Gruber I Neumann

Erfolg im Mathe-Abi 2016

Übungsbuch
Hilfsmittelfreier Teil
mit Tipps und Lösungen

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Erfolg von Anfang an

Dieses Übungsbuch ist speziell auf die Anforderungen des hilfsmittelfreien Teils des Mathematik-Abiturs in Bayern, Sachsen, Niedersachsen, Mecklenburg-Vorpommern, Hamburg und Schleswig-Holstein abgestimmt. Es enthält Aufgaben in Kurzform aus den Themenbereichen Analysis, Analytische Geometrie / Lineare Algebra und Stochastik.

Alle Aufgaben lassen sich ohne Taschenrechner lösen und fördern das Grundwissen und die Grundkompetenzen in Mathematik, vom einfachen Rechnen und Formelanwenden bis zum Herstellen von gedanklichen Zusammenhängen. Das Übungsbuch ist eine Hilfe zum Selbstlernen (learning by doing) und bietet die Möglichkeit, sich intensiv auf die Prüfung vorzubereiten und gezielt Themen zu vertiefen. Hat man Erfolg bei den grundlegenden Aufgaben, machen Mathematik und Lernen mehr Spaß.

Erfolg im Mathe Abi – Basiswissen

Neben dem Übungsbuch zum hilfsmittelfreien Teil gibt es auch noch ein Buch zum Basiswissen des Mathematik-Abiturs. Das Basiswissen-Buch soll Ihnen ermöglichen, die Grundlagen für das Mathematikabitur zu wiederholen und zu vertiefen. Am Anfang jedes Kapitels befindet sich eine kurze Übersicht über die jeweiligen Themen. Die einzelnen Kapitel bauen zwar aufeinander auf, doch ist es nicht zwingend notwendig, das Buch der Reihe nach durchzuarbeiten, Sie können da ansetzen, wo Sie üben wollen. Die Aufgaben sind in der Regel in ihrer Schwierigkeit gestaffelt und es gibt von fast jeder Aufgabe mehrere Variationen zum Vertiefen. Ein Tippteil und ausführliche, schülergerechte Lösungen ermöglichen eine optimale Vorbereitung auf das Abitur.

MeinMatheAbi.de

Auf dem Portal www.MeinMatheAbi.de finden Sie weitere Materialien:

- Viele Lernvideos, in denen die grundlegenden Themen an einfachen Beispielen erklärt werden.
- Lernkarten zum Online-Lernen und eine Lernkarten-App.
- Anleitungen für diverse Taschenrechner.

Der blaue Tippteil

Hat man keine Idee, wie man eine Aufgabe angehen soll, hilft der blaue Tippteil in der Mitte des Buches weiter: Zu jeder Aufgabe gibt es dort Tipps, die helfen, einen Ansatz zu finden, ohne die Lösung vorwegzunehmen.

Wie arbeiten Sie mit diesem Buch?

Den größten Lerneffekt erhalten Sie, wenn sie zuerst im Tippteil in der Mitte des Buchs nachschlagen, wenn Sie nicht wissen, wie eine Aufgabe zu lösen ist.

Die Lösungen mit ausführlichem Lösungsweg bilden den letzten Teil des Übungsbuchs. Hier finden Sie die notwendigen Formeln, Rechenverfahren und Denkschritte sowie sinnvolle alternative Lösungswege.

Die Aufgaben im hilfsmittelfreien Teil haben verschiedene Schwierigkeitsgrade. Diese spiegeln sich in den sogenannten «Anforderungsbereichen» wieder. Mehr Informationen dazu erhalten Sie auf Seite 11.

In der Prüfung wird der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben nicht bezeichnet sein, es gibt auch keine feste Reihenfolge, in der die Aufgaben gestellt werden. Um Ihnen das Lernen zu erleichtern, sind Aufgaben mit höherer Schwierigkeit mit einer Raute $\diamondsuit$ gekennzeichnet. Welche Funktionenklassen bzw. ob spezielle Themen der Analytischen Geometrie wie z.B. Kugeln in Ihrem Bundesland im Abitur vorkommen, können Sie dem Bildungsplan entnehmen, der normalerweise im Internet zugänglich ist.

