, strukturgleiche Aufgabe (nun ging es um Ziegen und Kühe auf einer Weide) falsch.[1]

Lernen aus Fehlern durch Hilfen des Unterrichtenden, geht das überhaupt? Prinzipiell ja, wenn man ein paar Dinge beachtet. „Richtig rechnet man das so, ist bei Lichte betrachtet, keine Hilfestellung für einen Schüler, der falsch rechnet. Denn so wird die verkehrte Lösung nicht kritisiert, sondern mit dem richtigen Weg bloß konfrontiert. Auf diese Weise bleibt der Grund des Fehlers im Dunkeln“.[2]

1 Vgl. Günther Malle, Didaktische Probleme der elementaren Algebra. Vieweg. Braunschweig (1993); Fischer/ Malle, Mensch und Mathematik. BI. Mannheim (1985).

2 Rolf Röhrig, Mathematik-mangelhaft. rororo. Hamburg (1996).

Der Lehrer bietet also weiteres Übungsmaterial an, denn Üben ist bekanntlich eine bedeutende Form des Lernens. Aber bei den „Stolpersteinen“ kann Üben fatale Nebenwirkungen erzielen, denn „damit wird […] nicht der Fehler behoben, sondern das Material vervielfältigt, in dem er sich ausdrückt. So wird zu allem Überfluss auch noch die nach wie vor in Kraft befindliche falsche Logik des Schülers vertieft“.[3]

Als Ausweg aus der Misere erscheinen also nicht wiederholtes Erklären und zusätzliches Üben, sondern die intensive Auseinandersetzung der Lernenden mit eigenen und fremden Lösungswegen und Lösungen.

1.3 Optimal mit diesem Buch arbeiten

Dieses Buch ist sowohl für Lehrende, seien es erfahrene Praktiker oder junge Einsteiger in der Vorbereitung an der Hochschule oder im Referendariat wie auch für die Hand interessierter Schüler, Auszubildender oder Studierender konzipiert. Obwohl das Buch einem stringenten Aufbau folgt, sind die Kapitel voneinander unabhängig. Das Buch eignet sich also auch als „Steinbruch“, aus dem diejenigen Aspekte ausgewählt und bearbeitet werden können, bei denen man sich unsicher fühlt. Idealerweise sollte Lernenden ein Ansprechpartner zur Seite stehen (z.B. Lehrer, Dozent, …), der dabei hilft, diese Aspekte zu identifizieren. Wir empfehlen zudem den Austausch mit kritischen Lernpartnern.

Der Fokus liegt nicht auf den komplexen mathematischen Problemen, sondern auf den handwerklichen Grundlagen – es geht also um Terme und Gleichungen sowie um die unverzichtbaren Variablen. Also jenen Grundfertigkeiten und -fähigkeiten, die wichtig sind, um die komplexeren Aufgaben der „höheren Mathematik“ zu bearbeiten. Erfahrungsgemäß liegen gerade im Grundsätzlichen die Probleme, die häufig dazu führen, dass Schüler an der Lösung solcher Aufgaben scheitern. Deshalb umfasst der Adressatenkreis dieses Buches auch die Schülerinnen und Schüler der Oberstufe sowie Studierende, die sich in ihrem Studium mit mathematischen Fragestellungen beschäftigen.

Jedes Kapitel gliedert sich in drei Teile:

Zuerst kommt ein Arbeitsblatt ‚Lügendetektor‘, das helfen soll, den eigenen Kenntnisstand einzuschätzen und Fehlvorstellungen zu identifizieren. Die schwerpunktmäßig verwendeten Aufgabentypen unterscheiden sich nicht selten von den klassischen Aufgaben des Schulbuches: So wird man aufgefordert, Aussagen zu bewerten oder wahr/falsch-Entscheidung zu begründen. Manchmal gilt es auch, vorliegende Rechnungen auf Fehler zu untersuchen. Die Richtigkeit der eigenen Lösungen kann man mithilfe der Musterlösungen am Ende dieses Buches kontrollieren.

3 Gerlinde Hammer, Rolf Röhrig, Mathematikdefizite bei Bildungsbenachteiligten in beruflichen Bildungsgängen Eine Förderbedarfsanalyse für Lehrende und Lernende. Bremen/Bremerhaven (2007) (http://www.iaw.uni-bremen.de/downloads/LernWiederMathe_Defizite2007.pdf , abgerufen am 19.06.2013).