Allen Schülerinnen und Schülern, die sich auf das Abitur vorbereiten, wünschen wir viel Erfolg.

Helmut Gruber und Robert Neumann

Der hilfsmittelfreie Teil der Abiturprüfung

Seit 2014 werden von sechs Bundesländern Aufgaben für das Mathematikabitur entwickelt, die in einem hilfsmittelfreien Teil am Anfang der Prüfung eingesetzt werden sollen. Zur Bearbeitung dieses Aufgabenteils sind nur Zeichengeräte (und ein Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung) zulässig.

Alle Bundesländer entnehmen hierfür Aufgaben aus einem Aufgabenpool, der in zwei Bereiche unterteilt ist: «Aufgabenpool 1» enthält einfachere Aufgaben, welche die Anforderungsbereiche I und II der Bildungsstandards abdecken, siehe Seite 11. «Aufgabenpool 2» enthält anspruchsvollere Aufgaben, welche auch den Anforderungsbereich III abdeckt.

Je nach Bundesland werden für diesen hilfsmittelfreien Teil die «Pool-Aufgaben» oder eine Mischung aus Pool-Aufgaben und bundeslandspezifischen Aufgaben verwendet. Auch der Umfang und die Zeit, die zur Bearbeitung vorgesehen ist, variieren.

Inhaltlich werden die Bereiche Analysis, Analytische Geometrie / Lineare Algebra und Stochastik abgedeckt. Dabei werden Aufgaben der Linearen Algebra (insbesondere Aufgaben mit Matrizen) nur in Niedersachsen und Hamburg eingesetzt.

Zur konkreten Situation in den einzelnen Bundesländern:

Bayern

Es gibt einen für alle Abiturienten und Abiturientinnen verpflichtenden Mathematik-Kurs auf erhöhtem Niveau. Die Dauer der Prüfung des hilfsmittelfreien Teils beträgt 90 Minuten. Die Aufgaben setzen sich aus Aufgaben aus dem Aufgabenpool und Aufgaben aus Bayern zusammen.

Bremen

In Bremen gibt es einen hilfsmittelfreien Teil der Abiturprüfung, der von allen Schülerinnen und Schülern bearbeitet werden muss. Er umfasst 4 Aufgaben aus allen Bereichen. Für die Bearbeitung stehen im Grund- und Leistungskurs 45 Minuten zur Verfügung

Hamburg

In Hamburg kann das Mathematikabitur auf grundlegendem oder erhöhtem Anforderungsniveau abgelegt werden. In beiden Fällen kommen die Aufgaben aus dem Aufgabenpool. Für die Bearbeitung des hilfsmittelfreien Teils stehen 45 Minuten zur Verfügung.

Mecklenburg-Vorpommern

In Mecklenburg-Vorpommern kann das Mathematikabitur auf grundlegendem oder erhöhtem Niveau abgelegt werden. Wird die Prüfung auf grundlegendem Aufgabenniveau abgelegt, werden Aufgaben aus Mecklenburg-Vorpommern bearbeitet. Die Aufgaben auf erhöhtem Niveau kommen aus dem Aufgabenpool. Für die Bearbeitung des hilfsmittelfreien Teils stehen 45 Minuten zu Verfügung.

Niedersachsen

In Niedersachsen kann das Mathematikabitur auf grundlegendem oder erhöhtem Anforderungsniveau abgelegt werden. Wird die Prüfung auf grundlegendem Aufgabenniveau abgelegt, stehen 45 Minuten zur Verfügung. Die Aufgaben auf erhöhtem Niveau kommen aus dem Aufgabenpool und werden noch durch Aufgaben aus Niedersachsen ergänzt. Für die Bearbeitung des hilfsmittelfreien Teils stehen beim erhöhten Aufgabenniveau 60 Minuten zu Verfügung.