Alle Arbeitsblätter und die zugehörenden Lösungsblätter sind zum Ausdrucken und dem wiederholten Einsatz auf der beigefügten CD-ROM als PDF-Dokumente abgespeichert.
Danach kommen die Informationstexte zum jeweiligen Schwerpunkt, mit denen das Thema facettenreich und auf unterschiedlichem Niveau beleuchtet wird. Diese Materialien kann man komplett durcharbeiten oder sich auch nur mit den Erklärungen genauer auseinandersetzen, die einem am einleuchtendsten erscheinen. Bei ausgewählten Kapiteln folgen im Anhang ergänzende bzw. vertiefende Materialien.

Mithilfe eines zweiten Arbeitsblattes lässt sich schließlich überprüfen, ob die Erklärungen verstanden wurden und man das erarbeitete mathematische Handwerkszeug beherrscht.

Noch eine abschließende Bemerkung zur Verwendung von Hilfsmitteln: Da es um das grundsätzliche Verständnis mathematischer Zusammenhänge geht, wäre es kontraproduktiv, den Taschenrechner oder eine Formelsammlung bei der Lösung der Aufgaben zu verwenden. Sollte der Taschenrechnereinsatz sinnvoll sein, so geben wir in der Aufgabenstellung einen entsprechenden Hinweis.

Kapitel 2

Terme

Kapitel 2.1

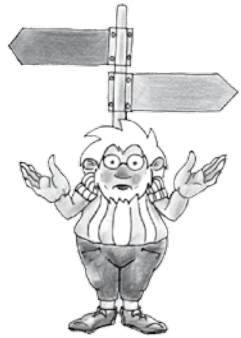
Warum machen sich Terme so wichtig?

Lügendetektor

Aufgabenstellung	**Wahr oder falsch? Deine Lösung**	**Wie machst Du das! Beschreibe Deinen Lösungsweg!**
$4+5-3$ ist ein Summenterm		
$15 \cdot (6-4)$ ist ein Produktterm		
$7+(3-8)^3$ ist ein Potenzterm		
Der Produktterm $\frac{5}{2} \cdot \frac{11}{7}$ lässt sich in einen 1. und 2. Summanden zerlegen		
Der Quotient $\frac{9}{5}$ lässt sich in Minuend und Dividend zerlegen		
$2\frac{3}{5}$ ist ein Produktterm		
$5\frac{a}{b}$ ist ein Produktterm		
$\frac{4}{0}$ ist ein Quotiententerm		
Der Term $(6a-5b):2a$ ist ein Quotiententerm		

Kapitel 2.1

Warum machen sich Terme so wichtig?



Was leistet der derzeitige Unterricht bezüglich nachhaltiger Kenntnisse zur elementaren Algebra? Zur elementaren Algebra wird gezählt, was mit Variablen, Termen und Formeln (Gleichungen, Ungleichungen) auf Schulniveau zu tun hat.
Für dieses Stoffgebiet wird im Mathematikunterricht ein großer Aufwand betrieben. Mehrere Jahre bearbeiten Schüler das „Buchstabenrechnen". Die Anzahl der gerechneten Übungsaufgaben ist dabei oft so ungeheuer groß und ihre Anforderungen sind in der Regel weit komplexer als in den meisten realen, anwendungsorientierten Aufgaben, z.B.

$$\left(\frac{b}{a^2-ab}+\frac{1}{a-b}\right):\frac{a}{a^2-b^2} \qquad \text{oder} \qquad \frac{x-2}{3-x}-\frac{5-3x}{2x-6}=\frac{4x-3}{3x-9}$$

(gefunden in einem Unterrichtswerk 7./8. Jahrgangsstufe)

oder in einer Klassenarbeit 2011 G8, Klasse 6

$$4\tfrac{5}{18}-1\tfrac{3}{4}+\tfrac{17}{90}= \qquad \text{oder} \qquad \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{4}}}}=$$

Zur angesprochen Diskrepanz zwischen Anforderungen an Studenten und Schulaufgaben hier noch ein Beispiel[4]

Was bei Studenten beobachtet wurde	Was in der Schule geübt wird
Vereinfache: $r^2-\frac{r^2}{4}=\frac{r^3}{3}$	Vereinfache: $\left(\frac{2}{3x-y}-\frac{1}{2x}\right):\frac{x+y}{6x-2y}$

Und der Effekt? Die Nachhaltigkeit? Können Studenten und Studentinnen aufgrund dieser komplexen Übungen in ihrer Schulzeit erfolgreicher mit den Umformungen von Termen umgehen?
Untersuchungen und Tests[5] haben enorme Defizite aufgezeigt: Trotz mehrjähriger Ausbildung in elementarer Algebra, werden Terme in zum Teil sehr abenteuerlicher Weise bearbeitet. Da diese Untersuchungen aber schon ein paar Jahre zurückliegen, könnte die Hoffnung auf Besserung aufkommen. Leider ist dem nicht so. In einem Artikel der Frankfurter Rundschau vom 21.07.2012 werden unter der Überschrift „Beim Wurzelziehen versagt! Jeder zweite

4 Günther Malle, Didaktische Probleme der elementaren Algebra. Vieweg. Wiesbaden (1993).

5 Zum Beispiel Rosnick/Clement, Borneleit in Malle, a.a.O..

Ingenieurstudent wirft das Handtuch. Auch die Schul-Mathematik ist schuld.“ genau diese oben angesprochenen Fehler aktuell bestätigt.

Kennen wir Lehrer und Lehrerinnen dies nicht aus unserem ganz normalen Alltag? Zumindest die Ergebnisse; jedoch häufig nicht, was sich in den Köpfen der Lernenden wirklich abspielt! Wo kommt dieses „verquere Denken“ her? Was sind seine Wurzeln, was die mögliche Ursachen?

Eine mögliche Quelle ist nach unseren Erfahrungen die Vernachlässigung der Vermittlung von Kenntnissen bezüglich Termen. Umformungsfehler im Bereich der Terme zählen zu den gravierernsten und häufigsten Fehlern der Schülerinnen und Schülern im Umgang mit mathematischen Objekten in den Sekundarstufen I und II und setzen sich bei Studierenden fort.

Die Quelle solcher Fehler liegt oft im Unterricht. Die Behandlung von Termen, ihres Aufbaus und den Bezeichnungen der einzelnen Teile tendiert eher zur Behandlung von Strukturen und ist damit gegenüber dem Leitbild der Zahlen eher kontraproduktiv orientiert.

Die Eitelkeit der Zahlen
Ein großer Fehler!

Umgang mit Termen

Gerade der Umgang mit Termen könnte die Basis für eine fundierte Entwicklung einer qualifizierten Fachsprache sein und den Umgang mit Strukturmathematik schon ab der Jahrgangsstufe 5 ermöglichen.
Wir brechen daher eine Lanze für Terme, da die notwendigen Kenntnisse über Terme und Termstrukturen viel zu oft unterschätzt oder ignoriert werden. Mathematik ist eine Sprache! Hierin ist der Term nichts anderes als die korrekte Zusammenfassung von Wörtern aus unserer Alltags-Sprache. Terme sind sozusagen die grammatisch korrekten Wörter bzw. Wortgruppen in der Sprache der Mathematik. Daher bilden sie die ultimative Grundlage einer nachhaltigen mathematischen Basiskompetenz für den mathematischen Lernprozess und damit natürlich auch für den Unterricht.

Kenntnisse von Termen

Kenntnisse über den Aufbau von Termen helfen beispielsweise bei

- der Umsetzung einer Problemstellung von der Alltagssprache in eine geeignete mathematische Formulierung, d.h. sie sind eine wichtige Hilfe bei der Bearbeitung von Textaufgaben

- der Berechnung des Wertes von Formeln
- der Entscheidung für ein geeignetes Lösungsverfahren bei (Un-)Gleichungen
- der Berechnung von Ableitungs- bzw. Stammfunktionen [Sek II]
- der Berechnung von Grenzwerten/Asymptoten [Sek II].

Terme und diverse Rechenvorschriften

Zur Berechnung des Wertes eines Terms gibt es Regeln. Diese Regeln sind hierarchisch aufgebaut und die Hierarchie orientiert sich ausschließlich an dem Termaufbau:

R1: „von links nach rechts“
R2: „Punktrechnung geht vor Strichrechnung“
R3: „Berechnung des Klammerwertes“
R4: „Potenzen dominieren“
(wegen der angesprochenen Hierarchie gilt R4 vor R3 vor….)

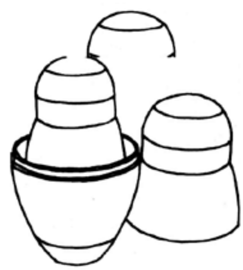
Beispiel $4-2\cdot 3^2+2\cdot(5-7)$

Die Berechnung des Wertes des Terms erfolgt über den Ansatz $4-2\cdot 3^2+2\cdot(5-7)$ = ?