Sachsen

In Sachsen kann das Mathematikabitur auf Grundkursniveau oder Leistungskursniveau abgelegt werden. In beiden Fällen werden die Aufgaben aus dem Aufgabenpool durch länderspezifische Aufgaben ergänzt. Die Prüfung dauert in beiden Fällen 60 Minuten.

Schleswig-Holstein

In Schleswig-Holstein gibt es ähnlich wie in Bayern nur einen Kurs auf erhöhtem Niveau. Seit dem Jahr 2015 werden die Aufgaben aus dem Pool für die Prüfung verwendet. Diese werden noch durch Aufgaben aus Schleswig-Holstein ergänzt. Die Bearbeitungszeit des hilfsmittelfreien Teils beträgt mindestens 60 Minuten, das heißt, diese Aufgaben dürfen frühestens nach 60 Minuten abgegeben werden.

Die Anforderungsbereiche der Bildungsstandards

Die folgenden Informationen zu den Anforderungsbereichen der Bildungsstandards sind den Informationen zur schriftlichen Abiturprüfung in Hamburg entnommen:
http://li.hamburg.de/contentblob/3901972/data/2013-03-27-mathematik-abitur.pdf

Anforderungsbereich I

Der Anforderungsbereich I umfasst:

- Die Verfügbarkeit von Daten, Fakten, Regeln, Formeln, mathematischen Sätzen usw. aus einem abgegrenzten Gebiet im gelernten Zusammenhang,
- die Beschreibung und Verwendung gelernter und geübter Arbeitstechniken und Verfahrensweisen in einem begrenzten Gebiet und in einem wiederholenden Zusammenhang.

Dazu kann u. a. gehören:

- Bereitstellen von Definitionen, Sätzen und einfachen Beweisen
- Beschreiben eines einfachen Sachverhalts, eines bekannten Verfahrens oder eines standardisierten Lösungsweges
- Anfertigen von Skizzen auf eine aus dem Unterricht bekannte Weise; Skizzieren der Graphen von Grundfunktionen
- Ausführen von geübten Algorithmen wie z. B. Ableiten und Integrieren in einfachen Fällen, Lösen von einfachen Gleichungen, Ungleichungen und Gleichungssystemen nach eingeübten Verfahren
- Verwenden des Rechners als Werkzeug z. B. zum Zeichnen eines geeigneten Ausschnitts des Graphen einer Funktion, beim Lösen von Gleichungssystemen, beim Berechnen von Ableitungen und von Integralen
- Bestimmen der Extremwerte einer Funktion in Fällen, in denen das eingeübte Verfahren unmittelbar zum Ziel führt
- Feststellen der Lagebeziehungen zwischen Punkten, Geraden oder Ebenen mithilfe eines durch Übung vertrauten Verfahrens

- Bestimmen von Geraden- und Ebenengleichungen bei Vorgabe einfacher und gewohnter Bedingungen
- Darstellen statistischer Daten und Ermitteln statistischer Kenngrößen in einfachen Fällen
- Bestimmen und Berechnen von Wahrscheinlichkeiten in einfachen, vom Unterricht her vertrauten Zusammenhängen.

Anforderungsbereich II

Der Anforderungsbereich II umfasst:

- Selbstständiges Auswählen, Anordnen, Verarbeiten und Darstellen bekannter Sachverhalte unter vorgegebenen Gesichtspunkten in einem durch Übung bekannten Zusammenhang,
- selbstständiges Übertragen des Gelernten auf vergleichbare neue Situationen, wobei es entweder um veränderte Fragestellungen oder um veränderte Sachzusammenhänge oder um abgewandelte Verfahrensweisen gehen kann.