Hinweis 1
In dieser Schreibfigur übernimmt das Gleichheitszeichen die Rolle des Auftrages „Berechne“, also eines Rechenauftrags!

$$
\begin{aligned}
4-2\cdot 3^2+2\cdot(5-7) &= \quad | \text{R4}\\
4-2\cdot 9+2\cdot(5-7) &= \quad | \text{R3}\\
4-2\cdot 9+2\cdot(-2) &= \quad | \text{R2}\\
4-18-4 &= \quad | \text{R1}\\
&= -18
\end{aligned}
$$

Hinweis 2
Diese „aufwendige“ Berechnung des Termwertes ist so sicher nicht im Alltagsgeschäft des Mathematikunterrichtes zu erwarten. Dies wäre jedoch sinnvoll, da hier – neben der deutlichen Reduzierung von Rechenfehlern – eine wesentliche Qualität mathematischen Lernens transportiert werden kann: die Zerstücklung eines komplexen Problems in kleinere Teilprobleme und die Möglichkeit, für diese Teilprobleme Lösungen zu finden. Am Ende ergibt die Zusammenfassung der Teillösungen das gewünschte Resultat.



Terme und Strukturen

Der Term stellt die Struktur von Rechenvorschriften dar und das Erkennen einer solchen Struktur ist daher eine große Hilfe für nachfolgende Lösungsschritte. Schülerinnen und Schüler zerlegen Terme erfahrungsgemäß nicht. Zielführend wäre die Beantwortung der Frage, warum

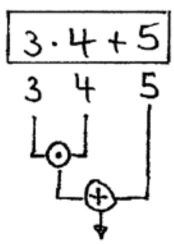
Schülerinnen und Schüler Terme nicht zerlegen; warum sie diese nicht in Teilterme zerkleinern? Nach Untersuchungen von Van de Walle/Thompson, Winter u.a. ist „von Grundschülern bekannt, dass sie Aussageformen als Auforderungen zum Rechnen auffassen und das Gleichheitszeichen als Trennung von Frage und Antwort deuten“.[6]
„Schülerinnen und Schüler untersuchen daher nicht einen Termaufbau im algebraischen Sinn, sie suchen etwas, das sie als Ergebnis deuten können.“[7]

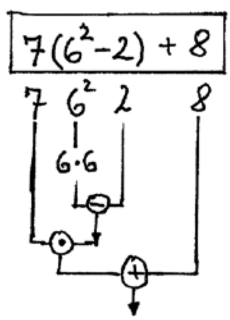
Zu diesen Untersuchungsergebnissen und eigenen Unterrichtserfahrungen passt auch, dass Schülerinnen und Schüler nur sehr ungern ihre Nebenrechnungen öffentlich dokumentiert sehen wollen.

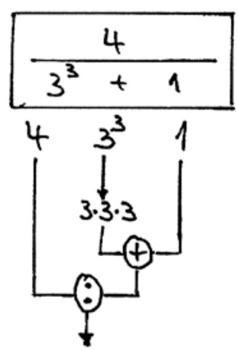
Terme in Termbäumen

Termbäume zu erstellen ist eine relativ einfache Übung und hat doch einen starken (nachhaltigen) Effekt zur Gewinnung von Erkenntnissen bezüglich der Kenntnis des Aufbaus der Terme und damit der sicheren Berechnung der Werte von Termen. Hier ist auch der Einsatz moderner Taschenrechner, die die Eingabe komplexer Terme in ihrem Display ermöglichen, eine starke Unterstützung. Diese Rechner „verzeihen“ keine fehlerhafte Eingabe und sorgen so für einen nachhaltigen Umgang mit Termberechnungen, da hier die Fehlermeldung direkt und nicht vom unterrichtenden Lehrer erfolgt. Es gibt eine für die Schüler und Schülerinnen zusätzliche „übergeordnete“ Instanz zur Klärung bezüglich „richtig oder falsch“.

Beispiele für Termbäume – Möglichkeit zur Visualisierung







Terme beim Übergang von der Arithmetik zur Algebra

Der Umgang mit Termen bekommt bei diesem Übergang eine ganz neue Dimension. In der Schul-Algebra gilt es, einige semantische Konventionen, also Regeln für die Übersetzung in die algebraische Formelsprache und die Konstanz der Bedeutungen von Variablen bei algebraischen Umformungen, zu beachten:

- Buchstaben stehen nicht für Objekte, sondern für Objekten zugeordneten Zahlen

6 W. Dörfler, R. Fischer (Hrsg.), Empirische Untersuchungen zum Lehren und Lernen von Mathematik. Teubner. Stuttgart (1984).