Dazu kann u. a. gehören:

- Veranschaulichen und Beschreiben von Zusammenhängen bei bekannten Sachverhalten mithilfe von Bildern, Texten und Symbolen
- Dokumentieren eines Lösungsweges in sachgerechter mathematischer Form
- Verfassen eines mathematischen Kurzaufsatzes in bekannten Zusammenhängen
- Ausführen von Beweisen, deren Beweisstruktur aus dem Unterricht bekannt ist
- Anwenden von zentralen Begriffen in Beispielen, die in ihrer Struktur einfach sind
- Interpretieren charakteristischer Eigenschaften einer Funktion anhand ihres Graphen
- Übersetzen eines Schaubildes in einen Funktionsterm oder eines Funktionsterms in eine Skizze
- Anpassen von Funktionen an vorgegebene Bedingungen in einfachen Fällen
- Durchführen vollständiger Fallunterscheidungen in überschaubaren Situationen
- Gezieltes Verwenden des Rechners bei der Lösung komplexerer Probleme

- Übersetzen einer Ausgangssituation in ein geeignetes bekanntes mathematisches Modell (z.B. Koordinatensystem, Funktionsterm, Gleichungssystem, Wahrscheinlichkeitsverteilung)
- Sachgerechtes und begründetes Argumentieren bei der Darstellung eines Modellansatzes oder bei der Auswahl eines Lösungsweges
- Verständiges Anwenden der Beziehung zwischen Änderungsrate und Gesamtänderung in bekannten Situationen
- Analytisches Beschreiben von geometrischen Objekten, wobei die sie bestimmenden Parameter erst aus anderen Bedingungen erschlossen werden müssen
- Vergleichen und Bewerten verschiedener Lösungsansätze in einem bekannten Zusammenhang
- Analysieren und Modellieren stochastischer Prozesse in aus dem Unterricht bekannter Weise
- Durchführen eines aus dem Unterricht bekannten Verfahrens der beurteilenden Statistik
- Beschaffen, Strukturieren, Auswählen und Auswerten von Informationen zu einer überschaubaren Problemstellung in einer im Unterricht vorbereiteten Vorgehensweise
- Präsentieren von Arbeitsergebnissen in übersichtlicher, gut strukturierter Form.

Anforderungsbereich III

Der Anforderungsbereich III umfasst:

- Planmäßiges und kreatives Bearbeiten komplexerer Problemstellungen mit dem Ziel, selbstständig zu Lösungen, Deutungen, Wertungen und Folgerungen zu gelangen
- bewusstes und selbstständiges Auswählen und Anpassen geeigneter gelernter Methoden und Verfahren in neuartigen Situationen.

Dazu kann u. a. gehören:

- Kreatives Übersetzen einer komplexeren Ausgangssituation in ein geeignetes mathematisches Modell, ohne dass dies in vergleichbaren Zusammenhängen geübt wurde
- Planvolles, begründetes Nutzen und Bewerten von Informationen bei komplexeren oder offeneren Problemstellungen

- Auffinden eines Lösungsansatzes für Probleme, bei denen Kenntnisse aus verschiedenen Teilgebieten der Mathematik verbunden werden müssen, ohne dass dies in vergleichbaren Zusammenhängen geübt wurde
- Überprüfen und Bewerten der Vorgehensweise sowie Interpretieren und Beurteilen der Ergebnisse z. B. bei einer Modellierung oder beim Umgang mit Informationen
- Anwenden zentraler Begriffe und Vorgehensweisen in komplexeren Zusammenhängen
- Verallgemeinern eines Sachverhalts, der nur von Beispielen her bekannt ist
- Ausführen eines Beweises, zu dem eigenständige Beweisgedanken erforderlich sind.

1 Analysis

Tipps ab Seite 49, Lösungen ab Seite 81

1. Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = 4 - x^2$ und $g(x) = x^2 - 4$. Ihre Graphen seien K_f und K_g.

   a) Bestimmen Sie die Schnittstellen der beiden Graphen.

   b) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche, welche von K_f und K_g eingeschlossen wird.

2. Der Graph einer ganzrationalen Funktion f 3. Grades hat den Wendepunkt $W(0 \mid 0)$ und den Hochpunkt $H(2 \mid 2)$. Bestimmen Sie den zugehörige Funktionsterm.

3. ◇ In einem Koordinatensystem (vgl. Abbildung 1) werden alle Rechtecke betrachtet, die folgende Bedingungen erfüllen:

   - Zwei Seiten liegen auf den Koordinatenachsen.
   - Ein Eckpunkt liegt auf dem Graphen G_f der Funktion $f\colon x \mapsto -\ln x$ mit $0 < x < 1$.

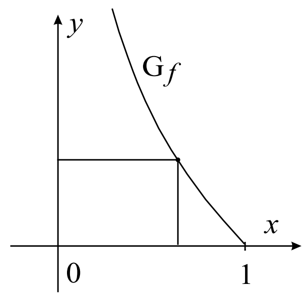
   

   Abb. 1

   Abbildung 1 zeigt ein solches Rechteck.
   Unter den betrachteten Rechtecken gibt es eines mit größtem Flächeninhalt.
   Berechnen Sie die Seitenlängen dieses Rechtecks.

4. Geben ist die Funktion $g : x \mapsto \frac{x}{\ln x}$ mit Definitionsmenge $\mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$. Bestimmen Sie Lage und Art des Extrempunkts des Graphen von g.

5. Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = e^x \cdot (2x + x^2)$.

   a) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f.

   b) Zeigen Sie, dass die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion F mit $F(x) = x^2 \cdot e^x$ eine Stammfunktion von f ist. Geben Sie eine Gleichung einer weiteren Stammfunktion G von f an, für die $G(1) = 2e$ gilt.

6. Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $g_{a,c}\colon\ f(x) = \sin(ax) + c$ mit $a,\ c \in \mathbb{R}_0^+$.

   a) Geben Sie für jede der beiden folgenden Eigenschaften einen möglichen Wert für c so an, dass die zugehörige Funktion $g_{a,c}$ diese Eigenschaft besitzt.

      α) Die Funktion $g_{a,c}$ hat die Wertemenge $[0;\ 2]$.

      β) Die Funktion $g_{a,c}$ hat im Intervall $[0;\ \pi]$ genau drei Nullstellen.

Tipps

1 Analysis

1. a) Die Schnittstellen der beiden Graphen von f und g erhalten Sie, indem Sie die Funktionsterme gleichsetzen und die enststandene Gleichung nach x auflösen.

   b) Den Flächeninhalt A der Fläche, die die beiden Graphen einschließen, erhalten Sie mithilfe eines Integrals; die Integrationsgrenzen sind die beiden Schnittstellen. Beachten Sie, dass K_f oberhalb von K_g verläuft.

2. Wählen Sie als Ansatz für die Funktion f den Term $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ und bestimmen Sie die zugehörigen Ableitungen $f'(x)$ und $f''(x)$.
   Bestimmen Sie jeweils zwei Bedingungen für den Wendepunkt W und den Hochpunkt H. Lösen Sie das erhaltene lineare Gleichungssystem.

3. Skizzieren Sie die Problemstellung. Wählen Sie als Grundseite $g = x$ und als zugehörige Höhe $h = f(x)$. Bestimmen Sie den Flächeninhalt $A(x)$ des betrachteten Rechtecks in Abhängigkeit von x. Das Rechteck mit größtem Flächeninhalt erhalten Sie mithilfe der 1. und 2. Ableitung von $A(x)$, die Sie mit der Produktregel $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ bestimmen. Als notwendige Bedingung lösen Sie die Gleichung $A'(x) = 0$ nach x auf. Setzen Sie den erhaltenen x-Wert in $A''(x)$ ein. Falls $A''(x) < 0$ handelt es sich um ein Maximum. Bestimmen Sie anschließend die Seitenlängen des Rechtecks.

4. Den Extrempunkt des Graphen von $g(x)$ bestimmen Sie mithilfe der 1. und 2. Ableitung, die Sie mit der Quotientenregel $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$ erhalten. Als notwendige Bedingung lösen Sie die Gleichung $g'(x) = 0$ nach x auf. Setzen Sie den erhaltenen x-Wert in $g''(x)$ ein; falls das Ergebnis größer als Null ist, handelt es sich um einen Tiefpunkt. Den zugehörigen y-Wert erhalten Sie, indem Sie den x-Wert in $g(x)$ einsetzen.