7 Ebd..

- ein algebraischer Ausdruck kann sowohl einen Prozess als auch das Produkt eines Prozesses darstellen
- ein algebraischer Ausdruck kann sowohl Rechenhandlungen als auch Beziehungen zwischen Zahlen bzw. Größen darstellen
- die Bedeutung von verwendeten Variablen darf innerhalb eines algebraischen Ausdrucks nicht verändert werden
- das Gleichheitszeichen drückt numerische Gleichheit aus, nicht eine irgendwie geartete Entsprechung

Die algebraische Zeichensprache beruht auf einer „strengen Grammatik“, Bedeutungen von Zeichen liegen hochgradig konventionalisiert fest. Dies führt insbesondere beim Übergang von der Arithmetik zur Algebra für Schülerinnen und Schülern zu Schwierigkeiten, denn bei diesem Übergang finden Bedeutungsveränderungen statt: Mathematische Zeichen, die in der Arithmetik eine bestimmte Bedeutung hatten, werden nun mit einer veränderten Bedeutung ausgestattet.
Dies trifft nach Malle[8] vor allem auf drei Bereiche zu:

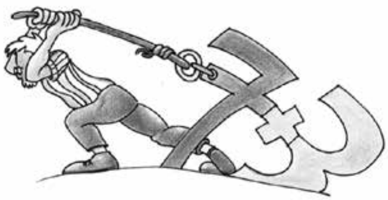
- Bedeutungsveränderung der Nebeneinanderstellung von Buchstaben und Zahlen (Konkatenation).
  In der Arithmetik konnte $5B$ „fünf Birnen“ bedeuten, in der Algebra liegt hier eine Multiplikation von 5 und B vor (mit B etwa der Anzahl einer Menge Birnen).
- Bedeutungsveränderung der Operationszeichen. In der Arithmetik stellen Operationszeichen Aktionszeichen dar: $5 + 4$ konnte bedeuten, dass zu fünf Enten vier Enten hinzukommen. In der Algebra sind Operationszeichen häufig Bestandteile von Termen: $x + b$.
- Bedeutungsveränderung des Gleichheitszeichens. In der Arithmetik stellt das Gleichheitszeichen häufig ein Zuweisungszeichen mit Aufforderungscharakter dar. Bei $5 + 4 =$ ist ein Ergebnis zu bestimmen. In der Algebra fungiert das Gleichheitszeichen als Vergleichszeichen, bei $4 + a = z$ gibt das Gleichheitszeichen zunächst einmal keinen Rechenauftrag.

Fazit
Terme sind sehr komplexe Gebilde. Sie in einfachere Teilstrukturen zerlegen zu können und dann Lösungen für Berechnungen zur Verfügung zu haben, sind zentrale Kompetenzen im Mathematikunterricht.

In Kapitel 5 wollen wir mit Untersuchungsergebnissen belegen, dass dieser Übergang von der Arithmetik zur Algebra tatsächlich für sehr viele Schülerinnen und Schüler eine für ihre mathematische Grundbildung existentielle Situation darstellt.

8 Ebd..

Warum machen sich Terme so wichtig?



Arbeitsblatt

Übung 1

Was bedeuten:

Term	Beispiel	Beschreibung	Teile des Terms
Summenterm			
Differenzterm			
Produktterm			
konstanter Summandenterm			
konstanter Faktorterm			
Potenzterm			

Übung 2

Welche Rechenvorschriften zur Vereinfachung/zur Berechnung von Termen kenne ich?

Nach welcher Hierarchie sind diese Vorschriften zu ordnen?

Übung 3

Zerlegung in Termbäume

a) $6 + (7x - 3)$

b) *24% von 600*

c) $\dfrac{5}{a - a}$

Übung 4

Term	Bezeichnung des Gesamtterms	Zerlegung in Teilterme (auch mit Hilfe von Termbäumen)
$3x^4+7$		
$(x^2-6x)\cdot x$		
$5\frac{1}{4}$		
$2\frac{a}{b}$		
$4x^3+\frac{1}{2}x-14$		
$(15ab - 10ac) : 5a$		