5. a) Die Nullstellen der Funktion f erhalten Sie, indem Sie die Gleichung $f(x) = 0$ mithilfe des Satzes vom Nullprodukt nach x auflösen.

   b) Bilden Sie die 1. Ableitung von F mit der Produktregel $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Falls $F'(x) = f(x)$ gilt, ist F eine Stammfunktion von f.
   Verwenden Sie als Ansatz einer weiteren Stammfunktion G von f die Form:
   $G(x) = F(x) + c$. Stellen Sie mit $G(1) = 2e$ eine Gleichung auf und lösen Sie diese nach c auf.

6. a) α) Beachten Sie, dass der Graph der Sinusfunktion $f(x) = \sin x$ um 1 LE nach oben verschoben wird.

   β) Beachten Sie, dass die Periode p den Wert π hat und der Graph der Sinusfunktion $f(x) = \sin x$ nicht nach oben oder unten verschoben wird.

Lösungen

1 Analysis

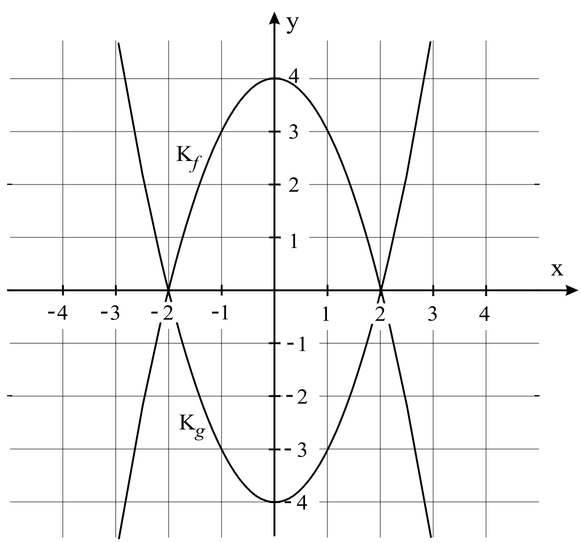
1. Gegeben ist $f(x) = 4 - x^2$ und $g(x) = x^2 - 4$.

   a) Die Schnittstellen der beiden Graphen von f und g erhält man, indem man die Funktionsterme gleichsetzt:

   $$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ 4 - x^2 &= x^2 - 4 \\ 8 &= 2x^2 \\ 4 &= x^2 \\ x_{1,2} &= \pm 2 \end{aligned}$$

   Die Schnittstellen sind $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$.

   b) Den Flächeninhalt A der Fläche, die die beiden Graphen einschließen, erhält man mithilfe eines Integrals; die Integrationsgrenzen sind die beiden Schnittstellen. Da K_f oberhalb von K_g verläuft, erhält man:



   $$\begin{aligned} \mathrm{A} &= \int_{-2}^{2} \left(\left(4 - x^2\right) - \left(x^2 - 4\right) \right) dx = \int_{-2}^{2} \left(-2x^2 + 8\right) d \\ &= \left[-\frac{2}{3}x^3 + 8x \right]_{-2}^{2} = \frac{64}{3} \end{aligned}$$

   Der gesuchte Flächeninhalt beträgt also $\frac{64}{3}$ FE.

2. Als Ansatz für die Funktion f wählt man: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Die zugehörigen Ableitungen sind $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ und $f''(x) = 6ax + 2b$.
Aus dem Wendepunkt $\mathrm{W}(0 \mid 0)$ ergibt sich: $f(0) = 0$ und $f''(0) = 0$. Aus dem Hochpunkt $\mathrm{H}(2 \mid 2)$ ergeben sich die beiden Bedingungen $f(2) = 2$ und $f'(2) = 0$. Damit erhält man vier Gleichungen mit vier Unbekannten:

$$\begin{array}{lcrcrcrcrcl} f(0)=0 & \Rightarrow & a\cdot 0^3 & + & b\cdot 0^2 & + & c\cdot 0 & + & d & = & 0 \\ f''(0)=0 & \Rightarrow & 6a\cdot 0 & + & 2b & & & & & = & 0 \\ f(2)=2 & \Rightarrow & a\cdot 2^3 & + & b\cdot 2^2 & + & c\cdot 2 & + & d & = & 2 \\ f'(2)=0 & \Rightarrow & 3a\cdot 2^2 & + & 2b\cdot 2 & + & c & & & = & 0 \end{array}$$

Daraus ergibt sich das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} & & & & & & d & = & 0 \\ & & 2b & & & & & = & 0 \\ 8a & + & 4b & + & 2c & + & d & = & 2 \\ 12a & + & 4b & + & c & & & = & 0 \end{array}$$

Aus den ersten beiden Gleichungen erhält man $d = 0$ und $b = 0$.
Setzt man $d = 0$ und $b = 0$ in die unteren beiden Gleichungen ein, ergibt sich:

$$\begin{array}{lrcrcl} \mathrm{I} & 8a & + & 2c & = & 2 \\ \mathrm{II} & 12a & + & c & = & 0 \end{array}$$

Subtrahiert man das 2-fache der Gleichung II von Gleichung I, ergibt sich:

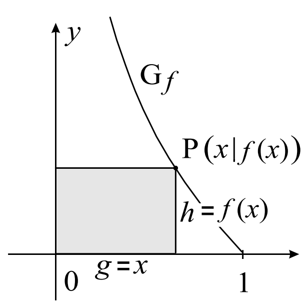
$$-16a = 2 \Rightarrow a = -\frac{1}{8}$$

Setzt man $a = -\frac{1}{8}$ in Gleichung I ein, erhält man:

$$8 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) + 2c = 2 \Rightarrow c = \frac{3}{2}$$

Damit lautet die Funktionsgleichung: $f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{2}x$.

3. Man kann die Situation in einer Skizze darstellen:



Das betrachtete Rechteck hat die Grundseite $g = x$ und die Höhe $h = f(x) = -\ln x$.

Der Flächeninhalt $\mathrm{A}(x)$ des betrachteten Rechtecks beträgt damit:

$$\mathrm{A}(x) = g \cdot h = x \cdot (-\ln x) = -x \cdot \ln x$$

Das Rechteck mit größtem Flächeninhalt erhält man mithilfe der 1. und 2. Ableitung von $\mathrm{A}(x)$, die man mit der Produktregel bestimmt:

$$\begin{aligned}\mathrm{A}'(x) &= -1 \cdot \ln x + (-x) \cdot \frac{1}{x} = -\ln x - 1 \\ \mathrm{A}''(x) &= -\frac{1}{x}\end{aligned}$$

Als notwendige Bedingung löst man die Gleichung $\mathrm{A}'(x) = 0$ nach x auf:

$$\begin{aligned}-\ln x - 1 &= 0 \\ \ln x &= -1 \\ x &= e^{-1}\end{aligned}$$

Setzt man $x = e^{-1}$ in $\mathrm{A}''(x)$ ein, ergibt sich:

$$\mathrm{A}''\left(e^{-1}\right) = -\frac{1}{e^{-1}} = -e < 0 \Rightarrow \text{ Maximum}$$

Die Seitenlängen des Rechtecks mit maximalem Flächeninhalt sind somit $g = e^{-1}$ und $h = f\left(e^{-1}\right) = -\ln\left(e^{-1}\right) = 1$.

4. Den Extrempunkt des Graphen von $g(x) = \frac{x}{\ln x}$ bestimmt man mithilfe der 1. und 2. Ableitung, die man mit der Quotientenregel und der Ketttenregel erhält:

$$\begin{aligned}g'(x) &= \frac{1 \cdot \ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} \\ g''(x) &= \frac{\frac{1}{x} \cdot (\ln x)^2 - (\ln x - 1) \cdot 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^4} = \frac{-\frac{1}{x}\ln x + \frac{2}{x}}{(\ln x)^3}\end{aligned}$$

Die notwendige Bedingung $g'(x) = 0$ führt zu $\frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} = 0$ bzw. $\ln x - 1 = 0 \Rightarrow x = e$.
Setzt man $x = e$ in $g''(x)$ ein, ergibt sich:

$$g''(e) = \frac{-\frac{1}{e}\ln e + \frac{2}{e}}{(\ln e)^3} = \frac{-\frac{1}{e} + \frac{2}{e}}{1^3} = \frac{1}{e} > 0 \Rightarrow \text{ Tiefpunkt}$$

Den zugehörigen y-Wert erhält man, indem man $x = e$ in $g(x)$ einsetzt:

$$g(e) = \frac{e}{\ln e} = e$$

Somit ist der Extrempunkt des Graphen von g ein Tiefpunkt mit den Koordinaten $\mathrm{T}(e \mid e)$.

5. Gegeben ist $f(x) = e^x \cdot (2x + x^2)$.

   a) Die Nullstellen der Funktion f erhält man, indem man die Gleichung $f(x) = 0$ nach x auflöst:

   $$\begin{aligned} e^x \cdot (2x + x^2) &= 0 \\ 2x + x^2 &= 0 \\ x \cdot (2 + x) &= 0 \end{aligned}$$

   Mit dem Satz vom Nullprodukt erhält man die Lösungen $x_1 = 0$ und $x_2 = -2$.
   Somit hat f die Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = -2$.

   b) Um zu zeigen, dass die Funktion F mit $\mathrm{F}(x) = x^2 \cdot e^x$ eine Stammfunktion von f ist, bildet man die 1. Ableitung von F mit der Produktregel:

   $$\mathrm{F}'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = e^x \cdot (2x + x^2) = f(x)$$

   Wegen $\mathrm{F}'(x) = f(x)$ ist F eine Stammfunktion von f.
   Die Gleichung einer weiteren Stammfunktion G von f hat die Form:

   $$\mathrm{G}(x) = \mathrm{F}(x) + c = x^2 \cdot e^x + c$$

   Mit $\mathrm{G}(1) = 2e$ erhält man: $1^2 \cdot e^1 + c = 2e \;\Rightarrow\; c = e$.
   Somit ist $\mathrm{G}(x) = x^2 \cdot e^x + e$ die gesuchte Stammfunktion.

6. Gegeben sind die Funktionen $g_{a,c}(x) = \sin(ax) + c$ mit $a,\ c \in \mathbb{R}_0^+$.

   a) α) Die Funktion $g_{1,1}(x) = \sin(x) + 1$ hat die Wertemenge $[0;\ 2]$, somit gilt: $a = 1$ und $c = 1$.

   β) Damit die Funktion $g_{a,c}$ im Intervall $[0;\ \pi]$ genau drei Nullstellen hat, muss die Periode p den Wert π haben und $c = 0$ gelten.
   Damit erhält man: $a = \frac{2\pi}{\pi} = 2$. Somit gilt: $g_{2,0}(x) = \sin(2x)$.

   b) Die 1. Ableitung von $g_{a,c}(x) = \sin(ax) + c$ erhält man mit der Kettenregel:

   $$g_{a,c}{}'(x) = \cos(ax) \cdot a = a \cdot \cos(ax)$$

   Dies ist eine Kosinusfunktion mit Amplitude a.
   Somit kann die Ableitung von $g_{a,c}$ die Werte $[-a\,;\,a]$ annnehmen.

7. Es ist $f(x) = \cos(x)$ und $g(x) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 2$.

   a) Man erhält den Graphen von g aus dem Graphen von f, indem man den Graphen von f mit Faktor 2 in y-Richtung streckt, mit Faktor $\frac{\pi}{2}$ in x-Richtung staucht (bzw. mit Faktor $\frac{2}{\pi}$ streckt) und um 2 LE nach unten (in negative y-Richtung) verschiebt.